

Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatique

Département de mathématiques 3^{ème} année Licence, mathématiques

Examen
Géométrie différentielle
durée : 1h45

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

Exercice 1. 1. Trouver une application $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lisse vérifiant $\phi(0) = 0$ et telle que la forme différentielle

$$w(x, y) = \frac{2xy}{1+x^2} dx + \phi(x) dy$$

soit exacte sur $\mathbb{R}^2$.

2. Trouver une fonction f lisse telle que $w = df$.
3. En déduire $\int_{\Gamma} w$ où Γ est l'ellipse d'équation $2x^2 = -7y^2 + 21$, orienté dans le sens direct.

Exercice 2. 1. Soit le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ où

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}.$$

Montrer que T^2 est une sous variété de $\mathbb{R}^4$. Déterminer sa dimension et l'espace tangent au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Rappeler la définition d'une variété différentielle M de dimension d de $\mathbb{R}^n$. Que représente M si : $d = 0$, $d = 1$, $d = 2$ et $d \geq 3$?

Exercice 3. Soit la 1-forme différentielle $w = y^2 dx - x^2 dy$. Représenter graphiquement Γ et calculer $\int_{\Gamma} w$ lorsque :

1. Γ est le segment de droite d'origine $A = (1, 0)$ et d'extrémité $B = (0, 1)$ paramétré par $\Gamma(t) = (1 - t, t)$ où $t \in [0, 1]$.
2. Γ le quart de cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, d'origine $A = (1, 0)$ et d'extrémité $B = (0, 1)$ paramétré par $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer

$$I = \int \int_D y^2 dx dy$$

où

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Bon travail
F. Aliouane

Correction examen.

Exercice 18 (07pts)

Soit $\omega(x, y) = \frac{2xy}{1+x^2} dx + \phi(x) dy$

Pour que la forme différentielle ω soit exact, il faut qu'elle soit fermée i.e., $d\omega = 0$.

$$d\omega = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2xy}{1+x^2} \right) dx \wedge dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2xy}{1+x^2} \right) dy \wedge dx + \phi'(x) dx \wedge dy$$

$$= \frac{2x}{1+x^2} dy \wedge dx + \phi'(x) dx \wedge dy$$

car ω est une 1-forme différentielle donc, $dx \wedge dx = 0$
et $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$

$$d'ou $d\omega = \left(-\frac{2x}{1+x^2} + \phi'(x) \right) dx \wedge dy = 0$ i.e.,$$

$$\phi'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \phi(x) = \ln(1+x^2) + C$$

$$\text{Puisque } \phi(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Donc } \phi(x) = \ln(1+x^2)$$

2) On résout le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{1+x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(1+x^2) \end{cases}$$

Donc $f(x,y) = y \ln(1+x^2) + H(y)$ (0,5)

Or $\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(1+x^2) + H'(y) = \ln(1+x^2) \Rightarrow H'(y) = 0$
 $\Rightarrow H(y) = \text{cst}$ (0,25)

alors $f(x,y) = y \ln(1+x^2) + \text{cst}$. (0,25)

3) Soit $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 2x^2 = -3y^2 + 21\}$

le chemin Γ est fermé et ω étant exacte. (0,5)

Donc $\int_{\Gamma} \omega = 0$ (0,5)

Exercice 20 (0,7 pts)

1) On sait que le produit de deux sous-variétés est une sous-variété. Donc il suffit de montrer que S^1 est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (0,5), g est une application
 $(x,y) \mapsto g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

de classe C^∞ . Soit $(x,y) \in S^1$. On a $S^1 = g^{-1}(\{0\})$. (0,25)

et $dg_{(x,y)}(t_1, t_2) = 2(xt_1 + yt_2)$. Nous avons $x^2 + y^2 = 1$ (0,5)

alors (x,y) n'est pas un vecteur nul, donc $dg_{(x,y)}$ est surjectif. (0,25)

D'où S^1 est une sous variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1, (0,25)
 alors T^2 est de dimension 2. (0,5)

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$T_{(x,y)} T^2 = T_x S^1 \times T_y S^1 = \{x\}^\perp \times \{y\}^\perp. \quad (0,5)$$

Soient θ_1, θ_2 fixés, posons $x = (\cos \theta_1, \sin \theta_1)$, $y = (\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ (0,25)

$$\begin{aligned} \text{On a } \{x\}^\perp &= (\sin \theta_1, -\cos \theta_1) \mathbb{R} \\ &= \{ (t_1 \sin \theta_1, -t_1 \cos \theta_1), t_1 \in \mathbb{R} \} \end{aligned} \quad (0,5)$$

$$\text{de même, } \{y\}^\perp = \{ (t_2 \sin \theta_2, -t_2 \cos \theta_2), t_2 \in \mathbb{R} \} \quad (0,5)$$

$$\text{Donc } T_{(x,y)} T^2 = \{ (t_1 \sin \theta_1, -t_1 \cos \theta_1, t_2 \sin \theta_2, -t_2 \cos \theta_2), t_1, t_2 \in \mathbb{R} \} \quad (0,25)$$

2) Définition variété différentielle (0,5)

Si $d=0$, Π est un point discret ou point isolé (0,25)

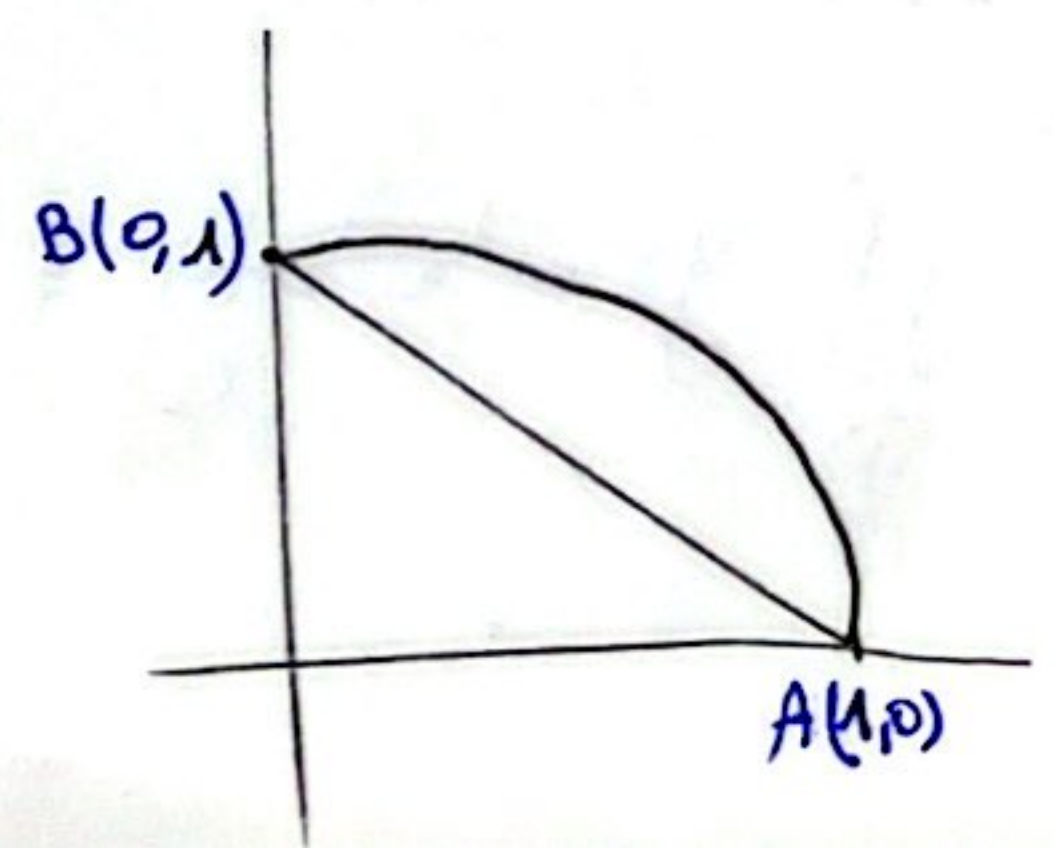
Si $d=1$, Π est une courbe. (0,25)

Si $d=2$, Π est une surface. (0,25)

Si $d \geq 0$, Π est une hypersurface (0,25)

Exercice 3 (0,6pts)

1) Soit $\omega = y^2 dx - x^2 dy$



$$1) \Gamma(t) = (1-t, t) ; 0 \leq t \leq 1.$$

$$x(t) = 1-t, y(t) = t$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega &= \int_{\Gamma} -y^2 dx + x^2 dy = \int_0^1 -y^2(t) x'(t) dt + x^2(t) y'(t) dt \\ &= \int_0^1 -t^2 (-dt) + (1-t)^2 dt = \int_0^1 (t^2 + 1 - 2t + t^2) dt \\ &= \int_0^1 (2t^2 - 2t + 1) dt = \left[\frac{2}{3} t^3 - t^2 + t \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$2) \Gamma(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \cdot x(t) = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt$$

$$y(t) = \sin t \Rightarrow dy = \cos t dt$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \omega &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2 t (-\sin t) dt + \cos^2 t (\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (1 - \cos^2 t) + \cos t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin t \cos^2 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t \sin^2 t dt \\ &= -\cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$3) I = \iint_D y^2 dx dy ; D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$$

d'équation paramétrique $x = 2 \cos t, y = \sin t$ parcourue dans le sens trigonométrique lorsque t varie de 0 à 2π . Par la formule de GR

Soit $P = 0$ et $Q = xy^2$ tq. $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$. Il vient que

$$\iint_D y^2 dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int P dx + Q dy$$

$$I = \int_{\partial D} xy^2 dy.$$

Or $dy = \cos t dt$, donc $I = \int_0^{2\pi} 2 \cos t \sin^2 t \cos t dt$
 $= 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt$

On a $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$, il vient que

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt$$

car $\cos 4t = 1 - 2 \sin^2 2t$

Donc $I = \frac{1}{4} t - \frac{1}{16} \sin 4t \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$

①