

Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des sciences exactes et informatique

Département de mathématiques 3^{ème} année Licence, mathématiques

Examen de rattrapage
Géométrie différentielle

Durée : 1h45

Il est impératif de fournir une justification à chacune des réponses.

Exercice 1. Soit $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ avec

$$P(x, y) = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2y} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{xy^2}.$$

1. Montrer que, dans $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$, w est une forme différentielle exacte.
2. Trouver une fonction u lisse telle que $w = du$.
3. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} w$ lorsque Γ est l'arc défini par : $x = t + \cos^2 t$, $y = 1 + \sin^2 t$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 2. 1. Soit M_1 une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p_1 et M_2 une sous variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension p_2 . Montrer que $M_1 \times M_2$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ dont on précisera la dimension.

2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble

$$M_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ et } x^2 + y^2 - 2x = 0\}$$

où a est une constante strictement positive.

(a) Montrer que M_a est une sous variété de $\mathbb{R}^3$ lorsque $a \neq 0$. Quelle est sa dimension ?

(b) Déterminer $T_{(0,0,3)}M_3$.

Bon travail
F. Aliouane

Correction

Exercice 18

09,50pts

$$\Rightarrow w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy;$$

$$P(x,y) = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 y}; \quad Q(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{xy^2}$$

Montrons que w est fermée i.e., $dw = 0$. (0,5)

$$dw = \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(-2y(x^2 + y^2) + 2y(3x^2 - y^2)x^2y - x^2(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2))}{(x^2 y)^2} / \begin{matrix} dx \wedge dx = 0 \\ dy \wedge dy = 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{2x^2 y^2 - 3y^4 - 3x^4}{x^2 y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Nous avons, $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ car dx et dy sont des 1-formes différentielles.

Donc $dw = 0$ et w est fermée.

Montrons que $D = \{(x,y); x > 0, y > 0\}$ est convexe (0,5)

Soient $\Pi_0 = (x_0, y_0)$, $\Pi_1 = (x_1, y_1)$ et $\lambda \in [0, 1]$; (0,5)

$$\begin{cases} \Pi_0 \in D \Leftrightarrow x_0 > 0 \wedge y_0 > 0 \\ \Pi_1 \in D \Leftrightarrow x_1 > 0 \wedge y_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x_0 > 0 \wedge \lambda y_0 > 0 \\ (1-\lambda)x_1 > 0 \wedge (1-\lambda)y_1 > 0 \end{cases}$$

$$\lambda \Pi_0 + (1-\lambda)\Pi_1 = (\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1, \lambda y_0 + (1-\lambda)y_1) \in D$$

Donc D est convexe.

le théorème de Poincaré, ω est exacte.

2) Déterminant $u \in \mathcal{D} + \gamma$. $du = \omega$. On doit résoudre le

$$\text{Système : } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 y} = \frac{3x^2}{y} - \frac{y^3}{x^2} + 2y$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} + 2xy + H(y)$$

$$\text{Or, } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x^3}{y^2} + \frac{3y^2}{x} + 2x + H'(y)$$
$$= \frac{-x^4 + 3y^4 + 2y^2 x^2}{xy^2} + H'(y)$$

$$= Q(x, y) + H'(y) \Rightarrow H'(y) = 0 \Rightarrow H(y) = \text{cst}$$

$$\text{Donc } u(x, y) = 2xy + \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} + c$$

$$\text{Or } u(0, 0) = c = 0 \Rightarrow u(x, y) = 2xy + \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x}$$

3) Puisque ω est exacte, $\int \omega$ ne dépend pas du chemin mais juste des extrémités $(x(0), y(0)) = (1, 1)$ et $(x(2\pi), y(2\pi)) = (2\pi+1, 1)$

$$\int \omega = u(2\pi+1, 1) - u(1, 1) = 2(2\pi+1) + \frac{(2\pi)^3}{2\pi+1} + \frac{1}{2\pi+1} - 4$$
$$= 8\pi^3 + 4\pi - 2 + \frac{1}{2\pi+1}$$

exercice 28 (10,50pts)

1) Soit $x = (x_1, x_2) \in \Pi_1 \times \Pi_2$. $\exists!$ existe un voisinage U_1 de x_1 et $f_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-p_1}$ une submersion en x_1 tq. $\Pi_1 \cap U_1 = f_1^{-1}(\{0\})$.

De même, il existe un voisinage U_2 de x_2 et $f_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{m-p_2}$ une submersion en x_2 tq. $\Pi_2 \cap U_2 = f_2^{-1}(\{0\})$.

Posons $f = (f_1, f_2): \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m-p_1-p_2}$
 $(x, y) \mapsto (f_1(x), f_2(y))$

Alors f est bien une submersion en $x = (x_1, x_2)$. En effet,

$$df_x = \begin{pmatrix} df_1(x_1) & 0 \\ 0 & df_2(x_2) \end{pmatrix}$$

le rang de cette matrice vaut le rang de $df_1(x_1)$ plus le rang de $df_2(x_2)$ i.e.,

$$(n - p_1) + (m - p_2) = (n+m) - (p_1 + p_2).$$

De plus, on a également

$$f^{-1}(\{0\}) = (\Pi_1 \cap U_1) \times (\Pi_2 \cap U_2) = (\Pi_1 \times \Pi_2) \cap (U_1 \times U_2)$$

Ainsi, $\Pi_1 \times \Pi_2$ est une sous variété de dimension $p_1 + p_2$.

2) Soit $\Pi_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ et } x^2 + y^2 - 2x = 0\}$

considérons la fonction

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x^2 + y^2 + z^2 - a^2, x^2 + y^2 - 2x) \quad \text{OK}$$

f est de classe C^∞ . De plus,

$$f^{-1}(\{0\}) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x^2 + y^2 + z^2 - a^2, x^2 + y^2 - 2x) = 0 \}$$

$$= \Pi_a \cap \mathbb{R}^3 = \Pi_a. \quad \text{OK}$$

il suffit de montrer que f est une submersion en tout point si $a \neq 2$. La matrice jacobienne est

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-2 & 2y & 0 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

Supposons que tous les mineurs d'ordre 2 de Jf sont nuls. Soit donc le système :

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = 0, yz = 0 \\ z(x-1) = 0 \end{cases} \quad \text{OK}$$

a) Si $y=0 \wedge z \neq 0$, alors ce cas $x=1$. Mais les points $(1, 0, z) \in \Pi_a$ ($z \in \mathbb{R}$). Par suite $\text{rg}(Jf) = 2$. OK

Si $y=z=0$, alors ce cas $x \neq 1$. des deux premières équations nous donnent
$$\begin{cases} x^2 - a^2 = 0 \\ x(x-2) = 0 \end{cases}$$

Ainsi $x=a=2$. de système (I) admet comme solution le point $(2,0,0)$, mais ce point appartient à Π_a si $a=2$.

D'où $\text{rang de } J_f = 2$ si $a \neq 2$.

En conclusion, f est une immersion si $a \neq 2$. de sous ensemble Π_a est, donc, une sous variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ si $a \neq 2$.

2) L'espace tangent à Π_3 au point $(0,0,3)$ est donné par :

$$T_{(0,0,3)} \Pi_3 = \ker(df_{(0,0,3)})$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; df_{(0,0,3)}(x,y,z) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 6z = 0; -2x = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x=z=0 \right\}$$

$$= \left\{ (0,y,0); y \in \mathbb{R} \right\}$$