

Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatique

Département de mathématiques 3^{ème} année Licence, mathématiques

Examen partiel
Géométrie différentielle
durée : 1h heure

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

06pts
Exercice 1. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 - 1.$$

1. Montrer qu'il existent deux ouverts I et J tels que $-1 \in I$ et $1 \in J$ et $g : I \rightarrow J$ tel que $y = g(x) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in I \times J, f(x, y) = 0$.
2. Calculer $\partial y / \partial x$.

06pts
Exercice 2. 1. Donner la définition d'une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d en utilisant les submersions.

2. Montrer que l'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xy + xz + 2x + 2y - z = 0\}$ définit une sous variété de $\mathbb{R}^3$. Qu'elle est sa dimension ?
3. Déterminer le plan tangent à cette sous variété en l'origine.

Bon travail
F. Aliouane

Correction interrogation

Exercice 18 (06 pts)

Posons $f(x, y) = x^4 + x^3 y^2 - y + y^2 + y^3 - 1$.

f définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $f(-1, 1) = 0$

et on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3 y - 1 + 2y + 3y^2$,

soit $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = 2 \neq 0$ i.e., un isomorphisme.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(-1, 1)$. Il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant -1 , un intervalle J de $\mathbb{R}$ contenant 1 et une fonction $g: I \rightarrow J$ tq, pour tout couple $(x, y) \in I \times J$, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$.

On a, $g(-1) = 1$. Pour calculer $g'(x)$, on utilise la relation $f(x, g(x)) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 g^2(x) - g(x) + g^2(x) + g^3(x) - 1 = 0$

Pour tout $x \in I$, on aura

$$4x^3 + 3x^2 g'(x) + 2x^3 g(x) - g'(x) + 2g'(x)g(x) + 3g'(x)g^2(x) = 0$$

évaluant cette relation en $x = -1$, on trouve

$$-4 + 3g^2(-1) - 2g'(-1)g(-1) - g'(-1) + 2g'(-1)g(-1) + 3g'(-1)g^2(-1) = 0$$

$$\text{Or } g(-1) = 1, \text{ donc } -4 + 3 - 2g'(-1) - g'(-1) + 2g'(-1) + 3g'(-1) = 0$$

$$\text{d'où, } g'(-1) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}$$

Exercice 2° (06pts) Déf de sous-variété (1)

Soit $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xy + xz + 2x + 2y - z = 0 \}$

On définit $f(x, y, z) = xy + xz + 2x + 2y - z$ de $\mathbb{R}^3$ ds. $\mathbb{R}$ de classe C^∞

Il est clair que $S = f^{-1}(\{0\})$. Pour montrer que S est une sous-variété de dimension 2, il suffit de vérifier que f est une submersion en chaque point de S . Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$,

on a $df_{(x_0, y_0, z_0)} = (y_0 + z_0 + 2 \quad x_0 + 2 \quad x_0 - 1)$

il est impossible que les 2^{ème} et 3^{ème} colonnes soient simultanément nulles, donc $\text{rg } df_{(x_0, y_0, z_0)} = 1 = \dim \mathbb{R}$.

d'où $df_{(x_0, y_0, z_0)}$ est surjective et on conclut que f est une submersion en tout point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, en particulier en tout point de S . Donc S est une s. variété de dim. 2. Le plan tangent en l'origine est alors donné par

$$T_{(0,0,0)} S = \text{Ker } df_{(0,0,0)}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; df_{(0,0,0)}(x, y, z) = 0 \}$$

$$df_{(0,0,0)}(x, y, z) = (2 \quad 2 \quad -1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + 2y - z$$

$$\text{donc } T_{(0,0,0)} S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 2y - z = 0 \} \\ = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 2y = z \}.$$