

امتحان الدورة العادية في الجبر 2

المدة : 1 ساعة و 45 دقيقة

التمرين 1 :

- (1) ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K . اعط تعريف لفضاء شعاعي جزئي من E .
- (2) ليكن E, F فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K و $f: E \rightarrow F$ تطبيق خطي . اعط تعريف النواة $Ker(f)$ و الصورة $Im(f)$. برهن أن:

$$f \text{ متباين } \Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\} \text{ و}$$

$$Im(f) = F \Leftrightarrow f \text{ غامر}$$

التمرين 2 :

نعتبر جملة المعادلات الخطية :

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 4x + y + 4z = -2 \\ 2x - y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

أكتب الجملة (S) على الشكل المصفوفي .
برهن أن الجملة (S) تقبل حل وحيد .
أوجد حل الجملة مستخدما طريقة كرامر (لا تقبل اية طريقة أخرى).

التمرين 3 :

ليكن $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$,

ليكن $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ تطبيق خطي داخلي معرف في الأساس القانوني B لـ $\mathbb{R}^3$ بالمصفوفة :

$$A = M_f(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ليكن $B' = \{e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3, e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3\}$
(1) برهن أن $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ هي أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

(2) عين مصفوفة العبور P من الأساس B الى الأساس B'

(3) أحسب مقلوب المصفوفة P^{-1} (بإمكانك استخدام المعادلة : $PX = Y \Leftrightarrow X = P^{-1}Y$)

(4) عين المصفوفة A' لـ f في الأساس B' أي $A' = M_f(B', B')$

(5) أحسب $(A')^4$ و استنتج A^{2n} حيث $n \in \mathbb{N}$

Examen

Exercice 1.

- 3) Soit E un espace vectoriel sur le corps K . Donner la définition d'un sous espace vectoriel de E .
- 4) Soient E, F deux espaces vectoriels sur le même corps K et soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. Donner la définition de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$, et montrer que : f injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$. f surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$.

Exercice 2.

Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 4x + y + 4z = -2 \\ 2x - y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Ecrire le système (S) sous la forme matricielle :

Montrer que (S) admet une solution unique.

Calculer cette solution par la méthode de Cramer.

Exercice 3.

Soit $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et considérons l'endomorphisme $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que la matrice de f dans la base B , qu'on note A , est donnée par :

$$A = M_f(B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soient $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.

6) Montrer que $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

7) Déterminer la matrice de passage P de la base B à la base B' .

8) Déterminer l'inverse P^{-1} (vous pouvez utiliser l'équation $PX = Y \Leftrightarrow X = P^{-1}Y$).

9) Déterminer la matrice A^0 de f dans la base B^0 , i.e. $A^0 = M_f(B^0, B^0)$. 5) Calculer $(A^0)^4$ et déduire A^{2n} , $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 :

$$1) 1) F \text{ sous espace vectoriel de } E \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & 0_{\mathbb{R}_3[X]} \in F \text{ et } F \subset E \\ (ii) & \forall x, y \in F: x + y \in F \\ (iii) & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in F: \alpha \cdot x \in F \end{cases}$$

1

$$2) \text{Ker}(f) = \{x \in E: f(x) = 0_F\}$$

0.50

$$\text{Im}(f) = \{f(x): x \in E\} = \{y: \exists x \in E, y = f(x)\} = f(E)$$

0.50

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

$$\text{On a } \text{Ker}(f) \text{ est un s.e.v de } E \text{ alors } 0_E \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \{0_E\} \subset \text{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow \text{Soit } x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_E = f(0_E) \text{ et comme } f \text{ injective alors } x = 0_E \Rightarrow \text{Ker}(f) \subset \{0_E\} \text{ d'où } \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

0.75

$$\Leftrightarrow \text{soient } x, y \in E: f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = f(x - y) = 0_E \Rightarrow x - y \in \text{Ker}(f) \Rightarrow x - y = 0_E \Rightarrow x = y \text{ donc } f \text{ injective.}$$

0.75

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$$

$$\Rightarrow \text{on a } \text{Im}(f) \subset F. \text{montrons que } F \subset \text{Im}(f)$$

$$\text{Soit } y \in F \text{ et } f \text{ surjective alors } \exists x \in E, y = f(x) \Rightarrow y \in \text{Im}(f) \Rightarrow F \subset \text{Im}(f)$$

$$\text{D'où } \text{Im}(f) = F$$

0.75

$$\Leftrightarrow \text{soit } y \in F \Rightarrow y \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in E, y = f(x) \Rightarrow f \text{ surjective}$$

0.75

Exercice 2

$$1) \text{ la forme matricielle du système } (S)$$

$$(S) \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 4x + y + 4z = -2 \\ 2x - y + 2z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1

$$2) \text{ le système } (S) \text{ admet solution unique ssi } \det A \neq 0$$

0.50

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ alors } (S) \text{ admet une seule solution.}$$

1

$$A_j \text{ on remplace la colonne } j \text{ par } B.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

1.50

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

1.50

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

1.50

Exercice3

$$1) B' \text{ base de } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{card}(B') = 3 \\ B' \text{ libre} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \text{ card}(B') = 3 \\ (ii) \det B' \neq 0 \end{cases}$$

0.25

$$i) \text{ card}(B') = 3 \text{ évident}$$

0.25

$$ii) \det B' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 + L_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ donc } B' \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

1

$$2) \text{ matrice de passage de } B \text{ dans } B'$$

$$P = \begin{pmatrix} \overset{e'_1}{1} & \overset{e'_2}{2} & \overset{e'_3}{2} \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \quad (1)$$

3) calcul de P^{-1}

1° méthode. On a

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = -e'_1 + e'_2 \\ e_2 = e'_2 - e'_3 \\ e_3 = 2e'_1 - e'_3 \end{cases} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix} \quad (1.50)$$

2° méthode. On utilise le déterminant

$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} |P_{i,j}|$ ou $P_{i,j}$ est la matrice de P d'où on enlève la ligne i et la colonne j .

$$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_{1,2} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_{2,1} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \Delta_{2,3} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2, \Delta_{3,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \Delta_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} & \Delta_{2,3} \\ \Delta_{3,1} & \Delta_{3,2} & \Delta_{3,3} \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4) calcul de $A' = Mf(B', B')$

1° méthode. On a $A' = Mf(B', B') = P^{-1} \times A \times P$ (0.25)

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

2° méthode. Calcul directe

$$\begin{cases} f(e'_1) = f(e_1) - f(e_2) + f(e_3) = e'_1 \\ f(e'_2) = 2f(e_1) - f(e_2) + f(e_3) = e'_3 \\ f(e'_3) = 2f(e_1) - 2f(e_2) + f(e_3) = -e'_2 \end{cases} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f(e'_1) \\ f(e'_2) \\ f(e'_3) \end{matrix}$$

5) le calcul de A'^4 et A'^n

$$A'^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0.50)$$

$$A'^4 = A'^2 \times A'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad (0.50)$$

$$\text{En déduire que } A'^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad (0.50)$$

$$A^{2n} = (P \times A' \times P^{-1})^{2n} = P \times A'^{2n} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(-1)^n & 2(-1)^n \\ -1 & (-1)^{n+1} & 2(-1)^{n+1} \\ 1 & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2(-1)^n & 0 & 2 + 2(-1)^{n+1} \\ 1 - (-1)^n & (-1)^n & -2 - 2(-1)^{n+1} \\ -1 + (-1)^n & 0 & 2 - (-1)^n \end{pmatrix} \quad (0.50)$$