

Théories de Jauge

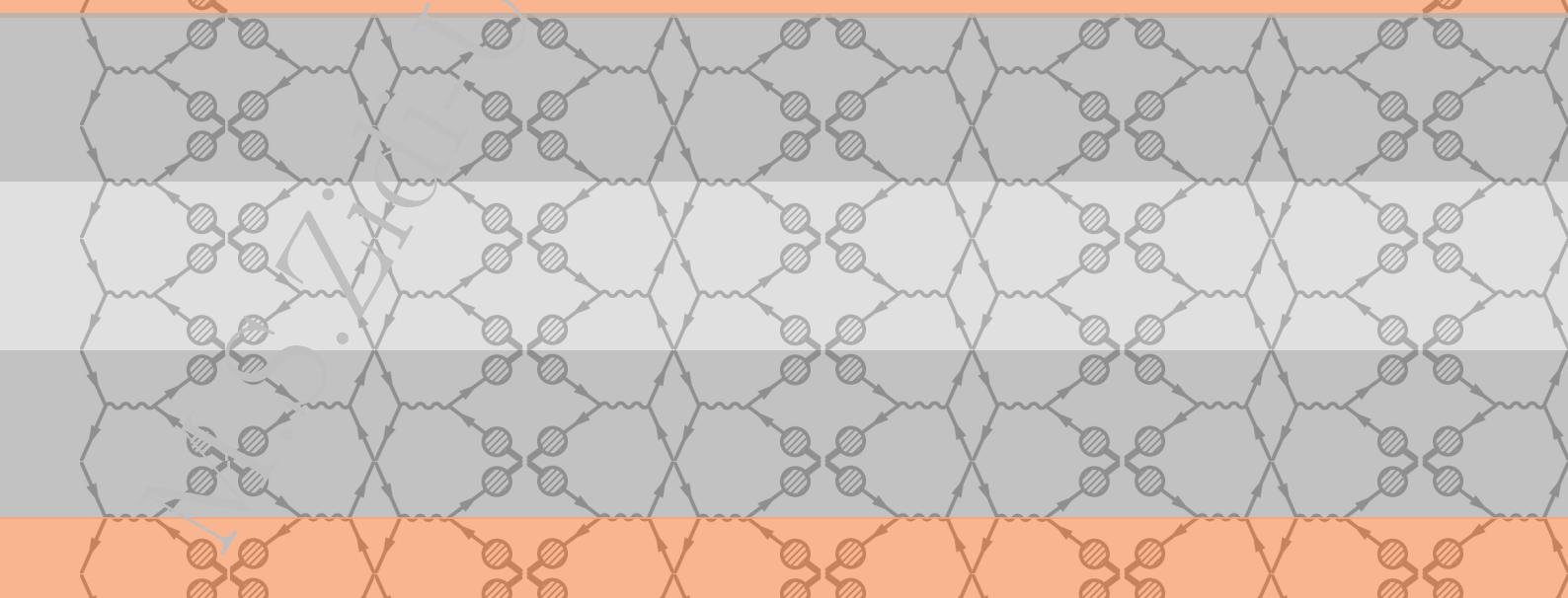
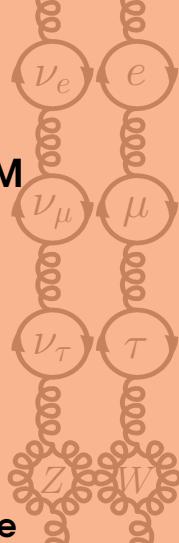
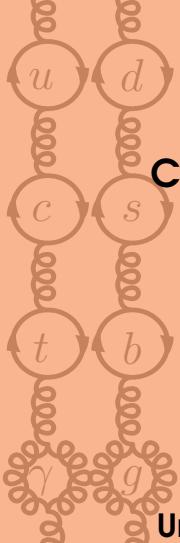
Cours et exercices en QFT, QED, QCD et SM

Master physique théorique

Mohamed Sadek ZIDI

mohamed.sadek.zidi@univ-jijel.dz

Université Mohamed Seddik BenYahia-Jijel, Algérie



Année universitaire 2023/2024
Faculté des sciences exactes et informatique
Département de Physique
Université de Jijel, Algérie

شكرا

أعرب عن شكري الجزيل لجميع الطلبة الذين تابعوا هذه المحاضرة خلال الفترة المتدة من سنة 2017 إلى سنة 2023.

إن مساهماتهم كانت ضرورية لتحسين محتوى هذه المحاضرة. وبفضل ملاحظاتهم الدقيقة، تمكنت من تحديد و تصحيح الكثير من الأخطاء سواء كانت مطبعية أو غيرها.

أضاف إلى ذلك، فإن أسئلتهم الهدفية و شغفهم لتعزيز فهمهم كانوا حافزا لإثراء هذه المحاضرة بإضافة الكثير من التفاصيل التي لم أكن أتمنى وضعها منذ البداية.

وبفضل إرادتهم، تطور محتوى هذه المحاضرة وأصبح مقبولا إلى حد بعيد. كما أوجه خالص شكري للأستاذ باتريك أورونتش والذى درست معه هذه المحاضرات في بدايات عملي بجيجيل.

حياتي الحالمة.

Remerciement

Je tiens à remercier tous les étudiants qui ont suivi ce cours entre 2017 et 2023.

Leurs contributions ont été essentielles pour l'amélioration du contenu de ce cours.

Grâce à leurs commentaires constructifs, j'ai pu identifier et corriger de nombreuses erreurs, qu'elles soient typographiques ou d'autres.

De plus, leurs questions et leur soif d'apprendre m'ont incité à enrichir la conférence avec des détails supplémentaires que je n'avais pas initialement prévus.

C'est grâce à leur engagement que ce module a pu évoluer et devenir tout à fait acceptable.

Merci à M. Patrick Aurenche, compagnon de mes premiers pas dans l'enseignement de ce cours à Jijel.

Mes remerciements les plus sincères.

M.S.Zidi-University-Jijel-Gauge-Theories

Table des matières

1	Théories de jauge classiques	13
1.1	Généralités	13
1.1.1	C'est quoi ? et Pourquoi les théories de jauge ?	13
1.1.2	Interactions fondamentales et théorie de jauge	14
1.2	Rappel de théories des champs	15
1.2.1	Formalisme lagrangien et lois de conservation	15
1.2.2	Dimensions naturelles	16
1.2.3	Symétries et lois de conservation	17
1.3	Rappel de théorie des groupes	19
1.3.1	Éléments de base	19
1.3.2	Groupes de Lie et algèbres de Lie	20
1.3.3	Exemples : $SU(2)$ et $SU(3)$	24
1.4	Théories de jauge	26
1.4.1	Invariance de Jauge en électrodynamique classique	27
1.4.2	Transformations de jauge abéliennes	28
1.4.3	Transformations de jauge non-abéliennes	32
1.4.4	Construction d'une théorie de jauge : modèle générique	36
1.5	Exercices et problèmes	37
2	Électrodynamique Quantique	43
2.1	Tests expérimentaux de la QED	44
2.2	Lagrangien classique et invariance de jauge	45
2.3	Quantification	46
2.3.1	Quantification canonique	46
2.3.2	Quantification du champ de Dirac	48
2.3.3	Quantification du champ de Maxwell	52
2.4	Matrice S et Règles de Feynman	57
2.4.1	Définition de la matrice S	57
2.4.2	Théorème de Wick	57

2.4.3	Matrice S et Règles de Feynman	58
2.4.4	Règles de Feynman en QED dans l'espace des impulsions	62
2.5	Calcul des processus à l'ordre de Born	63
2.5.1	Création d'une paire de leptons : $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$	63
2.5.2	Diffusion Compton : $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$	67
2.5.3	Amplitudes polarisée de la réaction : $e^- e^+ \rightarrow l^- l^+$	71
2.6	Exercice et Problèmes	72
2.6.1	Rappel de cours	72
2.6.2	Questions de cours	74
2.6.3	Exercices et Problèmes	75
3	Chromodynamique Quantique	79
3.1	Charge de couleur	80
3.1.1	Couleur & confirmation	80
3.1.2	Charge de couleur et le groupe $SU(3)$	82
3.2	Groupe $SU(3)$ et ses représentations	83
3.3	Lagrangien classique de la chromodynamique	86
3.4	Quantification de la chromodynamique	89
3.4.1	Généralités sur la quantification des théories de jauge non-abéliennes	89
3.4.2	Quantification par la méthode fonctionnelle	91
3.4.3	Invariance BRST	95
3.4.4	Extraction des règles de Feynman par la méthode fonctionnelle	96
3.5	Règles de Feynman en QCD	98
3.5.1	Règle de Feynman en jauge covariante	98
3.5.2	Règle de Feynman en jauge non-covariante	99
3.6	Calcul des processus à l'ordre de Born	100
3.6.1	Sections efficaces hadronique et partonique	100
3.6.2	Processus : $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$	102
3.6.3	Processus : $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$	104
3.6.4	Processus : $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$	106
3.6.5	Processus : $qg \rightarrow qg$	108
3.6.6	Processus : $\bar{q}\bar{q} \rightarrow \bar{q}\bar{q}$	109
3.6.7	Processus : $qg \rightarrow qg$	109
3.7	Exercices et Problèmes	113
3.7.1	Questions de cours	113
3.7.2	Exercices	114
4	Modèle Standard	117
4.1	Particules et interactions	118
4.1.1	Particules du SM	118
4.1.2	Porté des interactions fondamentales	118
4.1.3	Types d'interactions faible	119
4.2	Modèle de Fermi	120
4.2.1	Modèle de Fermi avant amélioration	120
4.2.2	Violation de parité et interaction vectoriel-axiale ($V-A$)	121
4.2.3	Problèmes du modèle de Fermi	126
4.2.4	Modèle de Fermi avec un boson de jauge intermédiaire	129

4.3	Modèle de Glashow-Weinberg-Salam	130
4.3.1	Courants & Isospin & Hypercharge	130
4.3.2	Lagrangien de la théorie	133
4.3.3	Brisure spontanée de la symétrie	136
4.3.4	Inclusion des quarks dans SM (<i>voir T. Morii et al [11]</i>)	147
4.3.5	Règles de Feynman de SM	150
4.4	Calcul des processus à l'ordre de Born	153
4.4.1	Désintégration du boson W en leptons	153
4.4.2	Désintégration du muon en leptons	156
4.4.3	Processus : $h \rightarrow f + \bar{f}$	157
4.4.4	Processus : $\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow Z + Z$	158
4.4.5	Diffusion de bosons de jauge $VV \rightarrow VV$ est le rôle du boson Higgs	160
4.4.6	Modèle de Fermi comme limite du modèle standard	163
4.5	Exercices et problèmes	164
5	Corrections radiatives et renormalisation	167
5.1	Divergences et régularisation	168
5.1.1	Rotation de Wick	168
5.1.2	Comptage de puissance	169
5.1.3	Régularisation dimensionnelle	170
5.1.4	Paramétrisation de Feynman	173
5.1.5	Intégration sur la 4-impulsion tournant dans la boucle	173
5.2	Boucles en QED	176
5.2.1	Opérateur de polarisation	177
5.2.2	Correction fonction d'onde	184
5.2.3	Correction du vertex	187
5.3	Renormalisation de la QED	194
5.3.1	Renormalisation de l'opérateur de polarisation : calcul de Z_3	194
5.3.2	Renormalisation de la constante de couplage α	197
5.3.3	Renormalisation de l'opérateur de masse : calcul de Z_0 et Z_2	199
5.3.4	Renormalisation du vertex en QED	202
5.4	Boucles en QCD	203
5.4.1	Corrections au propagateur en QCD	204
5.4.2	Correction au propagateur du fantôme	205
5.4.3	Correction au propagateur au quark	206
5.4.4	Correction au vertex quark-quark-gluon	206
5.4.5	Correction au vertex 3-gluon	207
5.4.6	Correction au vertex 4-gluon	207
5.4.7	Correction au vertex fantôme-fantôme-gluon	208
5.5	Renormalisation de la QCD	208
5.6	Exercices et problèmes	212
Bibliographie		215
Index		217

M.S.Zidi-University-Jijel-Gauge-Theories

Introduction

Les théories de jauge ont révolutionné notre compréhension des interactions fondamentales de l'univers. Elles constituent un pilier de la physique théorique moderne et ont permis de réaliser des prédictions d'une précision extraordinaire. Le concept de théorie de jauge trouve ses racines dans les travaux de Weyl dans les années 1930. Son ambition était d'unifier la relativité générale et l'électromagnétisme dans le cadre de la théorie classique. Mais c'est dans les années 1950 que Yang et Mills ont formulé l'idée fondamentale que la symétrie engendre l'interaction. La définition moderne des théories de jauge est : *"ce sont des théories des champs qui restent invariantes sous les transformations de jauge locales. En d'autres termes, elles se basent sur un groupe de symétrie locale"*. La première théorie de jauge réussie, tant théorique qu'expérimental, est l'électrodynamique quantique. Elle sert de modèle prototype pour toutes les théories de jauge ultérieures.

L'électrodynamique quantique (QED). Dans la QED, le photon agit comme médiateur de l'interaction entre les particules chargées électriquement, comme les leptons et les quarks. Toute interaction se produit par l'absorption ou l'émission d'un photon réel ou virtuel. La QED est l'une des théories physiques les plus testées et les plus précises à ce jour. Cette théorie a connu de nombreux succès, dont : (i) Une concordance extraordinaire entre la mesure précise et le calcul théorique du moment magnétique dipolaire, avec une précision supérieure à 10^{-12} ! (ii) La prédiction que le photon est de masse nulle. **La chromodynamique quantique (QCD).** La QCD est la deuxième théorie de jauge couronnée de succès. Elle décrit les interactions fortes au sein du noyau atomique. La cohésion du proton et du neutron est attribuée à une nouvelle charge quantique appelée charge de couleur. Les particules porteuses de cette charge, les quarks, interagissent entre elles par l'absorption ou l'émission de gluons, qui portent eux-mêmes une charge de couleur. Les gluons sont considérés comme les médiateurs de l'interaction forte. **Le modèle standard (SM).** Le SM est la théorie de jauge la plus importante et la plus célèbre à ce jour. Elle englobe les deux théories précédemment citées et unifie les forces électromagnétiques et les forces faibles. L'existence de toutes les particules prédites par le SM a été confirmée expérimentalement par la suite.

Les théories de jauge figurent parmi les théories quantiques des champs les plus importantes. Elles ont connu un succès retentissant dans le domaine de la physique des particules et de la physique des hautes énergies, tant au niveau expérimental que théorique. Leur pouvoir prédictif est extraordinaire. Elles ont permis de prédire l'existence de nombreuses particules, dont la découverte a ensuite été confirmée par des expériences. Parmi les exemples les plus connus, citons :

- Le gluon, médiateur de l'interaction forte (prédit en 1965 et découvert en 1979).

- Les **bosons faibles Z et W**, responsables de la désintégration radioactive (prédict en 1968 et découvert en 1983).
- Le **quark top**, la particule élémentaire la plus massive (prédict en 1973 et découvert en 1995).
- ...
- Le boson de Higgs, élément crucial du Modèle Standard (prédict en 1964 et découvert en 2012).

Le boson de Higgs est la dernière particule en date à avoir été découverte. Sa prédition date de 1964, et il a fallu attendre 2012 pour que les expériences ATLAS et CMS au CERN confirment son existence. Cette découverte majeure a marqué l'aboutissement d'une longue quête scientifique et a consolidé le Modèle Standard. Du point de vue théorique, les théories de jauge tiennent leur puissance de la symétrie de jauge. Cette propriété les rend particulièrement élégantes et permet de les traiter mathématiquement de manière efficace. Un autre atout majeur des théories de jauge est leur renormalisabilité. Cela signifie qu'il est possible de redéfinir les paramètres de la théorie pour éliminer les divergences ultraviolettes qui apparaissent dans les calculs. Cette propriété est essentielle pour garantir la cohérence et la prédictivité de la théorie à tous les ordres.

Malgré leurs succès indéniables, les théories de jauge actuelles ne sont pas exemptes de failles. Elles ne parviennent pas à expliquer certains phénomènes clés, tels que la nature de la matière noire, la masse des neutrinos ou l'unification de toutes les interactions fondamentales ... etc. Pour combler ces lacunes, de nombreuses théories BSM (Beyond the Standard Model) ont été développées. Parmi les exemples les plus connus, citons :

- Théories basées sur des groupes de symétrie plus larges comme $SU(5)$, $SO(10)$ et E_6 , ces théories visent à unifier les forces électromagnétique, faible et forte
- Modèle de Pati-Salam : propose une unification partielle de la symétrie électrofaible et de la symétrie de couleur.
- Modèles à symétrie gauche-droite : tentent d'expliquer la violation de parité dans les interactions faibles.
- Modèles supersymétriques.
- Modèles aux dimensions supplémentaires.
- ...

Ces théories BSM s'appuient sur une structure théorique solide basée sur la symétrie de jauge. Cependant, leur validation expérimentale reste un défi majeur. De nombreuses expériences ont été menées pour traquer les particules prédictes par ces théories, comme les bosons Z' et W' , les leptoquarks, les quarks vecteurs et les particules supersymétriques. Mais jusqu'à présent, aucune preuve concluante n'a été trouvée pour confirmer ou infirmer leur existence. La quête pour une théorie unifiée et complète de la physique fondamentale se poursuit. Les théories BSM constituent un champ de recherche actif et prometteur, avec le potentiel de révolutionner notre compréhension de l'univers.

Ce cours s'adresse aux étudiants en master de physique théorique et a été dispensé à l'université de Jijel entre 2017 et 2023. Il constitue une introduction accessible à tout étudiant, qu'il soit en master ou en doctorat, souhaitant découvrir le monde fascinant de la physique des particules et de la physique des hautes énergies. L'objectif principal de ce cours est de familiariser le lecteur avec les théories de jauge, en partant de leur construction mathématique jusqu'à leurs applications concrètes. Le cours couvrira les aspects suivants :

- **Construction des théories de jauge** : Introduction à la symétrie de jauge, lagrangien, champs de jauge et quantification.
- **Calcul précis** : Techniques de calcul pour les observables physiques, y compris le calcul au-delà de l'ordre dominant (NLO).
- **Études phénoménologiques** : Application des théories de jauge à l'étude de phénomènes physiques concrets.
- **Comparaison avec les données expérimentales** : Confrontation des prédictions théoriques aux résultats expérimentaux.

Le cours se focalisera sur les théories de jauge les plus connues : la théorie de l'interaction électromagnétique (QED), la théorie de l'interaction forte (QCD) et la théorie unifiée des interactions

électrofaibles (Modèle de **Glashow-Weinberg-Salam**). Ce cours offrira une base solide pour une compréhension approfondie des théories de jauge, qui constituent un pilier de la physique moderne.

Ce cours se compose des chapitres suivants :

- **Chapitre 1 : Théories de jauge classiques.** Ce chapitre présente une introduction générale aux théories de jauge. Il rappelle des concepts fondamentaux étudiés dans des modules antérieurs, cruciaux pour la compréhension des théories de jauge, tels que les théories quantiques des champs, les théories des groupes et le théorème de Noether.
- **Chapitre 2 : Électrodynamique quantique.** Ce chapitre se consacre à l'étude détaillée de l'électrodynamique quantique. Il débute par la forme du lagrangien invariant sous le groupe de jauge $U(1)$, suivi de sa quantification par la méthode canonique et de l'extraction des règles de Feynman à partir de la matrice S . Le calcul d'amplitudes de diffusion pour des processus $2 \rightarrow 2$ et de leurs sections efficaces associées est également effectué. Parmi les exemples étudiés, on trouve l'annihilation électron-positron en deux muons ($e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$), la diffusion Compton ($e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$) et le processus Drell-Yan ($q\bar{q} \rightarrow l^- l^+$), ... etc.
- **Chapitre 3 : Chromodynamique quantique.** Ce chapitre explore la chromodynamique quantique. Il introduit la notion de charge de couleur quantique et sa validation expérimentale. Le lagrangien classique de la théorie est construit et sa quantification par la méthode des intégrales fonctionnelles est discutée. Les concepts d'invariance BRST, d'algèbre $SU(3)$, de liberté asymptotique et de confinement sont abordés. Les règles de Feynman permettant le calcul des amplitudes de diffusion au niveau partonique sont dérivées. Le chapitre se termine par le calcul de processus tels que $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$, $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$ et $q\bar{q} \rightarrow gg$, ... etc.
- **Chapitre 4 : Le modèle standard.** Ce chapitre se concentre sur le modèle standard. Il débute par l'étude du modèle de Fermi et ses améliorations, menant à l'implémentation de la violation de parité dans la théorie et à la nécessité d'un boson de jauge massif responsable de l'interaction faible. Le modèle standard est ensuite construit en détail, en considérant d'abord une seule famille de leptons. Le lagrangien avant et après la brisure spontanée de symétrie est étudié, ainsi que le mécanisme de Higgs et la généralisation à d'autres familles de leptons et l'inclusion des quarks.
- **Chapitre 5 : Calculs de précision.** Ce chapitre se focalise sur les calculs de précision, notamment le calcul des corrections quantiques virtuelles à une boucle en QED et QCD et la renormalisation de ces théories.

M.S.Zidi-University-Jijel-Gauge-Theories

1. Théories de jauge classiques

Sommaire

1.1	Généralités	13
1.1.1	C'est quoi ? et Pourquoi les théories de jauge ?	13
1.1.2	Interactions fondamentales et théorie de jauge	14
1.2	Rappel de théories des champs	15
1.2.1	Formalisme lagrangien et lois de conservation	15
1.2.2	Dimensions naturelles	16
1.2.3	Symétries et lois de conservation	17
1.3	Rappel de théorie des groupes	19
1.3.1	Éléments de base	19
1.3.2	Groupes de Lie et algèbres de Lie	20
1.3.3	Exemples : $SU(2)$ et $SU(3)$	24
1.4	Théories de jauge	26
1.4.1	Invariance de Jauge en électrodynamique classique	27
1.4.2	Transformations de jauge abéliennes	28
1.4.3	Transformations de jauge non-abéliennes	32
1.4.4	Construction d'une théorie de jauge : modèle générique	36
1.5	Exercices et problèmes	37

Ce chapitre est une introduction générale aux théories de jauge. Dans la première partie, nous rappelons quelques notions dont nous avons besoin pour construire une théorie de jauge comme la théorie quantique des champs (QFT), le théorème de Noether et les lois de conservation, groupes de Lie et algèbres de Lie. Dans la deuxième partie, nous étudions l'invariance de jauge dans le cas abélien et non abélien et la construction de théories de jauge de type Yang-Mills. On conclut ce chapitre en résumant les étapes qu'on doit suivre pour construire une théorie de jauge quelconque [1, 2, 3].

1.1 Généralités

1.1.1 C'est quoi ? et Pourquoi les théories de jauge ?

Une théorie de jauge est une théorie quantique des champs basée sur un groupe de symétrie locale G (où $G \equiv U(1), SU(2), SU(3) \dots$ etc), c.à.d. le lagrangien de la théorie est invariant sous une

transformation de jauge locale. Ces théories sont très importantes en physique des particules car :

- Ces théories permettent de traiter les trois interactions fondamentales d'une manière très élégante et efficace.
 - Interaction électromagnétique (EM) → QED → basée sur le groupe de jauge $U(1)$.
 - Interaction forte (S) → QCD → basée sur le groupe de jauge $SU(3)$.
 - Interaction électrofaible (EW) → SM → basée sur le groupe de jauge $SU(2) \times U(1)$.
- L'invariance de jauge permet de construire un modèle générique quelque soit le groupe de jauge.
- Les théories de jauge sont renormalisables (les divergences ultraviolettes peuvent être éliminées par la redéfinition des paramètres de la théorie).
- Le calcul des observables physique est pratique (grâce aux diagrammes de Feynman).
- ... etc.

1.1.2 Interactions fondamentales et théorie de jauge

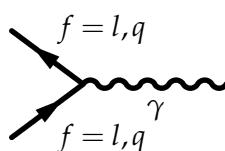
Le modèle standard est une théorie de jauge qui décrit l'interaction de toutes les particules élémentaires via les forces électromagnétique, forte et faible. Dans cette théorie, les particules élémentaires sont organisées comme suit :

Leptons :	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^+ \\ -\bar{\nu}_e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu^+ \\ -\bar{\nu}_\mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tau^+ \\ -\bar{\nu}_\tau \end{pmatrix}$
Quarks :	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{s} \\ \bar{c} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{b} \\ \bar{t} \end{pmatrix}$
Bosons de jauge :	W^\pm, Z, γ, g					
Boson de Higgs :	H					

Dans le contexte de la théorie quantique des champs, les fermions interagissent par l'échange (émission ou absorption) d'un boson de jauge qui joue le rôle de médiateur de l'interaction. Cette vision est schématisée par les vertex suivants :

Interaction électromagnétique EM :

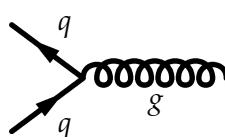
La charge électrique est le responsable de tout phénomène électromagnétique. L'électrodynamique quantique explique l'interaction entre les fermions, qui portent des charges électriques, par l'échange (émission ou absorption) d'un photon (γ), voir le vertex suivant :



Dans chaque vertex, on doit respecter toutes les lois de conservation (comme énergie-impulsion, charge électrique, spin . . . etc).

Interaction forte :

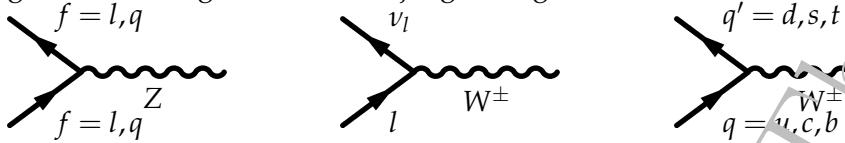
La charge de couleur est le responsable de l'interaction forte. La chromodynamique quantique explique l'interaction entre les quarks par l'échange (émission ou absorption) d'un gluon (g), voir le vertex suivant :



Comme la charge électrique (et les autres nombres quantiques), la charge de couleur doit être conservée dans chaque vertex.

Interaction faible W :

Il existe deux types d'interactions faible : (i) interaction à courant neutre où les fermions interagissent grâce à l'échange du boson de jauge neutre Z , (ii) interaction à courant chargé où les fermions interagissent grâce à l'échange du boson de jauge chargé W^\pm .



1.2 Rappel de théories des champs

Dans le formalisme lagrangien, on utilise la densité lagrangienne pour construire une théorie des champs (ou un modèle). La densité lagrangienne nous permet de voir l'invariance de Lorentz de manière explicite, ce qui n'est pas le cas du formalisme hamiltonien. Dans cette section, on donne un bref rappel des théories quantiques des champs.

1.2.1 Formalisme lagrangien et lois de conservation

Principe de moindre action, définition de Maupertuis (1744) : *L'action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace. Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'être suprême : lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible. Maupertuis (1744).*

En mécanique classique, l'action s'écrit :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt, \quad L \text{ est le lagrangien } (L = T - V) \quad (1.1)$$

où T et V sont, respectivement, les énergies cinétique et potentielle.

Les équations du mouvement sont obtenues à partir du principe d'Hamilton $\delta S = 0$ (principe de moindre action), ce qui implique que :

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (1.2)$$

cette équation est appelée *équation d'Euler-Lagrange*, elle nous donne les équations du mouvement d'un système physique possédant un lagrangien L .

Exercice 1. Montrer qu'on retrouve les mêmes équations du mouvement de l'oscillateur harmonique classique ($H = p^2/(2m) + (\omega^2/2)q^2$ et $L = p^2/(2m) - (\omega^2/2)q^2$) si on applique :

► Équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (1.3)$$

► Équations d'Hamilton-Jacobi :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.4)$$

► Principe fondamentale de la dynamique (de Newton) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \quad (1.5)$$

où $\vec{\gamma}$ est l'accélération.

En théorie classique des champs, l'action classique est définie par :

$$\bullet S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

où \mathcal{L} est la densité lagrangienne ($L = \int d^3x \mathcal{L}$), elle dépend des champs $\phi_i(x)$ et leurs dérivées $\partial_\mu \phi_i(x)$. Les équations d'Euler-Lagrange correspondantes sont données par :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i(x))} = 0 \quad (1.7)$$

ce sont les équations du mouvement des champs ϕ_i (pour $i = 1, 2, \dots$).

Exercice 2. Dériver les équations du mouvement pour les densités lagrangiennes suivantes :

$$\mathcal{L}_K = (1/2)[(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^2] \quad \phi \text{ est un champ scalaire de spin 0} \quad (1.8)$$

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi(x) \quad \psi \text{ est un champ spinoriel de spin 1/2} \quad (1.9)$$

$$\mathcal{L}_G = -(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad A_\mu \text{ est un champ vecteur de spin 1} \quad (1.10)$$

Solution :

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad \text{Eq. de Klein-Gordon} \quad (1.11)$$

$$(i\gamma^\mu + m)\psi(x) = 0 \quad \text{Eq. de Dirac} \quad (1.12)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \text{Eq. mvt du photon libre} \quad (1.13)$$

avec $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ et $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

1.2.2 Dimensions naturelles

Dans le système d'unités naturelles ou de masse, on pose $\hbar = c = 1$ et on exprime la dimension de toutes les quantités physiques (comme l'énergie, l'impulsion, le temps, l'espace, les champs et la section efficace ... etc) en fonction de la masse. Dans cette approche, toute quantité physique G est exprimée sous la forme : $G \equiv m^\alpha$, où la puissance α est la dimension dans le système d'unités naturelles de la quantité G , on écrit $[G] = \alpha$. Si $G = G_1 G_2$ avec $G_1 \equiv m^{\alpha_1}$ et $G_2 \equiv m^{\alpha_2}$, alors :

$$[G] = [G_1] + [G_2] = \alpha_1 + \alpha_2 \equiv \alpha \quad (1.14)$$

Dimension de l'énergie et de l'impulsion : la relation reliant l'énergie et l'impulsion d'une particule de masse m (pour $c = 1$) est,

$$E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 \quad (1.15)$$

d'après cette relation, on voit que E , $|\vec{p}|$ et m ont les mêmes dimensions. Donc,

$$[E] = [|\vec{p}|] = [m] = 1 \quad (1.16)$$

Dimension de l'espace et le temps : les deux versions de la relation d'incertitude d'Heisenberg nous permettent de calculer la dimension de l'espace et du temps. Pour $\hbar = 1$, on a :

$$\Delta x \Delta p \geq 1/2 \quad \Delta E \Delta t \geq 1/2. \quad (1.17)$$

En terme de dimension, on a :

$$[\Delta x] + [\Delta p] \stackrel{\equiv 1}{=} 0 \quad [\Delta E] + [\Delta t] \stackrel{\equiv 1}{=} 0. \quad (1.18)$$

donc,

$$[\Delta x] = [x] = -1 \quad [\Delta t] = [t] = -1 \quad (1.19)$$

Dimension de la densité lagrangienne : l'action est, par définition, sans dimension alors,

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad 0 = [S] = 4 \times [x] + [\mathcal{L}] \stackrel{\equiv 4 \times (-1)}{=} 0 \quad (1.20)$$

donc,

$$[\mathcal{L}] = 4 \quad (1.21)$$

Dimension des champs ϕ , ψ et A_μ : d'après le dernier terme de \mathcal{L}_K , on a

$$4 = [\mathcal{L}_K] = [m^2\phi^2] = [m^2] + [\phi^2] = 2[m] + 2[\phi] \stackrel{\equiv 1}{=} 1 \quad (1.22)$$

donc $[\phi] = 1$. Concernant la densité lagrangienne de Dirac \mathcal{L}_D , on a

$$4 = [\mathcal{L}_D] = [m\bar{\psi}\psi] = [m] + 2[\psi] \stackrel{\equiv 1}{=} 1 \quad (1.23)$$

donc, $[\psi] = [\bar{\psi}] = 3/2$. De la même manière, on montre que $[F_{\mu\nu}] = 2$ et $[\mathcal{A}_\mu] = 1$.

Exercice 3. Montrer que les dimensions de la constante de structure fine α , la charge électrique e et la section efficace σ sont donnés par,

$$[\alpha] = 0 \quad [e] = 0 \quad [\sigma] = -2 \quad (1.24)$$

avec $\alpha = e^2/(4\pi)$.

1.2.3 Symétries et lois de conservation

Il existe plusieurs types de symétries : continue vs discrète, externe vs interne, globale vs locale. Si la densité lagrangienne est invariante sous une transformation (symétrique), alors les équations du mouvement doivent l'être. Par exemple, en théories classiques des champs (et la physique en général), on exige l'invariance de Lorentz du lagrangien, car cela implique que les équations du mouvement sont invariantes sous cette transformation¹.

Théorème de Noether :

Toute transformation continue de symétrie conduit à une loi de conservation ou pour toute symétrie différentielle générée par une action locale correspond un courant conservé.

Considérons une théorie des champs impliquant un seul champ scalaire ϕ , alors :

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) \quad S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}. \quad (1.25)$$

On suppose que l'action est inchangée (invariante) par une transformation de coordonnées :

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi(x') &= \phi(x) + \delta\phi(x) \\ \mathcal{L}(x') &= \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Le principe de moindre action se traduit par :

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) - \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(x') \equiv 0 \quad (1.27)$$

On montre que

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.28)$$

avec J^μ est le courant de Noether, il est donné par :

$$J_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi(x))} \delta\phi(x) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi(x))} \partial_\nu\phi(x) - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \right) \delta x^\nu. \quad (1.29)$$

1. c'est pourquoi on préfère utiliser le formalisme lagrangien en théorie des champs.

On définit la charge de Noether par :

$$Q = \int d^3x J^0 \quad Q \text{ est conservée, c.à.d.} \quad \frac{dQ}{dx_0} = 0. \quad (1.30)$$

En électromagnétisme, J_0 correspond à la densité de la charge électrique ($J_0 \equiv \rho$ pour $c \equiv 1$). Alors,

$$Q = \int d^3x J^0 = \int d^3x \rho = e \equiv \text{charge électrique.} \quad (1.31)$$

Invariance sous translation :

Considérons la transformation suivante :

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu \quad (1.32)$$

où a_μ est un déplacement infinitésimal dans l'espace-temps ($a_\mu = \varepsilon x_\mu \rightarrow 0$). On varie la densité lagrangienne par rapport à x_μ , on obtient :

$$\delta \mathcal{L} = \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} \delta x^\mu = \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} a^\mu \equiv a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}. \quad (1.33)$$

On varie la densité lagrangienne par rapport à ϕ et $\partial_\mu \phi$, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \\ &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Pour obtenir la dernière ligne, on a utilisé les équations d'Euler-Lagrange (1.7). La variation de ϕ et $\partial_\mu \phi$ sont données par² :

$$\begin{cases} \delta \phi = \phi(x) - \phi(x') = a^\mu \partial_\mu \phi(x) \\ \delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\nu \phi(x) - \partial_\nu \phi(x') = a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi(x) \end{cases} \quad (1.35)$$

Substituant (1.35) dans (1.34), on obtient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} a^\mu \partial_\mu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi \\ &= a^\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \phi \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

On soustrait (1.33) de (1.36), on obtient :

$$a_\mu \partial_\nu \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] = 0 \quad (1.37)$$

La loi de conservation, dans ce cas, est

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{avec} \quad T^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (1.38)$$

où $T^{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion.

On peut facilement montrer que la densité hamiltonienne et l'hamiltonien sont donnés par :

$$T^{00} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \right) \partial^0 \phi - \mathcal{L} \equiv \mathcal{H} \quad H = \int d^3x T^{00} \quad (1.39)$$

2. On rappelle que la dérivé d'une fonction $\phi(x)$ est définie par : $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x') - \phi(x)}{x' - x}$. Donc, $\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta x$.

Invariance par rotation :

Considérons la transformation de Lorentz (rotation dans l'espace-temps),

$$\begin{cases} x'_\mu = x_\mu + \varepsilon_{\mu\nu} x^\nu. \\ \phi'(x') = \phi(x) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \phi(x). \end{cases} \quad (1.40)$$

où $\varepsilon_{\mu\nu}$ et $\Sigma^{\mu\nu}$ sont des tenseurs antisymétriques ($\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ et $\Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu}$).

Exercice 4. Montrer que

$$\partial_\lambda M^{\lambda\mu\nu} = 0 \quad (1.41)$$

avec

$$M^{\lambda\mu\nu} = x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \pi)} \Sigma^{\mu\nu} \phi \quad (1.42)$$

On définit la quantité $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ par $M^0{}^{\mu\nu}$ ($\mathcal{M}^{\mu\nu} = M^0{}^{\mu\nu}$). La quantité conservé dans ce cas est le moment cinétique, il est défini par :

$$\mathbf{M}^{\mu\nu} = \int d^3x \mathcal{M}^{\mu\nu} \quad \frac{d\mathbf{M}^{\mu\nu}}{dt} = 0. \quad (1.43)$$

1.3 Rappel de théorie des groupes

On peut considérer une symétrie comme une opération (transformation) qui laisse un système physique invariant (rotation par exemple). L'ensemble de ces transformations $\{R\} \equiv \{R_1, R_2, \dots\}$ vérifient les propriétés suivantes :

- **Fermeture** : si R_i et $R_j \in \{R\}$ (c.à.d. opérateurs de la même symétrie), alors l'opérateur $R_k = R_i R_j \in \{R\}$ (c.à.d. R_k aussi opérateur de la même symétrie).
- **Identité** : il existe une opération de symétrie $I : IR_i = R_i I$.
- **Inverse** : pour chaque opération de symétrie R_i , il existe l'opération de symétrie inverse R_i^{-1} ($R_i R_i^{-1} = R_i^{-1} R_i = 1$).
- **Associativité** : $R_i(R_j R_k) = (R_i R_j) R_k$.

On voit que, l'ensemble des opérations $\{R\}$ forment un groupe. Donc, on peut utiliser la théorie des groupes pour étudier systématiquement les symétries d'un système.

1.3.1 Éléments de base

Définition d'un groupe :

Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de multiplication interne ". ", qui a les propriétés suivantes :

- Si g_1 et $g_2 \in G$, alors $g_1 \cdot g_2 \in G$.
- L'élément neutre $e : e \cdot g = g \cdot e = g, \forall g \in G$.
- Le symétrique : chaque élément $g \in G$ a un inverse $g^{-1} \in G$, tel que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.
- L'associativité : $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3), \forall x, y, z \in G$.

Représentations d'un groupe :

Une *représentation* d'un groupe G est une application linéaire D des éléments de G dans un ensemble d'opérateurs linéaires qui vérifient les propriétés suivantes :

- $D(e) = 1$, où 1 est l'opérateur identité.
- $D(g_1) \cdot D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2)$.

Propriétés des groupes :

- Un groupe est *fini* si le nombre de ses éléments est fini (sinon, il est *infini*).
- L'*ordre* d'un groupe est le nombre d'élément d'un groupe.
- Un groupe est *abélien* si sa loi de multiplication est *commutative* ($g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$).
- La *dimension* d'une représentation est la dimension de l'espace où elle agit.

1.3.2 Groupes de Lie et algèbres de Lie

Un groupe de Lie (ou un groupe continu et analytique) est un groupe d'éléments $G(\alpha)$ qui dépendent d'un nombre fini de paramètres continus α_i , tel que :

$$G(\alpha_1) \cdot G(\alpha_2) = G(\alpha_3). \quad (1.44)$$

où α_1 , α_2 et α_3 sont des valeurs particulières du paramètre α_i .

En général, chaque élément d'un groupe de Lie compact s'écrit :

$$U(\vec{\alpha}) = e^{i\alpha_a X_a} \equiv e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{X}}. \quad (1.45)$$

α_a sont les paramètres continus du groupe et X_a sont des opérateurs linéaires hermitiens, appelés générateurs du groupe. Ils sont donnés par : $X_a = -i \frac{\partial U}{\partial \alpha_a} \Big|_{\vec{\alpha}=\vec{0}}$.

Exemple : groupe des matrices de rotation plane

L'opérateur de rotation dans le plan par un angle θ s'écrit,

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

On voit que l'ensemble de ces transformations $\{R(\theta)\}$ forme un groupe de Lie car : (i) l'inverse de $R(\theta)$ est $R(-\theta)$, (ii) le produit $R(\theta_1)R(\theta_2)$ est donné par l'élément $R(\theta_1 + \theta_2)$ qui lui aussi représente une rotation par un angle $\theta_1 + \theta_2$. Ce groupe est appelé le groupe $SO(2, \mathbb{R})$.

Différents types de groupes de Lie :

- Groupes de Lie réels (ou classique) comme : $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^*, SO(n, \mathbb{R}), SU(n) \dots$ etc.
- Groupes de Lie complexes comme : $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^*, SO(n, \mathbb{C}) \dots$ etc.
- Groupes de Lie quaternioniques comme \mathbb{H}^* .
- Groupes de Lie exceptionnels comme E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 .

Principaux groupes de lie (en physique des particules) :

- $O(n)$ est le groupe orthogonal sur \mathbb{R} d'ordre n , c.à.d. le groupe multiplicatif des matrices $n \times n$ réelles orthogonales (vérifiant ${}^t M M = I_n$), par exemple : $O(1) = \{1, -1\}$.
- $SO(n)$ est le groupe spécial orthogonal sur \mathbb{R} d'ordre n , c.à.d. le groupe multiplicatif des matrices $n \times n$ réelles orthogonales et de déterminant égal à 1 (${}^t M M = I_n$ et $\det M = 1$), par exemple : $SO(1) = \{1\}$.
- $U(n)$ est le groupe unitaire sur \mathbb{C} d'ordre n , c.à.d. le groupe multiplicatif des matrices $n \times n$ complexes unitaires (vérifiant $M^* M = I_n$), par exemple $U(1)$ est le cercle unité complexe.
- $SU(n)$ est le groupe spécial unitaire sur \mathbb{C} d'ordre n , c.à.d. le groupe multiplicatif des matrices $n \times n$ complexes unitaires et de déterminant égal à 1 ($M^* M = I_n$ et $\det M = 1$), par exemple $U(1) \times SU(2)$ théorie électrofaible, $SU(3)$ la chromodynamique quantique.

Exemples physiques :

- La théorie de jauge classique $U(1)$, qui s'identifie à la théorie électromagnétique de Maxwell.
- Le modèle électro-faible de Glashow, Salam et Weinberg est basé sur le groupe $U(1) \times SU(2)$, il décrit de façon unifiée l'électromagnétisme et l'interaction nucléaire faible.
- La chromodynamique quantique est basée sur le groupe $SU(3)$, il décrit l'interaction nucléaire forte entre les quarks et les gluons.

Algèbre de Lie

Les éléments $\alpha_a X_a$ constituent un espace vectoriel et X_a forme une base de cet espace vectoriel. Les opérateurs X_a sont les générateurs du groupe. Ces générateurs vérifient la relation de commutation suivante :

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c. \quad (1.47)$$

Donc, le commutateur de deux générateurs du groupe s'écrit comme une combinaison linéaire des générateurs du groupe. Cette relation de commutation est appelé *algèbre de Lie*. Le coefficient f_{abc} s'appelle la constante de structure, il est anti-symétrique par l'échange de deux indices³ ($f_{abc} = -f_{acb}$). Pour le groupe $SU(N)$, on a :

$$f_{abc} = -2i \text{Tr}[[X_a, X_b]X_c]. \quad (1.49)$$

Les générateurs du groupe vérifient l'identité de Jacobi suivante,

$$[[X_a, X_b], X_c] + [[X_b, X_c], X_a] + [[X_c, X_a], X_b] = 0. \quad (1.50)$$

ce qui conduit à,

$$f_{bcd}f_{adc} + f_{abd}f_{cde} + f_{cad}f_{bde} = 0. \quad (1.51)$$

Les générateurs vérifient la relation d'anti-commutation suivante :

$$\{X_a, X_b\} = \frac{1}{N} \delta_{ab} + d_{abc} X_c. \quad (1.52)$$

Le paramètre d_{abc} est symétrique par l'échange de deux indices. Pour le groupe $SU(N)$, il est donné par :

$$d_{abc} = 2 \text{Tr}[\{X_a, X_b\}X_c]. \quad (1.53)$$

Par exemple, les relations de commutation entre les opérateurs du moment angulaire L (cours de mécanique quantique) définissent une algèbre de Lie du groupe $SU(2)$ ou $SO(3)$ (car ces deux groupes sont isomorphes) :

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y. \quad (1.54)$$

$$L_x = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_z = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

Exercice 5.

- (1) Montrer que les générateurs L_x , L_y et L_z vérifient l'identité de Jacobi.
- (2) Montrer que les générateurs L_x , L_y et L_z forment une base d'un espace vectoriel.
- (3) Calculer toutes les constantes de structure associées aux générateurs L_x , L_y et L_z .
- (4) Montrer que L_x , L_y et L_z génèrent la représentation adjointe de $SU(2)$.

3. Car les commutateurs vérifient,

$$[A, B] = -[B, A]. \quad (1.48)$$

Solution de l'exercice :

(4) Les générateurs de $SU(2)$ dans la représentation adjointe sont définis par : $(I_i)_{jk} = if_{ijk}$, par exemple le générateur I_1 s'écrit.

$$I_1 = i \begin{pmatrix} f_{111} & f_{112} & f_{113} \\ f_{121} & f_{122} & f_{123} \\ f_{131} & f_{132} & f_{133} \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

On utilise la relation (1.47), on peut montrer :

$$\begin{cases} f_{ijk} = 0 \\ f_{123} = 1 = -f_{132} = -f_{321} = -f_{213} \end{cases} \quad \text{pour } i = j, i = k \text{ ou } j = k \quad (1.57)$$

on trouve,

$$I_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad I_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

On voit que $L_x = -\hbar I_1$, $L_y = -\hbar I_2$ et $L_z = -\hbar I_3$, donc L_x , L_y et L_z génèrent la représentation adjointe du groupe $SU(2)$.

Représentations d'une algèbre de Lie :

Une représentation d'une algèbre de Lie est une application de cet algèbre dans un ensemble d'opérateurs (matrices par exemple) linéaires d'un espace vectoriel :

$$D : X_i \longrightarrow D(X_i). \quad (1.59)$$

Ces opérateurs doivent satisfaire :

- Linéarité : $D(\alpha X_i + \beta X_j) = \alpha D(X_i) + \beta D(X_j)$.
- Homomorphe à l'algèbre de Lie : $D([X_i, X_j]) = [D(X_i), D(X_j)]$.

Représentation adjointe (ou régulière) :

Si on définit un ensemble de matrices T^a avec les éléments

$$(T^a)_{bc} = -if_{abc}. \quad (1.60)$$

Pour le groupe $SU(N)$, on peut montrer que

$$[T^a, T^b] = if_{abc} T^c. \quad (1.61)$$

$$\text{Tr}[T^a T^b T^c] = (N/2)if_{abc}. \quad (1.62)$$

Dans cette représentation, les constantes de structure eux même génèrent la représentation de l'algèbre de Lie, voir eq. (1.60). Cette représentation s'appelle la représentation *adjointe* ou la représentation régulière de l'algèbre de Lie.

Classification des groupes de Lie par Cartan :

Selon la classification de Cartan, il existe quatre variétés d'algèbres de Lie simples :

- **Algèbre A_n** : qui génère le groupe $SU(n+1)$, qui est le groupe de transformations qui laisse invariants les produits scalaires de vecteurs dans un espace vectoriel complexe à $(n+1)$ dimensions.
- **Algèbre B_n** : qui génère le groupe $SO(2n+1)$, qui est le groupe de transformations qui laisse invariants les produits scalaires de vecteurs dans un espace vectoriel réel à $(2n+1)$ dimensions.
- **Algèbre C_n** : qui génère le groupe $Sp(2n)$, le groupe de transformations qui laisse invariante une forme quadratique antisymétrique dans un espace vectoriel réel à $2n$ dimensions.

- **Algèbre D_n** : qui génère le groupe $SO(2n)$, qui est le groupe de transformations qui laisse invariants les produits scalaires de vecteurs dans un espace vectoriel réel à $(2n)$ dimensions. Cette algèbre est analogue à B_n mais a une structure de spineur et de racine différentes.
- **Algèbres exceptionnelles** : G_2, F_4, E_6, E_7 et E_8 où les indices désignent les rangs.

Groupe	Rang	Ordre	Representation complexe
$SU(n)$	$n - 1$	$n^2 - 1$	$n \geq 3$
$SO(2n)$	n	$n(2n - 1)$	$n = 2l + 3, l \geq 1$
$SO(2n + 1)$	n	$n(2n + 1)$	✗
$Sp(2n)$	n	$n(2n + 1)$	✗
G_2	2	14	✗
F_4	4	52	✗
E_6	6	78	✓
E_7	7	133	✗
E_8	8	247	✗

- **Générateur de Cartan et le rang** : les générateurs de Cartan sont des générateurs diagonalisables au même temps, ils vérifient

$$[X_i, X_j] = 0 \quad (1.63)$$

Le nombre de ces générateurs correspond au rang du groupe. Par exemple, $SU(n)$ possède $n - 1$ générateur de Cartan donc son rang est $n - 1$. Les générateur de Cartan constituent une sous algèbre appelée la sous-algèbre de Cartan.

- **Représentation complexe vs réelle** : Une représentation est réelle si les générateurs X_i et $-X_i^*$ sont équivalents c.à.d. il existe une transformation unitaire V ($VV^\dagger = 1$)

$$-X_i^* = V X_i V^\dagger \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.64)$$

Considérons par exemple le générateur de $SO(2)$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad -\sigma_2^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma_2 \quad (1.65)$$

donc cette représentation est réelle.

Sous groupes :

On dit que H est un sous-groupe de (G, \cdot) si H est un sous-ensemble de G possédant une structure de groupe. Voici quelques exemple :

$$\begin{aligned} SU(p+q) &\supset SU(p) \otimes SU(q) \otimes U(1) \\ SU(pq) &\supset SU(p) \otimes SU(q) \\ SO(2n) &\supset SU(n) \\ Sp(2n) &\supset SU(n) \\ SO(2n+1) &\supset SO(2n) \\ SO(2n) &\supset SO(2n-1) \end{aligned} \quad (1.66)$$

Rang	Groupe	sous-groupe
1	$SU(2) \cong \{SO(3); Sp(2)\}$	$U(1)$
2	$SU(3)$ $Sp(4) \cong \{SO(5)\}$	$SU(2) \otimes U(1); SU(2)$ $SU(2) \otimes SU(2); SU(2) \otimes U(1); SU(2)$
3	$SU(4)$ $SO(7)$ $Sp(6)$ $SO(6)$	$SU(3) \otimes U(1); SU(2) \otimes SU(2) \otimes U(1); SU(2) \otimes SU(2); Sp(4)$ $SU(4); SU(2) \otimes SU(2) \otimes SU(2); Sp(4) \otimes U(1); G_2$ $SU(3) \otimes U(1); SU(2) \otimes Sp(4); SU(2); SU(2) \otimes SU(2)$ $SU(4)$
4	$SU(5)$ $SO(9)$ $Sp(8)$ $SO(8)$	$SU(4) \otimes U(1); SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1); Sp(4)$ $SO(8); SU(2) \otimes SU(2) \otimes Sp(4); SU(4) \otimes SU(2); SO(7) \otimes U(1)$ $SU(2); SU(2) \otimes SU(2)$ $SU(4) \otimes U(1); SU(2) \otimes Sp(6); Sp(4) \otimes Sp(4)$ $SU(2); SU(2) \otimes SU(2) \otimes SU(2)$ $SU(2) \otimes SU(2) \otimes SU(2) \otimes SU(2); SU(4) \otimes U(1)$ $SU(3); SO(7); SU(2) \otimes Sp(4)$

1.3.3 Exemples : $SU(2)$ et $SU(3)$

Symétries $U(1)$:

Si on choisit dans la formule (1.45) un seul paramètre α (réel et indépendant des coordonnées) et un seul générateur X (hermitien $X = X^\dagger$), les éléments de ce groupe de Lie s'écrivent :

$$U(\alpha) = e^{i\alpha X}, \quad U(\alpha)^\dagger = e^{-i\alpha X}, \quad U(\alpha)U(\alpha)^\dagger = 1. \quad (1.67)$$

L'invariance sous cette transformation (ou transformation de phase) implique la symétrie sous le groupe $U(1)$.

Symétries $SU(2)$:

Considérons la transformation

$$\psi' = U\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

où U est la matrice unitaire 2×2 du déterminant égal à 1. Traditionnellement, la matrice U est paramétrisée de la manière suivante :

$$U = e^{i\alpha_i \sigma_j / 2} \quad (1.69)$$

où α_i sont les paramètres continus et $\sigma_j / 2$ sont les générateurs du groupe.

$$\text{Det}(U) = e^{\text{Tr}(i\alpha_i \sigma_j / 2)} = e^0 = 1. \quad (1.70)$$

donc les traces des matrices σ_i sont nuls ($\text{Tr}(\sigma_i) = 0$). Car

$$\begin{aligned} U^{-1} &= e^{-i\alpha_j \sigma_j / 2}, & U^\dagger &= e^{-i\alpha_j \sigma_j^\dagger / 2}. \\ \text{et } U^\dagger U &= 1 = UU^{-1}, & \Rightarrow U^\dagger &= U^{-1} \Rightarrow \sigma_i^\dagger = \sigma_i. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Si les matrices σ_i sont 2×2 , les matrices qui vérifient les conditions de $SU(2)$ sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

Le commutateur de deux matrices de Pauli ne s'annule pas

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}. \quad (1.73)$$

donc le groupe est non-abélien. Le commutateur (1.73) définit l'algèbre de lie du groupe $SU(2)$.

En général, on note les générateurs du groupe par J_i avec

$$J_1 = \sigma_1/2, \quad J_2 = \sigma_2/2, \quad J_3 = \sigma_3/2. \quad (1.74)$$

Donc

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ikl}J_l. \quad (1.75)$$

On peut monter que

$$J|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle, \quad (1.76)$$

$$J_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle, \quad (1.77)$$

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle \quad (1.78)$$

avec

$$J_{\pm} = J_1 i \pm J_2, \quad 2j \in \mathbb{N}, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, +j, \quad (1.79)$$

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \quad [J^2, J_3] = 0, \quad [J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}. \quad (1.80)$$

J peut être l'opérateur de spin et J_3 est sa projection sur l'axe (oz) (J^2 est l'opérateur Casimir).

Représentation à 2-dimensions de $SU(2)$:

Une particule de spin-1/2 peut avoir deux états de spin (deux projections sur l'axe (oz)), donc, on peut représenter ces deux états par les vecteurs :

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.81)$$

On peut facilement montrer que

$$J_3 \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = +\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, \quad J_3 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (1.82)$$

Représentation à 3-dimensions de $SU(2)$:

Une particule d'isospin 1 (les pions par exemple), peut avoir trois états de d'isospin (projection sur l'axe (oz)), $I_3 = -1, 0, +1$. On peut représenter ses états par les vecteurs :

$$\left| 1, +1 \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| 1, 0 \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| 1, -1 \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.83)$$

les générateurs dans ce cas sont

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.84)$$

Exercice 6.

- (1) Montrer que les générateurs I_1 , I_2 et I_3 génèrent le groupe $SU(2)$
- (2) Montrer que les générateurs I_1 , I_2 et I_3 vérifient l'identité de Jacobi.

Symétries $SU(3)$:

$SU(3)$ est le groupe des matrices 3×3 unitaires de déterminant égal à 1. Un élément de ce groupe s'écrit

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = e^{i\alpha_a X_a}. \quad (1.85)$$

Les matrices 3×3 qui vérifient les conditions de $SU(3)$ sont les matrices de Gell-Mann, elles sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.86)$$

Traditionnellement, on définit les générateurs de $SU(3)$ comme

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a, \quad a = 1, \dots, 8. \quad (1.87)$$

avec $\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}/2$.

Les générateurs de Cartan (diagonalisables au même temps) sont T_3 et T_8 . L'algèbre de Lie de $SU(3)$ est défini par le commutateur

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c. \quad (1.88)$$

Exercice 7. (1) Montrer que les générateurs X_a pour $a = 1, 2, \dots, 8$ vérifient l'identité de Jacobi.

(2) Calculer les générateurs de $SU(3)$ dans la représentation adjointe.

Solution : (2) Les générateurs dans la représentation adjointe. Les paramètres f_{abc} non nuls sont les suivants :

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 & f_{147} &= 1/2 & f_{156} &= -1/2 \\ f_{246} &= 1/2 & f_{257} &= 1/2 & f_{345} &= 1/2 \\ f_{367} &= -1/2 & f_{458} &= \sqrt{3}/2 & f_{678} &= \sqrt{3}/2 \end{aligned} \quad (1.89)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad T_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

1.4 Théories de jauge

Une théorie de jauge est une théorie des champs basée sur un groupe de symétrie locale, appelé groupe de jauge, définissant une *invariance de jauge*; ou en d'autres termes c'est une théorie dont la densité lagrangienne est invariante sous les groupes de transformations continues. L'exemple le plus simple d'une théorie de jauge est l'électrodynamique classique de Maxwell. Les théories de jauge peuvent être *abélienne* ou *non-abélienne* tout dépend de la commutativité du groupe de transformation. Dans ce cours, on va étudier les trois théories de jauge suivantes :

- QED : ou l'électrodynamique quantique (basée sur le groupe $U(1)$).
- QCD : ou la chromodynamique quantique (basée sur le groupe $SU(3)$).
- SM : ou le modèle standard (basé sur le groupe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$).

1.4.1 Invariance de Jauge en électrodynamique classique

Les équations de Maxwell sont invariantes sous les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}\phi' &\longrightarrow \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \\ \vec{A}' &\longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f\end{aligned}\quad (1.91)$$

où \vec{A} est le potentiel vecteur et ϕ est le potentiel scalaire. On appelle cette transformation, *transformation de jauge*. On rappelle que les équations de Maxwell sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.92)$$

où \vec{E} est le champ électrique, \vec{B} est le champ magnétique, ρ est la densité de la charge électrique et \vec{j} est la densité du courant électrique. En fonction des potentiels scalaire et vecteur, les champs électrique et magnétique s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}\quad (1.93)$$

Exercice 8 :

- (1) Montrer que les équations de Maxwell sont invariantes sous la transformation de jauge (1.91).
- (2) Montrer que ρ et \vec{j} vérifient l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.94)$$

quel est le sens physique de cette équation ?

- (3) Dans la notation quadridimensionnelle, le 4-potentiel est donné par : $A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$.

Montrer qu'on peut écrire la transformation de jauge (1.91) comme suit

$$A'_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu f \quad (1.95)$$

- (4) Dans la notation quadridimensionnelle, le 4-courant est donné par : $J^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$. Que devient l'équation de continuité dans cette notation ?

Rappelons que le tenseur de Maxwell est donné par :

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ +E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ +E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (1.96)$$

Alors, les deux dernières équations de Maxwell peuvent s'écrire comme suit :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \quad (1.97)$$

Le courant de Noether J_μ est conservé, alors

$$\partial_\nu J^\nu = 0 = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \quad (1.98)$$

1.4.2 Transformations de jauge abéliennes

Les transformations de jauge abéliennes sont des opérations commutatives, elle forme un groupe de Lie abélien. On distingue deux types de transformations, globale qui ne dépend pas des coordonnées et locale qui dépend des coordonnées de l'espace-temps.

Symétrie de jauge globale :

La symétrie associe à la conservation de la charge électrique, par exemple, est appelée symétrie de jauge globale. Elle est définie par la transformation de phase

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) = e^{-iq_i\theta} \phi_i(x) \quad (1.99)$$

où q_i désigne la charge électrique en unité e (e est la charge électrique du positron) et θ est un paramètre arbitraire. Car le paramètre θ est indépendant de la variable x , alors la dérivé du champ ϕ_i se transforme comme le champ lui-même :

$$\partial_\mu \phi_i(x) \rightarrow \partial_\mu \phi'_i(x) = e^{-iq_i\theta} \partial_\mu \phi_i(x) \quad (1.100)$$

En général, le densité lagrangienne est construite par les champs ϕ_i , leurs conjugués hermitiens ϕ_i^\dagger et leurs dérivées. Car la charge est conservée dans chaque terme du lagrangien, chaque terme impliquant un champ donné doit être multiplier par son conjugués hermitien. Alors, \mathcal{L} est invariant sous la transformation Eq. (1.99), ou d'une autre manière, le lagrangien est indépendant de la phase du champ ϕ_i , c.à.d.

$$\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \mathcal{L}(\phi'_i, \partial_\mu \phi'_i) \quad (1.101)$$

Pour θ infinitésimal, la variation du champ est donné par

$$\delta \phi_i(x) = \phi'_i(x) - \phi_i(x) \rightarrow -i\theta q_i \phi_i(x) \quad (1.102)$$

Sous cette transformation, la variation du lagrangien doit être nulles et l'équation eq. (1.101) devient

$$-i\theta \partial_\mu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} q_i \phi_i \right] = 0. \quad (1.103)$$

Cette équation montre que le courant J_μ associé à cette transformation de jauge est conservé, c.à.d.

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.104)$$

$$J^\mu = -iq_i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi_i)} \phi_i \quad (1.105)$$

où J^μ est appelé *le courant de Noether*.

La transformation de jauge définie ci-dessus forme un groupe car les éléments $e^{-iq_i\theta}$ la multiplication (la loi interne du groupe) vérifient les quatre conditions d'un groupe : (1) *Fermeture* (2) *Associativité* (3) *L'existence d'un élément neutre* et (4) *L'existence de l'inverse de chaque élément*. Il est Abélien car ces transformations de jauge commutent entre elles. Ces transformations sont définies par seulement le paramètre θ , donc le groupe est uni-dimensionnelle. Le groupe $U(1)$ est le groupe transformations unitaires à une dimension.

Les charges q_i sont les valeurs propres d'un opérateur, appelé opérateur de charge électrique qui est donné par

$$\hat{Q} = \int d^3x J_0(x, t) \quad (1.106)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{Q} = 0 \quad (1.107)$$

cet opérateur est le seul générateur de $U(1)$.

Exercice 9 : densité lagrangienne de Dirac

(1) Montrer que la densité lagrangienne de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i \not{d} - m)\psi \quad (1.108)$$

est invariante sous la transformation $\psi' = e^{-iq\theta}\psi$.

(2) Montrer que le courant et la charge de Noether associé à ce lagrangien sont donné par :

$$\begin{cases} J^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ Q = q \end{cases} \quad (1.109)$$

(3) Montrer que l'ensemble des transformations $\{e^{-iq\theta}\}$ forme le groupe $U(1)$.

Solution de l'exercice :

(1) Invariance sous transformation de jauge globale (θ ne dépend pas de x) :

$$\mathcal{L}'_D = \bar{\psi}'(i \not{d} - m)\psi' = \bar{\psi}e^{+iq\theta}(i \not{d} - m)e^{-iq\theta}\psi = \bar{\psi}(i \not{d} - m)\psi \equiv \mathcal{L}_D \quad (1.110)$$

(2) **Courant et charge de Noether :** La densité lagrangienne de Dirac est une fonction de $\mathcal{L}_D \equiv \mathcal{L}_D(\psi, \bar{\psi}\partial_\mu\psi)$. Donc, la variation $\delta\mathcal{L}_D$ de cette dernière est,

$$\delta\mathcal{L}_D = \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\bar{\psi}}\delta\bar{\psi} = 0 \quad (1.111)$$

On rappelle que $\delta\mathcal{L}_D = 0$ car \mathcal{L}_D est invariant de jauge, c.à.d. $\delta\mathcal{L}_D = \mathcal{L}'_D - \mathcal{L}_D = 0$, voir eq.(1.110). En plus, on a

$$\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\bar{\psi}} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \text{équation de Dirac} \quad (1.112)$$

L'équation d'Euler-Lagrange du champ ψ nous donne,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\psi} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)} \quad (1.113)$$

On remplace les eqs. (1.112), (1.113) et $\delta(\partial_\mu\psi) = \partial_\mu(\delta\psi)$ dans eq. (1.111), on trouve

$$\delta\mathcal{L}_D = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)} \delta\psi \right) = 0 \quad (1.114)$$

Dans ce cas, la transformation infinitésimale donne : $\delta\psi = \psi' - \psi = -iq\theta\psi$. Alors,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_D &= \theta\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)} (-iq\psi) \right) \\ &= \alpha\partial_\mu J^\mu = 0 \end{aligned} \quad (1.115)$$

où J^μ est le courant de Noether, il est donné par

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)} (-iq\psi) \\ &= q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \quad (1.116)$$

La charge de Noether dans ce cas est,

$$Q = \int d^3x J^0 = q \int d^3x \bar{\psi} \gamma^0 \psi = q \overbrace{\int d^3x \bar{\psi}^\dagger \psi}^{=1 \text{ c.norm}} = q \quad (1.117)$$

donc la charge de Noether (la quantité conservée) est la charge électrique q .

(3) **L'ensemble des transformations** $G = \{U(\theta) = e^{-iq\theta}\}$ forme le groupe $U(1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fermeture : } e^{-iq\theta_1} e^{-iq\theta_2} = e^{-iq(\theta_1 + \theta_2)} = U(\theta_1 + \theta_2) \in G \\ \text{Identité : } e^{-iq\theta_0} e^{-iq\theta} = e^{-iq\theta}, \theta_0 = 0; U(0) = 1 \in G \\ \text{Inverse : } e^{-iq\theta_1} e^{-iq\theta_2} = 1, \theta_1 = -\theta_2. U(-\theta) \in G \\ \text{Associativité : } (e^{-iq\theta_1} e^{-iq\theta_2}) e^{-iq\theta_3} = e^{-iq\theta_1} (e^{-iq\theta_2} e^{-iq\theta_3}) = U(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \in G \\ \text{Unitarité : } U^\dagger(\theta) U(\theta) = 1 \end{array} \right. \quad (1.118)$$

Donc, G est l'ensemble des matrices unitaires 1×1 (des scalaires dans ce cas) d'éléments complexes, ce qui implique que $G \equiv U(1)$.

Symétrie de jauge locale : cas abélien

La transformation de jauge local consiste de la même transformation comme ci-dessus, la seule différence est que le paramètre θ dépend de coordonnées de l'espace-temps. Donc,

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi'_i(x) = e^{-iq_i \theta(x)} \phi_i(x) \quad (1.119)$$

où θ est une fonction analytique donnée. Pour θ infinitésimal, on a

$$\delta \phi_i(x) = -iq_i \theta(x) \phi_i(x) \quad (1.120)$$

Les termes du lagrangien qui contiennent les champ et leurs conjugués hermitiens sont invariants sous cette transformation. Par contre, les termes qui contiennent les dérivés de ces champs ne sont pas invariants car

$$\partial_\mu \phi_i(x) \rightarrow \partial_\mu \phi'_i(x) = e^{-iq_i \theta(x)} \partial_\mu \phi_i(x) - iq_i (\partial_\mu \theta(x)) e^{-iq_i \theta(x)} \phi_i(x).$$

le deuxième terme empêche la dérivé de se transformer comme un champ

$$\partial_\mu \phi_i(x) \not\rightarrow e^{-iq_i \theta(x)} \partial_\mu \phi_i(x) \quad (1.121)$$

Pour assurer l'invariance de jauge locale de la théorie décrite par un tel lagrangien, on introduit la dérivé covariante :

$$D_\mu = \partial_\mu - iq_i A_\mu \quad (1.122)$$

où le champ vecteur A_μ doit se transformer sous la transformation de jauge locale comme suit :

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \quad (1.123)$$

Ce qui implique que la dérivé covariante se transforme comme le champ ϕ ,

$$D_\mu \phi_i(x) = e^{-iq_i \theta(x)} D_\mu \phi_i(x) \quad (1.124)$$

Cette procédure fait le lagrangien invariant sous la transformation de jauge locale. Le champ A_μ est interprété comme le champ du boson de jauge responsable de la médiation de l'interaction de la théorie après quantification (le photon en QED par exemple). Donc, on doit rajouter à ce lagrangien un terme qui décrit l'énergie cinétique de ce nouveau champ. Ce terme doit être invariant de jauge (invariant de Lorentz, de dimension naturelle $[\mathcal{L}_G] = 4, \dots$). Le bon choix est,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.125)$$

où le tenseur $F_{\mu\nu}$ est défini par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.126)$$

qui est aussi invariant de jauge.

Le seule terme de masse qui peut être rajouter est de la forme

$$-\frac{1}{2} m_\gamma^2 A_\mu A^\mu \quad (1.127)$$

mais il brise l'invariance de jauge. Heureusement, la masse du photon est nulle et donc l'électrodynamique quantique est localement invariante de jauge (toujours le groupe jauge $U(1)$).

Exercice 10 :

(1) Montrer que la densité lagrangienne de la QED

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi \quad (1.128)$$

est invariante sous la transformation de jauge locale

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) \\ A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) \end{cases} \quad \text{avec} \quad U(x) = e^{-iq\alpha(x)} \quad (1.129)$$

(2) Montrer que le terme de masse $-\frac{1}{2} m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$ n'est pas invariant sous la transformation de jauge.

Solution de l'exercice :

(1) **Invariance de jauge locale de la QED :** la densité lagrangienne \mathcal{L}_{QED} contient les deux termes : $\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi$ (lagrangien de Dirac) et $\mathcal{L}_G = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ (lagrangien de Maxwell). Donc, pour montrer l'invariance de jauge de cette théorie, il faut montrer que ces deux termes sont invariants. Pour montrer que \mathcal{L}_D est invariant, il suffit de montrer que la dérivé covariante de transforme comme le champ ψ , c.à.d : $(D_\mu \psi(x))' = U(x)(D_\mu \psi(x))$.

$$\begin{aligned} (D_\mu \psi(x))' &= D'_\mu \psi'(x) \\ &= [\partial_\mu - iq A'_\mu] U(x) \psi(x) \\ &= (\partial_\mu U(x)) \psi(x) + U(x)(\partial_\mu \psi(x)) - iq A'_\mu U(x) \psi(x) \\ &= -iq U(x) (\partial_\mu \alpha(x)) + U(x)(\partial_\mu \psi(x)) - iq U(x) A_\mu \psi(x) + iq U(x) (\partial_\mu \alpha(x)) \\ &= U(x)[\partial_\mu - iq A_\mu] \psi \equiv U(x)(D_\mu \psi(x)) \end{aligned} \quad (1.130)$$

avec $\partial_\mu U(x) = -iq(\partial_\mu \alpha(x)) I(x)$. Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= \bar{\psi}'(i \not{D}' - m)\psi' \\ &= \bar{\psi} \underbrace{U^\dagger(x) U(x)}_{=1} [\not{D} \psi(x)] - m \bar{\psi} U^\dagger(x) \underbrace{U(x)}_{=1} \psi(x) \equiv \mathcal{L}_D \end{aligned} \quad (1.131)$$

Considérons, maintenant, le tenseur de Maxwell,

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\mu \partial_\nu \alpha(x) - \partial_\nu A_\mu + \partial_\nu \partial_\mu \alpha(x) \equiv F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1.132)$$

donc, le terme de jauge est invariant :

$$\mathcal{L}'_G = -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv \mathcal{L}_G \quad (1.133)$$

(2) Le terme de masse n'est pas invariant car,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}m_\gamma^2 A'_\mu A'^\mu &= -\frac{1}{2}m_\gamma^2 [A_\mu A^\mu - A_\mu \partial^\mu \alpha(x) - A^\mu \partial_\mu \alpha(x) + (\partial_\mu \alpha(x))(\partial^\mu \alpha(x))] \\ &\neq -\frac{1}{2}m_\gamma^2 A_\mu A^\mu \end{aligned} \quad (1.134)$$

Remarque : Pour assurer l'invariance de jauge d'une théorie de jauge, un terme de masse pour les bosons de jauge doit être absent. Alors, pour construire une théorie de jauge avec des bosons de jauge massifs, on a besoin d'un mécanisme de brisure spontané de symétrie (mécanisme de Higgs).

1.4.3 Transformations de jauge non-abéliennes

L'ensemble des transformations de jauge non-abéliennes forme un groupe de Lie non-abélien, c.à.d. les opérateurs de transformation ne commutent pas. Un élément d'un groupe de Lie s'écrit sous la forme exponentielle suivante :

$$U = e^{-i\alpha_i X_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.135)$$

Les matrices X_i sont appelées les générateurs du groupe, elles vérifient la relation de commutation (algèbre de Lie) $[X_i, X_j] = if_{ijk}X_k$, les paramètres α_i sont des fonctions analytiques réelles appelées paramètres du groupe. Si les α_i ne dépend pas de x , on appelle la transformation, transformation de jauge globale, et si ces derniers dépendent de x , on appelle la transformation, transformation de jauge locale.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au groupe spécial unitaire $SU(N)$. Pour ce groupe, le nombre de générateurs (et paramètres) est $N^2 - 1$. La représentation fondamentale est générée par les matrices X_i ($N \times N$) et la représentation adjointe est générée par les matrices $N^2 - 1 \times N^2 - 1$, $(T^i)_{jk} = if_{ijk}$.

Symétrie de jauge globale : cas non-abélien

Considérons le lagrangien de Dirac libre pour le nucléon,

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i \not{d} - m)\mathbb{I}\psi, \quad \text{pour} \quad \psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (1.136)$$

où \mathbb{I} est la matrice identité 2×2 , p et n sont des spineur de Dirac à 4-dimensions, c.à.d.

$$\psi = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (1.137)$$

On peut, facilement, montrer que \mathcal{L}_0 est invariant sous l'ensemble des transformations $\{U\}$, du groupe $SU(2)$, définies par :

$$\psi' = U\psi, \quad U = \exp(-i\alpha_i \tau_i) \equiv 1 - i\alpha_i \tau_i + \dots \quad (1.138)$$

avec

$$U^\dagger U = 1 = UU^\dagger, \quad [\tau_i, \tau_j] = i\epsilon_{ijk}\tau_k, \quad \tau_i = \frac{\sigma_i}{2} \quad (1.139)$$

où σ_i sont les matrices de Pauli, elles sont données par :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.140)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_D &= \bar{\psi}'(i\cancel{d} - m)\psi' \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(i\cancel{d} - m)U\psi \\
&= \bar{\psi}U^\dagger U(i\cancel{d} - m)\psi \equiv \mathcal{L}_D
\end{aligned} \tag{1.141}$$

Pour calculer le courant, on utilise le fait que $\delta\mathcal{L}_D = 0$ et que la transformation infinitésimale est $\delta U = 1 - i\alpha_i\tau_i$. On peut facilement montrer que le courant est donné par (voir l'exercice 10) :

$$\vec{J}^\mu = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}, \quad J_i^\mu = -\frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial (\partial_\mu \psi)} \sigma_i \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\sigma_i}{2} \psi \tag{1.142}$$

avec

$$\partial_\mu J_i^\mu = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \tag{1.143}$$

La charge de Noether, correspond à l'opérateur isospin. La troisième composante de cet opérateur, par exemple est donnée par :

$$\begin{cases} J_3^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\sigma_3}{2} \psi = \frac{1}{2} \bar{p} \gamma^\mu p - \frac{1}{2} \bar{n} \gamma^\mu n \\ I_3 = \frac{1}{2} \int d^3x \bar{p} \gamma^0 p - \frac{1}{2} \int d^3x \bar{n} \gamma^0 n = \frac{1}{2} \int d^3x p^\dagger p - \frac{1}{2} \int d^3x n^\dagger n \end{cases} \tag{1.144}$$

donc $I_3^p = 1/2$ pour le proton et $I_3^n = -1/2$ pour le neutron.

La généralisation de la symétrie de jauge globale pour des groupes plus larges est évidente. Considérons la transformation de jauge du groupe $SU(N)$, dans ce cas le champ fermionique s'écrit sous forme de multiplet de N composantes,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \tag{1.145}$$

la transformation de jauge s'écrit

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{X}} \psi \equiv e^{-i\alpha_i X_i} \psi, \tag{1.146}$$

où $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N)$ sont les paramètres qui spécifient la transformation, $X_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ sont des matrices $N \times N$ qui génèrent le groupe $SU(N)$ dans la représentation fondamentale. Dans le cas d'*isodoublet* (le champ ψ a deux composantes), $N = 2$ et les matrices X_i sont données par $X_i = \frac{1}{2}\tau_i$ (c'est la représentation fondamentale de $SU(2)$).

Pour α_i infinitésimaux, on écrit

$$\delta\psi = -i\vec{X} \cdot \vec{\theta}\psi \tag{1.147}$$

Dans ce cas, le courant de Noether est donné par :

$$\vec{J}^\mu = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_N \end{pmatrix}, \quad J_i^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \psi)} \sigma_i \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu X_i \psi \tag{1.148}$$

Exercice 11 : Montrer que le lagrangien de Higgs suivant,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger \phi) - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{1.149}$$

est invariant sous la transformation de jauge du groupe $SU(2)$.

Solution de l'exercice :

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu \phi')^\dagger (\partial^\mu \phi') - \mu^2 (\phi'^\dagger \phi') - \lambda (\phi'^\dagger \phi')^2 &= (\partial_\mu \phi)^\dagger U^\dagger U (\partial^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger U^\dagger U \phi) - \lambda (\phi^\dagger U^\dagger U \phi)^2 \\
&= \mathcal{L}
\end{aligned} \tag{1.150}$$

Symétrie de jauge locale : cas non-abélien (théories de Yang Mills)

Dans ce cas, les paramètres α_i (pour $i = 1, 2, 3$) dépendent de 4-vecteur position x^μ . On écrit donc,

$$\psi'(x) = U(x)\psi, \quad U(x) = \exp(-i\alpha_i(x)\tau_i) \quad (1.151)$$

La dérivé normale ne se transforme pas comme le champs. c.à.d.

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi'(x) &= [\partial_\mu U(x)]\psi(x) + U(x)[\partial_\mu \psi(x)] \\ &= [-i\{\partial_\mu \alpha_i(x)\}\tau_i]\exp(-i\alpha_i(x)\tau_i)\psi(x) + \exp(-i\alpha_i(x)\tau_i)[\partial_\mu \psi(x)] \end{aligned} \quad (1.152)$$

Ce qui implique que le lagrangien \mathcal{L}_D n'est pas invariant. c.à.d.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= \bar{\psi}(x)(i\cancel{D} - m)\psi(x) + \bar{\psi}U^\dagger(x)[i\gamma^\mu \partial_\mu U(x)]\psi(x) \\ &= \mathcal{L}_D + \{\partial_\mu \alpha_i(x)\}\bar{\psi}\gamma^\mu \tau_i \psi(x) \\ &\neq \mathcal{L}_D \end{aligned} \quad (1.153)$$

Pour rendre ce lagrangien invariant sous cette transformation, on doit remplacer la dérivé normale par la dérivé covariante. c.à.d.

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig\mathbb{W}_\mu \\ &= \mathbf{1}_{2 \times 2} \partial_\mu - ig\mathbb{W}_\mu \end{aligned} \quad (1.154)$$

où $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ est la matrice unitaire 2×2 . La matrice des champs de jauge \mathbb{W}_μ est définie par :

$$\mathbb{W}^\mu = \tau_i W_i^\mu \equiv \frac{1}{2}\sigma_i W_i^\mu, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.155)$$

où les champs bosonique W_i^μ (de spin 1) sont appelés *champs de jauge*. La forme matricielle explicite de la matrice des champs de jauge \mathbb{W}_μ est donnée par :

$$\mathbb{W}^\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_3^\mu & W_1^\mu - iW_2^\mu \\ W_1^\mu + iW_2^\mu & W_3^\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{W_3^\mu}{\sqrt{2}} & W_1^\mu - \\ W_1^\mu + & \frac{W_3^\mu}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.156)$$

On cherche, maintenant, comment la matrice \mathbb{W} (ou les champs de jauge) se transforme sous la transformation de jauge locale. Pour assurer que la densité lagrangienne est invariante, on suppose que la dérivé covariante se transforme comme suit :

$$D'_\mu \psi' = U(x)(\mathcal{D}_\mu \psi) \quad \text{ou} \quad D'_\mu = U(x)D_\mu U^{-1}(x) \quad (1.157)$$

On a,

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi' &= [\partial_\mu - ig\mathbb{W}'_\mu]U(x)\psi \\ &= [(\partial_\mu U(x))\psi + U(x)(\partial\psi) - ig\mathbb{W}'_\mu U(x)\psi] \\ &\equiv U(x)[\partial_\mu - ig\mathbb{W}_\mu]\psi \end{aligned} \quad (1.158)$$

Multiplions l'égalité par U^{-1} , on obtient :

$$\mathbb{W}'_\mu = U(x)\mathbb{W}_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) \quad (1.159)$$

Pour trouver les lois de transformation des champs W_i^μ , on utilise la transformation infinitésimale. Pour α_i très petit, on écrit :

$$U(x) = 1 - \frac{i}{2}\sigma_i \alpha_i(x) \quad U^{-1}(x) = 1 + \frac{i}{2}\sigma_i \alpha_i(x) \quad (1.160)$$

et le commutateur

$$[\sigma_i/2, \sigma_j/2] = \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (1.161)$$

On a,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_k W'_k{}^\mu &= (1 - \frac{i}{2} \sigma_i \alpha_i(x)) \frac{1}{2} \sigma_k W_k{}^\mu (1 + \frac{i}{2} \sigma_j \alpha_j(x)) - \frac{i}{g} (-\frac{i}{2} \sigma_i \partial^\mu \alpha_i(x)) (1 + \frac{i}{2} \sigma_j \alpha_j(x)) \\ &= \frac{1}{2} \sigma_k W_k{}^\mu + \frac{1}{2} \sigma_i \frac{i}{2} \sigma_j \alpha_j(x) W_i{}^\mu - \frac{i}{2} \sigma_j \frac{1}{2} \sigma_i \alpha_j(x) W_i{}^\mu - \frac{1}{g} \frac{1}{2} \sigma_k \partial^\mu \alpha_k(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \frac{1}{2} \sigma_k W_k{}^\mu + i \left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] \alpha_j(x) W_i{}^\mu - \frac{1}{g} \frac{1}{2} \sigma_k \partial^\mu \alpha_k(x) \\ &= \frac{1}{2} \sigma_k W_k{}^\mu - \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \sigma_k \alpha_j(x) W_i{}^\mu - \frac{1}{g} \frac{1}{2} \sigma_k \partial^\mu \alpha_k(x) \end{aligned} \quad (1.162)$$

donc,

$$W'_k{}^\mu = W_k{}^\mu - \epsilon_{ijk} \alpha_j(x) W_i{}^\mu - \frac{1}{g} \partial^\mu \alpha_k(x). \quad (1.163)$$

Alors, le nouveau lagrangien s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= \bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi \\ &= \mathcal{L}_0 - g \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{W}_\mu \psi \\ &= \mathcal{L}_0 + g \vec{W}_\mu \cdot \vec{J}^\mu. \end{aligned} \quad (1.164)$$

\mathcal{L}_0 est le lagrangien libre (sans interaction) et le terme $g \vec{W}_\mu \cdot \vec{J}^\mu$ est appelé le terme d'interaction, il décrit l'interaction entre les champs de jauge $W_i{}^\mu$ et les champs des fermions ψ .

Comme en QED, on doit construire un terme cinétique pour les champs de jauge. Par analogie avec la QED,

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \vec{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbb{F}_{\mu\nu} \mathbb{F}^{\mu\nu}]. \quad (1.165)$$

où

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \sigma = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \sigma^a. \quad (1.166)$$

$$F_{\mu\nu}^l = \partial_\mu W_\nu^l - \partial_\nu W_\mu^l + g \epsilon_{jkl} W_\mu^j W_\nu^k. \quad (1.167)$$

On peut montrer que l'égalité dans (1.165) est correcte, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbb{F}_{\mu\nu} \mathbb{F}^{\mu\nu}] &= -\frac{1}{2} \text{Tr}[\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \sigma^a \frac{1}{2} F^{\mu\nu b} \sigma^b] \\ &= -\frac{1}{8} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \text{Tr}[\sigma^a \sigma^b] \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \end{aligned} \quad (1.168)$$

où on a utilisé $\text{Tr}[\sigma^a \sigma^b] = 2\delta^{ab}$.

Pour montrer que \mathcal{L}_{jauge} est invariante, il suffit juste de montrer que

$$\mathbb{F}'_{\mu\nu} = U \mathbb{F}_{\mu\nu} U^{-1} \quad (1.169)$$

Car

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\text{Tr}[\mathbb{F}'_{\mu\nu}\mathbb{F}'^{\mu\nu}] &= -\frac{1}{2}\text{Tr}[U\mathbb{F}_{\mu\nu}U^{-1}U\mathbb{F}^{\mu\nu}U^{-1}] \\
 &= -\frac{1}{2}\text{Tr}[U\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}U^{-1}] \\
 &= -\frac{1}{2}\text{Tr}[U^{-1}U\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}] \\
 &= -\frac{1}{2}\text{Tr}[\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}]
 \end{aligned} \tag{1.170}$$

Exercice 12 :

(1) Montrer qu'un terme cinétique de type QED n'assure pas l'invariance de jauge

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbb{W}_\nu - \partial_\nu \mathbb{W}_\mu \tag{1.171}$$

(2) Montrer que

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu \mathbb{W}_\nu - \partial_\nu \mathbb{W}_\mu + i g [W_\mu, W_\nu] \tag{1.172}$$

(3) Est ce qu'on peut rajouter un terme de masse pour les champs W_i^μ .

1.4.4 Construction d'une théorie de jauge : modèle générique

L'étude de la symétrie de jauge locale sous le groupe $SU(2)$ a été faite pour la première fois par Yang et Mills en 1954. Cette idée a été critiquée par Pauli, car les quantas du champ de Yang-Mills doivent être sans masse pour maintenir l'invariance de jauge. Ce problème est résolu par le mécanisme de Higgs en 1964 qui permet de générer les masses pour les bosons de jauge ... Pour construire une théorie de jauge, on suit les étapes suivantes :

- Choisir le groupe de jauge G ($SU(N)$ par exemple). Un élément de ce groupe s'écrit :

$$U = e^{-i\alpha_a T^a} \tag{1.173}$$

avec

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c. \tag{1.174}$$

- Écrire la densité lagrangienne de Dirac libre invariante sous la transformation de jauge globale du groupe G s'écrit :

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{i=1}^M \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i) \psi_i \tag{1.175}$$

où M est le nombre de fermions de la théorie (les 6 saveurs de quarks par exemple). Le spinor ψ_i s'écrit :

$$\psi_i = \begin{pmatrix} \psi_i^{(1)} \\ \psi_i^{(2)} \\ \vdots \\ \psi_i^{(N)} \end{pmatrix} \tag{1.176}$$

le spinor ψ appartient à la représentation fondamentale du groupe G . Chaque composante du spinor représente les différents états de la même particule. Pour $SU(3)$, par exemple, chaque état de couleur est représenté par une composante.

- Introduire les champs de jauge à travers la dérivé covariante pour assurer l'invariance de jauge locale ($\alpha_i \equiv \alpha_i(x)$). Alors, la densité lagrangienne devient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D &= \sum_{i=1}^M \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) \psi_i \\ &= \mathcal{L}_0 + g J^{a,\mu} W_\mu^a.\end{aligned}\quad (1.177)$$

avec

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \mathbb{W}_\mu \quad (1.178)$$

$$\mathbb{W}_\mu = T^a W_\mu^a \quad (1.179)$$

$$\mathbb{W}'_\mu = U(x) \mathbb{W}_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x) \quad (1.180)$$

$$W'^{c\mu} = W^{c\mu} - f_{abc} \alpha_a(x) W^{b\mu} - \frac{1}{g} \partial^\mu \alpha_c(x). \quad (1.181)$$

les champs W_μ^a appartiennent à la représentation adjointe du groupe G .

- Introduire le terme cinétique pour les champs de jauge (qu'il doit être invariant sous les transformations de Lorentz, de jauge ...)

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu} \quad (1.182)$$

avec

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \epsilon_{abc} W_\mu^a W_\nu^b. \quad (1.183)$$

- Si les bosons de jauge de la théorie sont massifs, alors, il faut introduire un mécanisme de brisure spontané de symétrie (mécanisme de Higgs par exemple).
 ► Quantification de la théorie par : la quantification canonique, intégrale fonctionnelle, ... etc.
 ► Extraire les règles de Feynman (à l'aide de la matrice S)
 ► Calculer des observables physiques !

1.5 Exercices et problèmes

Exercice 1 : Théorème de Noether

(1) Rappeler le théorème de Noether ?

(2) Montrer que, dans le cas général (transformations internes ou externes), le courant de Noether associé à la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ est

$$J_\mu(\xi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} \delta\phi(x) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} \partial_\nu \phi(x) - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \delta x^\nu. \quad (1.184)$$

où $\partial_\mu J^\mu = 0$.

(3) Montrer que

$$\frac{dQ}{dx_0} = 0, \quad Q = \int_V d^3x J_0(x). \quad (1.185)$$

où Q est la charge de Noether.

(4) Calculer les courants et les charges de Noether pour

$$\text{Translation : } x_\mu \rightarrow x_\mu + a_\mu. \quad (1.186)$$

$$\text{Transformation de Lorentz (rotation) : } x_\mu \rightarrow x_\mu + \epsilon_{\mu\nu} x^\nu (\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}). \quad (1.187)$$

Quelles sont les quantités conservées ?

(5) Considérons la densité lagrangienne de Dirac (\mathcal{L}_d) et la transformation de jauge globale $U(\theta)$:

$$\mathcal{L}_d = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi, \quad U(\alpha) = e^{-ie\theta}. \quad (1.188)$$

Montrer que le courant et la charge de Noether, dans ce cas, sont donnés par :

$$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad Q = e. \quad (1.189)$$

Exercice 2 : Transformation de jauge abélienne : groupe $U(1)$

(1) Écrire la densité lagrangienne de Dirac et montrer qu'elle est invariante sous la transformation de jauge globale du groupe abélien $U(1)$.

(2) Calculer le courant de Noether associé et montrer qu'il est conservé.

(3) Considérons la densité lagrangienne suivante

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\not{D} - m)\psi(x).$$

avec

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x)$$

Dériver la transformation du champs A_μ qui laisse la densité lagrangienne \mathcal{L} invariante sous la transformation de jauge locale $e^{ie\theta(x)} \in U(1)$ (où $\theta(x)$ est une fonction analytique de x).

(4) Au niveau quantique, cette densité lagrangienne est mal définie.

(a) Expliquer pourquoi.

(b) Comment peut-on résoudre ce problème ?

(c) Est ce que la nouvelle densité lagrangienne reste invariante sous les transformations de jauge locales des champs ψ , $\bar{\psi}$ et A_μ ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 : groupe $SU(2)$

Considérons la transformation complexe à deux dimensions, $x' = Ax$ qui, sous forme matricielle, s'écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.190)$$

où a , b , c et d sont complexes ($\in \mathbb{C}$). On suppose que le déterminant de cette matrice est non-nul pour pouvoir construire son inverse.

(1) Quelles sont les conditions que doivent vérifier les paramètres a , b , c et d pour que la transformation (1.190) soit unitaire ? Montrer que la matrice A peut s'écrire sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a\bar{b}}{\bar{d}} & \bar{d} \end{pmatrix}. \quad (1.191)$$

où \bar{b} et \bar{d} sont les complexes conjugués de b et d , respectivement.

(2) On suppose que le déterminant de la matrice A égal à l'unité, montrer qu'on peut écrire cette matrice sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}. \quad (1.192)$$

et que

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (1.193)$$

où $|b|^2 = \bar{b}b$ est la norme de b .

(3) Montrer que l'ensemble des matrices A , définies dans l'éq. (1.192), forme un groupe.

(4) On exprime les paramètres a et b en terme de leurs parties réels et imaginaires c.à.d. $a = a_r + ia_i$ et $b_r + ib_i$ où a_r, a_i, b_r et b_i sont les parties réels et imaginaires de ces paramètres. Montrer que la matrice A , donnée dans l'éq. (1.192), peut s'écrire comme une combinaison linéaire des matrice de Pauli⁴ et la matrice unitaire. Donner les coefficients de cette combinaison.

(5) Montrer les relations suivantes :

$$(a) \sigma_i^2 = 1, \sigma_i^3 = \sigma_i, \sigma_i^{2n} = 1 \text{ et } \sigma_i^{2n+1} = \sigma_i \text{ pour } i = x, y, z \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

$$(b) \sigma_i \sigma_j = i \sigma_k.$$

$$(c) \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathbb{I} \quad (\mathbb{I} \text{ est la matrice unitaire } 2 \times 2).$$

$$(d) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} \mathbb{I} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}) \quad (\text{où } \vec{\alpha} \text{ et } \vec{\beta} \text{ sont deux vecteurs arbitraires à 3 dimensions}).$$

(6) Montrer que les matrice de Pauli, voir (1.194), forment une base de l'espace vectoriel des matrices A (voir éq. (1.192)).

(7) On suppose que la matrice U s'écrit sous forme exponentielle comme suit

$$U(\varphi, \vec{n}) = \exp\left(-\frac{1}{2}i\varphi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}\right) \quad (1.195)$$

où $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

Montrer qu'on peut écrire la matrice U sous la forme

$$U(\varphi, \vec{n}) = \cos(\varphi/2) \mathbb{I} - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin(\varphi/2)) \quad (1.196)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) - in_z \sin(\varphi/2) & -(n_y + in_x) \sin(\varphi/2) \\ (n_y - in_x) \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) + in_z \sin(\varphi/2) \end{pmatrix} \quad (1.197)$$

(8) Montrer que la matrice $U \in SU(2)$ (en vérifiant que la matrice (1.197) est unitaire et de déterminant égal à 1!).

(9) Calculer les matrices suivantes :

$$U(0, \vec{n}), \quad U(2\pi, \vec{n}), \quad U(4\pi, \vec{n}), \quad U(\varphi + 2\pi, \vec{n}), \quad U(\varphi + 4\pi, \vec{n}). \quad (1.198)$$

(10) Montrer que $\{U(0, \vec{n}), U(2\pi, \vec{n})\}$ forme un sous-groupe distingué du groupe $SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

(11) Montrer que les groupes $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ et $SO(3)$ sont isomorphes.

Exercice 4 : Transformation de jauge non-abélienne et Isospin

Considérons la densité lagrangienne du Nucléon

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \partial_\mu \gamma^\mu - m) \psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (1.199)$$

4. Les matrices de Pauli sont données par :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.194)$$

(1) Montrer que \mathcal{L} est invariant sous la transformation d'Isospin globale $U(\vec{\alpha}) = \exp(i\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}}{2})$ (où $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ sont les matrices de Pauli, et $\vec{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont des constantes arbitraires).

(2) Montrer que $U(\alpha)$ s'écrit

$$U(\alpha) = \cos(\varphi/2) + i(\vec{n} \cdot \sigma) \sin(\varphi/2), \quad \vec{n} = \frac{\vec{\alpha}}{|\alpha|}, \quad \varphi = |\alpha|. \quad (1.200)$$

est que l'ensemble des transformations $\{U(\alpha)\}$ forme le groupe non-abélien $SU(2)$.

(3) Montrer que le courant de Noether correspondant est

$$\vec{J}^\mu = \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi(x))} \vec{\sigma} \psi(x) = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\vec{\sigma}}{2} \psi. \quad (1.201)$$

(4) Montrer que pour que la densité lagrangienne suivante soit invariante sous la transformation de jauge locale ($\vec{\alpha} \equiv \vec{\alpha}(x)$)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(iD_\mu \gamma^\mu - m)\psi. \quad (1.202)$$

il faut que

$$D_\mu = \partial_\mu + igB_\mu, \quad B'_\mu = U(x)B_\mu U^{-1}(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x). \quad (1.203)$$

(5) Utiliser la transformation infinitésimale pour montrer que

$$b_\mu^{l'} = b_\mu^l - \epsilon_{jkl}\alpha^j(x)b_\mu^k - \frac{\partial_\mu \alpha^l(x)}{g},$$

où $B_\mu = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{\alpha}(x)$ (1.204)

(6) Montrer que la densité lagrangienne de jauge est invariante sous la transformation de jauge locale

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu} \vec{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\text{Tr}[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]. \quad (1.205)$$

où

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\vec{F}_{\mu\nu} \cdot \sigma = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a \sigma^a. \quad (1.206)$$

$$F_{\mu\nu}^l = \partial_\mu b_\nu^l - \partial_\nu b_\mu^l + g\epsilon_{jkl}b_\mu^j b_\nu^k. \quad (1.207)$$

Exercice 5 : groupe $SU(3)$

$SU(3)$ est le groupe des matrices 3×3 unitaires de déterminant égal à 1. Montrer qu'un élément de ce groupe s'écrit

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = e^{i\alpha_a T_a}. \quad (1.208)$$

Les matrices 3×3 qui vérifient les conditions de $SU(3)$ sont les matrices de Gell-Mann, elles sont données par

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (1.209)$$

Traditionnellement, on définit les générateurs de $SU(3)$ comme suit

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a, \quad a = 1, \dots, 8. \quad (1.210)$$

avec

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}/2. \quad (1.211)$$

L'algèbre de Lie de $SU(3)$ est défini par le commutateur

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c. \quad (1.212)$$

- (1) Montrer que les éléments $U(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, définis dans l'éq. (1.208), forme le groupe $SU(3)$.
- (2) On considère la densité lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix} \quad (1.213)$$

Montrer que \mathcal{L} est invariant sous la transformation de jauge locale du groupe $SU(3)$.

Exercice 6 : Théories de jauge basé sur le groupe $O(n)$

Considérons deux champs scalaires, ϕ_1 et ϕ_2 , qui se transforment suivant la représentation vectorielle du groupe $O(n)$, comme suit :

$$(\phi'_\alpha)_i = U_{ij}(x)(\phi_\alpha)_j, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.214)$$

où $O(n)$ est le groupe des matrices orthogonales $n \times n$ d'éléments réels.

- (1) Montrer qu'on peut écrire la représentation infinitésimale de $O(n)$ sous la forme :

$$(\phi'_\alpha)_i = (\phi_\alpha)_i + \varepsilon_{ij}(\phi_\alpha)_j \quad (1.215)$$

où $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$.

- (2) Construire la dérivé covariante pour les champs ϕ_α .
- (3) Donner le lagrangien total de ce modèle.

Exercice 7 : Théorie de Yang-Mills scalaire

Considérons le lagrangien libre d'une théorie de trois champs scalaires

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - m\phi^2], \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \quad (1.216)$$

On suppose que \mathcal{L} est invariant sous les transformations de $SU(2)$ dans la représentation à 3 dimensions.

- (1) Construire les générateurs de $SU(2)$ dans cette représentation.
- (2) Construire le lagrangien de Yang-Mills associé.

M.S.Zidi-University-Jijel-Gauge-Theories

2. Électrodynamique Quantique

Sommaire

2.1	Tests expérimentaux de la QED	44
2.2	Lagrangien classique et invariance de jauge	45
2.3	Quantification	46
2.3.1	Quantification canonique	46
2.3.2	Quantification du champ de Dirac	48
2.3.3	Quantification du champ de Maxwell	52
2.4	Matrice S et Règles de Feynman	57
2.4.1	Définition de la matrice S	57
2.4.2	Théorème de Wick	57
2.4.3	Matrice S et Règles de Feynman	58
2.4.4	Règles de Feynman en QED dans l'espace des impulsions	62
2.5	Calcul des processus à l'ordre de Born	63
2.5.1	Création d'une paire de leptons : $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$	63
2.5.2	Diffusion Compton : $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$	67
2.5.3	Amplitudes polarisées de la réaction : $e^- e^+ \rightarrow l^- l^+$	71
2.6	Exercice et Problèmes	72
2.6.1	Rappel de cours	72
2.6.2	Questions de cours	74
2.6.3	Exercices et Problèmes	75

L'électrodynamique quantique ou **QED** (Quantum ElectroDynamics) est une théorie quantique des champs basée sur le groupe de jauge abélien $U(1)$, donc c'est une théorie de jauge abélienne. La QED est l'un des piliers du modèle standard et la théorie modèle dont toute théorie décrivant une nouvelle interaction s'est inspirée. Elle décrit l'interaction entre toutes les particules électriquement chargées (leptons et quarks) avec le photon, ou l'interaction de la lumière avec la matière. Le photon est le boson de jauge de cette théorie, il est considéré comme le médiateur de l'interaction électromagnétique. La formulation covariante de cette théorie conduit à sa renormalisabilité à tous les ordres de la série de perturbation. Dans ce chapitre, on va étudier en détail la QED, on part de sa construction et quantification et on termine par sa phénoménologie et comparaison avec l'expérience [4, 5, 6, 7, 8, 9].

2.1 Tests expérimentaux de la QED

La QED est la première théorie quantique des champs réussie, les prédictions de cette théorie sont en accord à 8 chiffres significatifs avec des résultats expérimentaux, donc c'est l'une des théories les mieux vérifiées dans toutes la science. Il existe trois classes d'expériences qui ont confirmés la validité de cette théorie :

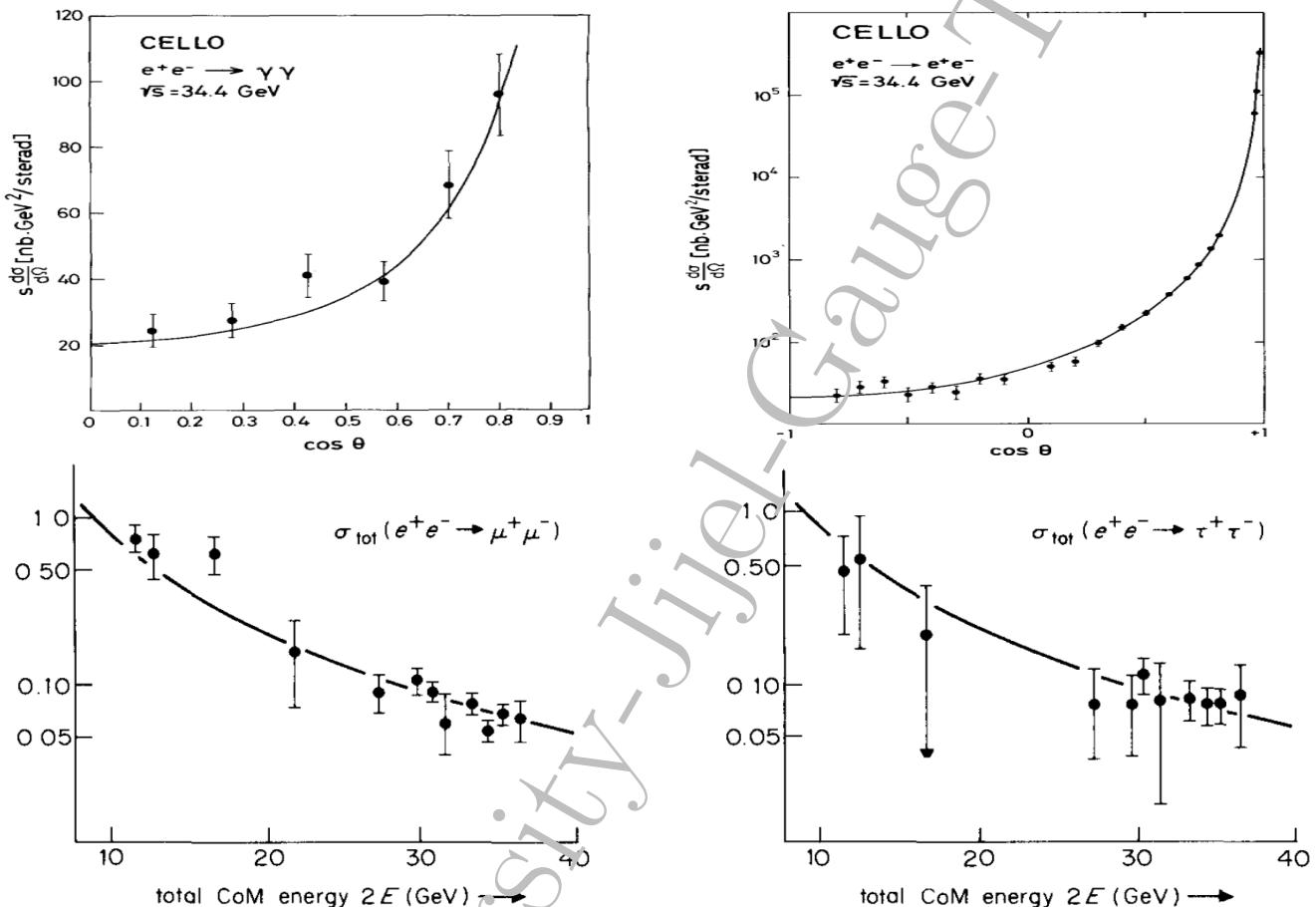


FIGURE 2.1 – Confirmation de la QED à haute énergie (comparaison des sections efficaces et sections efficaces différentielles théoriques et expérimentales), Nuc.Phys B (Proc. Suppl.) 3 (1988) 39-138.

- **Physique atomique** (basse énergie) : mesure de la constante de structure fine α et le moment magnétique de l'électron ($\mu = -ge/(4m_e)$). Voici les valeurs mesurées et les valeurs théoriques du facteur g de l'électron et α

$$g^{\text{ex}}/2 = 1.00115965218085(76) \quad g^{\text{th}}/2 = 1 \quad (2.1)$$

$$1/\alpha^{\text{ex}} = 137.035999070(98) \quad 1/\alpha^{\text{th}} = 137 \quad (2.2)$$

- **Matière condensée** : plusieurs expériences de la matière condensé montre que la valeur de α est en accord avec la valeur mesurée dans les expériences de la physique atomique. Dans l'expérience de *The quantum Hall effect*, on trouve $1/\alpha^{\text{ex}} = 137.0359979(32)$.
- **Expérience de collision de particules** (haute énergie) : plusieurs expériences de collision électron-positron à haute énergie ont confirmés la validité de la QED, on cite par exemple (i) diffusion Bhabha $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, (ii) production d'une paire de muons $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$, (iii) production d'une paire de taus $e^-e^+ \rightarrow \tau^-\tau^+$, (iv) annihilation d'une paire d'électrons, voir la figure (2.1).

2.2 Lagrangien classique et invariance de jauge

La densité lagrangienne classique de la QED est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \\ &= \overbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi}^{\equiv \mathcal{L}_0} + \overbrace{qJ^\mu A_\mu}^{\equiv \mathcal{L}_I} \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I\end{aligned}\tag{2.3}$$

avec

- ψ est un spineur de Dirac et un singlet du groupe $U(1)$.
- A_μ est le champ de jauge (qui donne les photons après quantification).
- $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ est la dérivé covariante.
- q est la charge électrique (charge du positron si $q = e$)
- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur électrodynamique.
- \mathcal{L}_0 est la densité lagrangienne libre (sans interaction de ψ avec A_μ).
- $\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ est le terme cinétique du champ jauge.
- $\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$ est la densité de Dirac libre d'un fermion de masse m .
- $qJ^\mu A_\mu$ est le terme d'interaction (de ψ avec A_μ ou matière avec lumière).
- $\mathcal{L}_I = qJ^\mu A_\mu$ est le lagrangien d'interaction (au type courant-boson de jauge).
- $J^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ est le courant conservé de Noether ($\partial_\mu J^\mu = 0$).

Si on varie \mathcal{L} par rapport à $\bar{\psi}$ à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}(x))} = 0\tag{2.4}$$

on obtient l'équation du mouvement suivante (équation de Dirac) :

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = -q\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x)\tag{2.5}$$

La densité lagrangienne définie dans l'éq.(2.3) est invariante sous les transformations de jauge locales suivantes (du groupe de jauge $U(1)$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi'(x) = e^{-iq\theta(x)}\psi(x) & \delta\psi(x) = -iq\theta(x)\psi(x) \\ \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{iq\theta(x)} & \delta\bar{\psi}(x) = iq\theta(x)\bar{\psi}(x). \\ A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x) & \delta A_\mu(x) = -\partial_\mu\theta(x). \end{array} \right. \tag{2.6}$$

La densité lagrangienne ci-dessus est définie pour un seul fermion (et son anti-fermion). Si on veut inclure d'autres fermions, il suffit juste de rajouter la densité lagrangienne de Dirac pour chaque particule. Par exemple, la densité lagrangienne pour les trois leptons s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_{i=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_i(i\not{D} - m_i)\psi_i\tag{2.7}$$

Exercice 1 :

- (1) Montrer que \mathcal{L} est invariante sous la transformation de jauge $U(1)$.
- (2) Montrer que la dérivé covariante vérifie la relation suivante : $[D_\mu, D_\nu]\psi = -iqF_{\mu\nu}\psi$.
- (3) Montrer que : $D'_\mu = U(x)D_\mu U(x)^{-1}$, avec $U(x) = e^{-iq\theta(x)}$.
- (4) Utiliser les deux dernières relations, dans (2) et (3), pour montrer que $F_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu}$.

2.3 Quantification

La procédure de quantification transforme un champs classique en un opérateur actant sur les états quantiques, où l'état de plus basse énergie est appelé le *vide*. A partir de l'état du vide, on peut générer tous les états physiques à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation (émission et absorption des particules). Cette procédure, que l'on appelle *quantification canonique*, permet de déduire les propriétés de la matière et son interaction avec la lumière. Il existe plusieurs méthodes de quantification, on cite par exemple la quantification canonique, l'intégrale de chemin, ... etc. Dans cette section, on utilise la quantification canonique pour quantifier l'électromagnétisme.

2.3.1 Quantification canonique

La méthode de quantification canonique ou la *méthode de l'analogie classique* est introduite par Dirac en 1926 pour quantifier les systèmes classiques en gardant formellement la structure de la théorie classique. Dans cette approche, on remplace les crochets de Poisson classique

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial q} \frac{\partial \hat{B}}{\partial p} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial p} \frac{\partial \hat{B}}{\partial q}. \quad (2.8)$$

par les commutateurs

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] = \frac{1}{i\hbar} (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}). \quad (2.9)$$

Par exemple, le crochet de Poisson et le commutateur de Dirac des vecteurs position et quantité de mouvement sont donnés par,

$$\{\hat{q}, \hat{p}\} = 1 \text{ (crochet de Poisson)}, \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \text{ (commutateur de Dirac)}. \quad (2.10)$$

Exemple : quantification de l'oscillateur harmonique

On va utiliser cette technique pour quantifier l'oscillateur harmonique (1^{ère} quantification). L'hamiltonien quantique (\hat{q} et \hat{p} sont des opérateurs) de l'oscillateur harmonique s'écrit sous la forme :

$$\hat{H}_{osc} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{q}^2, \quad \text{avec} \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (2.11)$$

On définit les opérateurs d'annihilation et de création a et a^\dagger , respectivement, par,

$$a = (m\omega \hat{q} + i\hat{p}) / \sqrt{2\hbar m\omega}, \quad \text{avec} \quad [a, a^\dagger] = 1. \quad (2.12)$$

$$a^\dagger = (m\omega \hat{q} - i\hat{p}) / \sqrt{2\hbar m\omega} \quad (2.13)$$

donc,

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{n}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a - a^\dagger) \quad (2.14)$$

alors, \hat{H}_{osc} en fonction de a et a^\dagger s'écrit,

$$\hat{H}_{osc} = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2). \quad (2.15)$$

avec $\hat{N} = a^\dagger a$ est l'opérateur nombre de particule, il donne le nombre de particules n dans l'état $|n\rangle$,

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle \quad a|n\rangle = |n-1\rangle \quad (2.16)$$

On peut montrer que,

$$\hat{N}(a|n\rangle) = (n-1)|n\rangle, \quad \hat{N}(a^\dagger|n\rangle) = (n+1)|n\rangle, \quad (2.17)$$

Donc les vecteurs $a|n\rangle$ et $a^\dagger|n\rangle$ sont des vecteurs propres de l'opérateur \hat{N} avec les valeurs propres $n-1$ et $n+1$, respectivement. On suppose que $|n_0\rangle$ est l'état d'énergie la plus basse, alors $a|n_0\rangle = 0$.

D'autre part, on a $\hat{N}|n_0\rangle = n_0|n_0\rangle$ et $a^\dagger(a|n_0\rangle) = 0$, ce qui implique que $n_0 = 0$. Donc, les valeurs propres de \hat{N} sont : $n = 0, 1, 2, \dots$ etc.

On rappelle que les états d'énergie de l'oscillateur harmonique sont données par les valeurs propres de l'opérateur \hat{H}_{osc} ,

$$\hat{H}_{osc}|n\rangle = \hbar\omega(N^\dagger + 1/2)|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (2.18)$$

On trouve alors,

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{etc.} \quad (2.19)$$

On voit que l'énergie est quantifiée (discrète) et que l'énergie la plus basse est $E_0 = \hbar\omega/2$.

Pour trouver les vecteurs propres de l'opérateur \hat{N} , on applique l'opérateur de création a^\dagger n fois sur le vide $|0\rangle$, on montrer facilement que,

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad \langle 0|n\rangle = 1. \quad (2.20)$$

Dans la représentation de Heisenberg¹, l'opérateur a est une fonction du temps, il vérifie

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{a}(t) = [a(t), \hat{H}_{osc}] \quad (2.21)$$

la solution de cette équation est

$$a(t) = ae^{-i\omega t}, \quad a = a(0). \quad (2.22)$$

On voit que le nombre de particules n dans un état $|n\rangle$ peut dépasser un, ce qui est cohérent avec la statistique des **bosons** de **Bose-Einstein**, c.à.d. la quantification canonique à l'aide des commutateurs conduit inévitablement à des bosons. Alors comment quantifier les systèmes de **fermions** ?

Quantification canonique des fermions

La quantification du champ de Dirac par les anti-commutateurs a été introduite pour la première fois par Jordan et Wigner en 1928. On suppose que les opérateurs de création et d'annihilation \hat{a}, \hat{a}^\dagger vérifient les relations d'anti-commutation :

$$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1, \quad \{\hat{a}, \hat{a}\} = 0, \quad \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} = 0. \quad (2.23)$$

Ces relations impliquent que,

$$(\hat{a})^2 = 0, \quad (\hat{a}^\dagger)^2 = 0, \quad \hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 - \hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (2.24)$$

L'opérateur nombre de particules garde la même forme comme dans le cas des commutateurs, alors

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (2.25)$$

On peut facilement montrer que les valeurs propres de l'opérateur \hat{N} sont 0 et 1. On a,

$$\begin{cases} \hat{N}^2 = (\hat{a}^\dagger\hat{a})(\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \hat{a}^\dagger(1 - \hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a} = \hat{a}^\dagger\hat{a} - (\hat{a}^\dagger)^2(\hat{a})^2 = \hat{N}. \\ \hat{N}(\hat{N} - 1) = \hat{N}^2 - \hat{N} = \hat{N} - \hat{N} = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

et

$$\begin{cases} \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \equiv \hat{N}^2|n\rangle = n^2|n\rangle \\ \hat{N}(\hat{N} - 1)|n\rangle = n(n - 1)|n\rangle \geq 0|n\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 = n \\ \Rightarrow n = 0 \text{ ou } n = 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

1. L'équation du mouvement d'un opérateur $\hat{O}(t)$ est $i\hbar \frac{d}{dt} \hat{O}(t) = [\hat{O}(t), H]$

Donc, le nombre de particules ne peut prendre que deux valeurs

$$n = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

On suppose, juste pour les besoins de la discussion, que le nombre de particules est $n = 2$, alors

$$|2\rangle = (\hat{a}^\dagger)^2 |0\rangle = 0 \quad n \neq 2 \quad (2.29)$$

Donc, n ne peut pas être égal à 2. Ce qui signifie que deux particules, qui portent les mêmes nombres quantiques, ne peuvent pas occuper le même état quantique, c'est le *principe d'exclusion de Pauli*.

La quantification par les anti-commutateurs est la bonne voie vers la quantification canonique des fermions, car le nombre de particules n dans un état $|n\rangle$ ne peut pas dépasser un ($n = 0, 1$), ce qui est cohérent avec la statistique des fermions de *Fermi-Dirac* et en accord avec le *principe d'exclusion de Pauli*, c.à.d. la quantification canonique à l'aide des anti-commutateurs conduit nécessairement à des fermions.

2.3.2 Quantification du champ de Dirac

Le formalisme de la quantification canonique (par les relations de commutations !) conduit nécessairement à des bosons. En 1928, Jordan et Wigner ont modifié ce formalisme en remplaçant les relations de commutations entre les opérateurs de créations et d'annihilations par des relations d'anti-commutations. Cette modification conduit automatiquement à la statistique de Fermi-Dirac, voir la section précédente.

Considérons l'équation de Dirac libre,

$$(i \not{\partial} - m) \psi(x) = 0. \quad (2.30)$$

La solution de cette équation (développement en ondes planes) s'écrit sous la forme :

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{s=1}^2 [b_s(k) u_s e^{-ik \cdot x} + d_s^\dagger(k) v_s(k) e^{ik \cdot x}]. \quad (2.31)$$

avec l'énergie $\omega_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$, les indices $s = 1, 2$ désignent les deux états de spin, \vec{k} est la quantité de mouvement et b_s (b_s^\dagger) et d_s (d_s^\dagger) sont des *coefficients de superposition*. Le complexe conjugué $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ de ψ est donné par :

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{s=1}^2 [d_s(k) \bar{v}_s e^{-ik \cdot x} + b_s^\dagger(k) \bar{u}_s(k) e^{ik \cdot x}]. \quad (2.32)$$

où $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ et $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$.

On rappelle que les spineurs de Dirac u et v vérifient les relations suivantes (voir le cours de *mécanique quantique relativiste*) :

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \not{p} + m \quad \sum_{s=1}^2 v_s(p) \bar{v}_s(p) = \not{p} - m. \quad (2.33)$$

$$v_{s_1}^\dagger(p) u_{s_2}(p) = 2\omega_p \delta_{s_1 s_2} \quad v_{s_1}^\dagger(p) v_{s_2}(p) = 2\omega_p \delta_{s_1 s_2} \quad (2.34)$$

Pour quantifier le champ de Dirac, on remplace les coefficients de superposition par des opérateurs de créations et d'annihilations, tout comme nous l'avons fait avec l'oscillateur harmonique en mécanique quantique, c.à.d.

$$b_s, d_s \rightarrow \hat{b}_s, \hat{d}_s \quad b_s^\dagger, d_s^\dagger \rightarrow \hat{b}_s^\dagger, \hat{d}_s^\dagger \quad (2.35)$$

et donc les champs ψ et $\bar{\psi}$ deviennent eux aussi des opérateurs

$$\psi, \bar{\psi} \rightarrow \hat{\psi}, \hat{\bar{\psi}} \quad (2.36)$$

On impose les relations d'anti-commutations, suivantes, sur les opérateurs de création (\hat{b}_s^+ , \hat{d}_s^+) et d'annihilation (\hat{b}_s , \hat{d}_s),

$$\begin{aligned}\{\hat{b}_s(k), \hat{b}_{s'}^\dagger(q)\} &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{ss'} \delta^{(3)}(k-q) \\ \{\hat{d}_s(k), \hat{d}_{s'}^\dagger(q)\} &= (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{ss'} \delta^{(3)}(k-q)\end{aligned}\quad (2.37)$$

et

$$\{\hat{b}_s, \hat{b}_{s'}\} = \{\hat{d}_s, \hat{d}_{s'}\} = \{\hat{b}_s, \hat{d}_{s'}\} = \{\hat{b}_s, \hat{d}_{s'}^\dagger\} = 0 \quad (2.38)$$

ce qui implique que :

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\bar{\psi}}(y)\} = (i\vec{\delta} - m)i\Delta(x-y) \quad \{\hat{\psi}(x), \hat{\bar{\psi}}(y)\} = 0 \quad (2.39)$$

avec

$$i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} [e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)}] \quad (2.40)$$

On déduit que l'anti-commutateur à temps égal s'écrit :

$$\{\hat{\psi}(t, \vec{x}), \hat{\bar{\psi}}(t, \vec{y})\} = \gamma^0 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.41)$$

où

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{\pm i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \quad (2.42)$$

Considérons les états d'un fermion $|f, k\rangle_s$ et anti-fermion $|\bar{f}, k\rangle_s$ d'impulsion k et de spin s . Les opérateurs \hat{b}_s et \hat{d}_s annihilent, respectivement, un fermion et anti-fermion de la manière suivante :

$$\hat{b}_s(k)|f, k\rangle_s = |0\rangle \quad \text{annihilation d'un fermion d'impulsion } k \text{ de spin } s \quad (2.43)$$

$$\hat{d}_s(k)|\bar{f}, k\rangle_s = |0\rangle \quad \text{annihilation d'un anti-fermion d'impulsion } k \text{ de spin } s \quad (2.44)$$

Les opérateurs \hat{b}_s et \hat{d}_s annihilent aussi le vide,

$$\hat{b}_s|0\rangle = 0 \quad \hat{d}_s|0\rangle = 0. \quad (2.45)$$

Les opérateurs \hat{b}_s^\dagger et \hat{d}_s^\dagger créent, respectivement, des états d'un fermion et anti-fermion,

$$\hat{b}_s^\dagger(k)|0\rangle = |f, k\rangle_s \quad \text{état d'un fermion d'impulsion } k \text{ de spin } s \quad (2.46)$$

$$\hat{d}_s^\dagger(k)|0\rangle = |\bar{f}, k\rangle_s \quad \text{état d'un anti-fermion d'impulsion } k \text{ de spin } s \quad (2.47)$$

On note aussi que l'opérateur $\hat{\psi}(x)$ détruit un fermion au point x et crée un anti-fermion au même point, c.à.d.

$$\hat{\psi}(x) = \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{s=1}^2 \hat{b}_s(k) u_s e^{-ik \cdot x}}_{=\hat{\psi}^{(+)}(x)} + \underbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{s=1}^2 \hat{d}_s^\dagger(k) v_s(k) e^{ik \cdot x}}_{=\hat{\psi}^{(-)}(x)}. \quad (2.48)$$

$$\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}^{(+)}(x) + \hat{\psi}^{(-)}(x) \quad (2.49)$$

et

$$\hat{\psi}^{(+)}(x)|f, k\rangle_s = |0\rangle \quad \hat{\psi}^{(-)}(x)|0\rangle = |\bar{f}, k\rangle \quad (2.50)$$

avec $\hat{\psi}^{(+)}$ et $\hat{\psi}^{(-)}$ sont, respectivement, les parties avec fréquences (ou énergies) positive et négative de $\hat{\psi}$, donc eux aussi jouent le rôle d'opérateurs de création et annihilation.

L'opérateur $\hat{\psi}(x)$ détruit un anti-fermion au point x et crée un fermion au même point, c.à d.

$$\hat{\psi}(x) = \overbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{s=1}^2 \hat{d}_s(k) \bar{v}_s e^{-ik \cdot x}}^{=\hat{\psi}^{(+)}(x)} + \overbrace{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{s=1}^2 \hat{b}_s^\dagger(k) \bar{u}_s(k) e^{ik \cdot x}}^{=\hat{\psi}^{(-)}(x)} \quad (2.51)$$

$$\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}^{(+)}(x) + \hat{\psi}^{(-)}(x) \quad (2.52)$$

et

$$\hat{\psi}^{(+)}(x) |\bar{f}, k\rangle_s = |0\rangle \quad \hat{\psi}^{(-)}(x) |0\rangle = |f, k\rangle \quad (2.53)$$

L'opérateur charge électrique est définie par

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= q : \int d^3x \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} : \\ &= q : \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_s (\hat{b}_s^\dagger(k) \hat{b}_s(k) + \hat{d}_s^\dagger(k) \hat{d}_s(k)) : \\ &= q \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_s (\hat{b}_s^\dagger(k) \hat{b}_s(k) - \hat{d}_s^\dagger(k) \hat{d}_s(k)) \end{aligned} \quad (2.54)$$

où “::” désigne le **produit normal**².

Exercice :

(1) Montrer que :

$$\hat{Q}|0\rangle = 0 \quad \hat{Q}\hat{b}_s^\dagger|0\rangle = \hat{b}_s^\dagger|0\rangle \quad \hat{Q}\hat{d}_s^\dagger|0\rangle = -q\hat{d}_s^\dagger|0\rangle \quad (2.55)$$

(2) Exprimer l'opérateur hamiltonien en fonction des opérateurs de création et annihilation.

$$H = \int d^3x i\psi^\dagger \partial_0 \psi : \quad (2.56)$$

sachant que $\mathcal{H} = \partial \mathcal{L} / [\partial(\partial_0 \psi)] \partial^0 \psi - \mathcal{L}$.

Propagateur du fermion :

On définit le propagateur de Feynman du fermion \tilde{S}_F comme la valeur moyenne sur le vide du produit chronologique des deux opérateurs $\hat{\psi}$ et $\hat{\bar{\psi}}$, on écrit

$$i\tilde{S}_F(x - x') = \langle 0 | T[\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(x')] | 0 \rangle \quad (2.57)$$

où le T -produit (ou produit chronologique) est défini par :

$$T[\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(x')] = \theta(t - t')\hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(x') - \theta(t' - t)\hat{\bar{\psi}}(x')\hat{\psi}(x) \quad (2.58)$$

$$= \begin{cases} \hat{\psi}(x)\hat{\bar{\psi}}(x') & \text{si } t > t' \\ -\hat{\bar{\psi}}(x')\hat{\psi}(x) & \text{si } t < t' \end{cases} \quad (2.59)$$

la fonction θ est définie par :

$$\theta(t - t') = \begin{cases} 1 & \text{si } t > t' \\ 0 & \text{si } t < t' \end{cases} \quad (2.60)$$

Dans le cas général, le produit chronologique T est défini par :

$$T[\hat{O}(t_1)\hat{O}(t_2)\cdots\hat{O}(t_n)] = \hat{O}(t_{i_1})\hat{O}(t_{i_2})\cdots\hat{O}(t_{i_n}), \quad t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \cdots \geq t_{i_n}. \quad (2.61)$$

2. Le produit normal est défini par : $AB := A^+B^+ - B^-A^+ + A^-B^+ + A^-B^-$ (où A^+, B^+ sont des opérateurs d'annihilation, A^-, B^- sont des opérateurs de création). On introduit le produit normal pour rendre la charge électrique, l'énergie et d'autres quantités physiques du vide nulles.

- Si $t > t'$: dans ce cas, le propagateur s'écrit :

$$\begin{aligned} <0|\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(x')|0> &= i\tilde{S}_F^+(x-x') \\ &\propto <0|\hat{b}_s(k)\hat{b}_s^\dagger(k')|0> \end{aligned} \quad (2.62)$$

On peut interpréter le propagateur, dans ce cas, comme la création d'un fermion à l'instant t' ($\hat{b}_s^\dagger(k')|0>$) et puis sa destruction à l'instant t . Donc, un fermion se propage du point x' au point x .

$$x' \bullet \longrightarrow \bullet x \equiv i\tilde{S}_F^+(x-x') \quad (2.63)$$

- Si $t < t'$: dans ce cas, le propagateur s'écrit :

$$\begin{aligned} <0|\hat{\psi}^\dagger(x')\hat{\psi}(x)|0> &= i\tilde{S}_F^-(x-x') \\ &\propto <0|\hat{d}_s(k')\hat{d}_s^\dagger(k)|0> \end{aligned} \quad (2.64)$$

On peut interpréter le propagateur, dans ce cas, comme la création d'un anti-fermion à l'instant t ($\hat{d}_s^\dagger(k)|0>$) et puis sa destruction à l'instant t . Donc, un anti-fermion se propage du point x au point x' .

$$x \bullet \longleftarrow \bullet x' \equiv i\tilde{S}_F^-(x-x') \quad (2.65)$$

Donc, le propagateur \tilde{S}_F décrit la propagation d'un fermion du point x' au point x ou la propagation d'un anti-fermion du point x au point x' . On peut interpréter le propagateur comme une fonction de Green car il satisfait l'équation différentielle suivante :

$$(i\not{\partial} - m)\tilde{S}_F(x-x') = i\delta^{(4)}(x-x') \quad (2.66)$$

En pratique, on a besoin de l'expression du propagateur dans l'espace des impulsions. La transformée de Fourier du propagateur s'écrit

$$\tilde{S}_F(x-x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-x')} S_F(k) \quad (2.67)$$

On remplace dans l'équation de Green éq. (2.66), on montre que :

$$S_F(k) = \frac{i}{k-m} = i \frac{k+m}{k^2 - m^2} \quad (2.68)$$

Remarque : Le propagateur $S_F(k)$ est mal défini à cause du pole $k^2 = m^2$ (si le fermion est sur couche de masse ou on-shell). Pour éviter ce problème, on contourne le pole par une déformation de contour. On écrit donc,

$$S_F(k) = \frac{i}{k-m} = i \frac{k+m}{k^2 - m^2 + i\lambda} \quad (2.69)$$

le choix de $+i\lambda$ est imposé par la causalité.

Exercice 2 :

- (1) Montrer que $\tilde{S}_F(x-x')$ vérifie l'équation (2.66) (utiliser la relation (2.41) et $\frac{d\theta(t-t')}{t} = \delta(t-t')$).
- (2) Montrer que la prescription " $+i\lambda$ " est le bon choix et pas " $-i\lambda$ ".

2.3.3 Quantification du champ de Maxwell

L'équation du mouvement du champs du photon est³ :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{photon libre} \\ -e\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) & \text{interaction} \end{cases} \quad (2.70)$$

Ces équations sont covariantes (transformation de Lorentz) et invariantes sous la transformation de jauge $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta(x)$ et $\psi' = e^{-iq\theta(x)}\psi$. Le champ A_μ est un 4-vecteur (quadrupotiel), il s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

donc, en principe, il a 4 degrés de libertés. Mais, le photon physique ne possède que 2 degrés de libertés qui correspondent à ses deux états de polarisations transverses⁴.

Le champs A_μ n'a pas un sens physique car il n'est pas défini d'une manière unique, car une transformation de jauge de type $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta(x)$ ne va pas changer le tenseur $F_{\mu\nu}$ et donc l'équation du mouvement de ce champ. Pour éliminer les degrés de libertés superficiels et obtenir les équations de Maxwell à partir de l'équation (2.70), on doit fixer la jauge. Par exemple, on peut imposer la contrainte suivante sur le champ A_μ :

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0. \quad (2.71)$$

cette condition est appelée la jauge de Lorentz (c'est une jauge covariante). Il existe d'autres choix de fixation de jauge qu'on peut utiliser (et qui ne change pas la physique). Par exemple,

$$\text{la jauge de Coulomb :} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.72)$$

$$\text{la jauge temporelle :} \quad A_0 = 0 \quad (2.73)$$

$$\text{la jauge axiale :} \quad n^\mu A_\mu = 0 \quad (\text{où } n \text{ est un 4-vecteur arbitraire}) \quad (2.74)$$

Maintenant, on va quantifier le champs de Maxwell libre. En premier lieu, on ne fixe pas la jauge. On impose les relations de commutation à temps égal sur les champs de jauge A_μ et sont conjugué $\pi_\mu = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial^0 A^\mu)$,

$$[A_\mu(x), \pi_\nu(y)] = ig_{\mu\nu}\delta^3(x - y) \quad (2.75)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)] = [\pi_\mu(x), \pi_\nu(y)] = 0 \quad (2.76)$$

mais

$$\pi_\nu = -F_{0\nu} = -\partial_0 A_\nu + \partial_\nu A_0 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 0. \quad (2.77)$$

Ce qui conduit à une contradiction avec la relation (2.75) :

$$[A_0(x), \pi_0(y)] = [A_0(x), 0] = 0 \neq i\delta^3(x - y)! \quad (2.78)$$

Exercice 3 :

(1) Dériver l'équation de mouvement (2.70).

(2) Résoudre (2.70) et montrer que tous les choix de fixation de jauge sont équivalents.

(3) Montrer que $\pi_\nu = -F_{0\nu}$.

3. Utiliser les équations d'Euler-Lagrange et le lagrangien (2.3) pour dériver l'équation du mouvement du champ de jauge A_μ (2.70).

4. Les ondes électromagnétiques sont des ondes transverses, c.à.d. les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont toujours orthogonaux au vecteur d'onde \vec{k} .

Solution de l'exercice :

(1) L'équation d'Euler-Lagrange pour le champ A_μ est

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0 \quad (2.79)$$

où \mathcal{L} est donné par l'éq. (2.3). On a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (F_{\alpha\beta})}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu - \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu) F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}) \equiv F^{\mu\nu} \quad (2.80)$$

d'où l'équation du mouvement $\partial_\nu F^{\mu\nu} = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

(2) Voir le paragraphe suivant.

(3) Le champ conjugué de A_μ est,

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 A^\mu)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial (\partial^0 A^\mu)} F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\delta_0^\alpha \delta_\mu^\beta - \delta_0^\beta \delta_\mu^\alpha) F_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (F_{0\mu} - F_{\mu 0}) \equiv -F_{0\mu} \quad (2.81)$$

Le problème est dû au fait que A_μ n'est pas unique (car $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta$). Pour résoudre ce problème, Gupta-Bleuler ont proposé la méthode de fixation de jauge. On impose la jauge de Lorentz par exemple. Alors, la densité lagrangienne du champ de Maxwell libre s'écrit dans ce cas,

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (2.82)$$

où $\frac{1}{2\alpha}$ est un multiplicateur de Lagrange et $(\partial_\mu A^\mu)^2$ est le terme de fixation de jauge. Recalculons, maintenant, le champ conjugué

$$\pi_\nu(x) = F_{\nu 0}(x) - (1/\alpha) g_\nu^0 \partial_\mu A^\mu(x) \quad (2.83)$$

Dans ce cas, la composante 0 du champ π n'est pas nulle,

$$\begin{aligned} \pi_0(x) &= F_{00}(x) - (1/\alpha) g_0^0 \partial_\mu A^\mu(x) \\ &= -(1/\alpha) \partial_\mu A^\mu(x) \\ &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

On peut montrer facilement que l'équation du mouvement du champs A_μ , dans ce cas, devient

$$\partial^2 A_\mu - (1 - 1/\alpha) \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (2.85)$$

Dans la jauge de Feynman, on choisit $\alpha = 1$ ⁵. Alors,

$$\partial^2 A_\mu = 0. \quad (2.86)$$

La dernière équation est de type Klein-Gordon, sa solution s'écrit sous la forme :

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{\kappa=0}^3 [a^{(\kappa)} \varepsilon_\mu^{(\kappa)} e^{-ik \cdot x} + a^{\dagger(\kappa)} \varepsilon_\mu^{*(\kappa)} e^{ik \cdot x}] \quad (2.87)$$

où $\omega_k = |\vec{k}|$ est l'énergie. Les 4-vecteurs ε_μ sont orthonormalisés, donc on peut choisir la base suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_\mu^{(0)} = (1, 0, 0, 0) & \text{vecteur de polarisation scalaire} \\ \varepsilon_\mu^{(1)} = (0, 1, 0, 0) & \text{vecteur de polarisation transverse} \\ \varepsilon_\mu^{(2)} = (0, 0, 1, 0) & \text{vecteur de polarisation transverse} \\ \varepsilon_\mu^{(3)} = (0, 0, 0, 1) & \text{vecteur de polarisation longitudinale} \end{array} \right. \quad (2.88)$$

5. La physique est indépendante du paramètre α .

Si on se place dans le repère où le photon est longitudinale, c.à.d. $k = (0, 0, 0, \omega_k)$, ce qui est équivalent à $\vec{e}^{(3)} \equiv \vec{k}/|\vec{k}|$, et on écrit les trois derniers vecteurs de polarisation dans (2.88) sous la forme : $\epsilon_\mu^{(\kappa)} = (0, \vec{e}^{(\kappa)})$ pour $r = 1, 2, 3$. On montre que les 3-vecteurs vérifient :

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{e}^{(\kappa)} &= 0 & \text{pour} & \kappa = 1, 2 \\ \vec{e}^{(\kappa)} \cdot \vec{e}^{(\kappa')} &= \delta_{\kappa\kappa'} & \text{pour} & \kappa, \kappa' = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.89)$$

et les 4-vecteurs vérifient :

$$\epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon^{(\kappa')\mu} = \epsilon^{(\kappa)} \cdot \epsilon^{(\kappa')} = g_{\kappa\kappa'} \quad \sum_{\kappa=0}^3 \zeta_\kappa \epsilon_\mu^{(\kappa)} \epsilon_\nu^{(\kappa)} = -g_{\mu\nu}. \quad (2.90)$$

avec $\zeta_0 = -1$ et $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1$.

Remarque :

Seules les polarisations transverses d'un photon libre sont observées. Elles correspondent aux deux degrés de liberté physiques du photon et sont données par :

$$\epsilon_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_\mu^{(1)} + i \epsilon_\mu^{(2)}) \quad (2.91)$$

Si \vec{k} est orienté suivant l'axe z , les polarisations transverses du photon libre deviennent :

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = |s, s_z\rangle = |1, +1\rangle, \\ \epsilon_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = |s, s_z\rangle = |1, -1\rangle \end{aligned} \quad (2.92)$$

Les polarisations scalaire et longitudinale ne sont pas observées. Elles ne contribuent pas à l'énergie du photon. L'exercice suivant montre que les polarisations non-physiques ne contribuent pas à l'énergie du photon.

Exercice 4 : polarisations physiques vs polarisations non-physiques

(1) Montrer que les opérateurs $\hat{a}^{(\kappa)}$ et $\hat{a}^{\dagger(\kappa)}$ vérifient les relations de commutations suivantes :

$$[\hat{a}^{(\kappa)}(k), \hat{a}^{\dagger(\kappa')}(k')] = -g^{\kappa\kappa'} \delta^3(k - k') \quad (2.93)$$

$$[\hat{a}^{(\kappa)}(k), \hat{a}^{(\kappa')}(k')] = [\hat{a}^{\dagger(\kappa)}(k), \hat{a}^{\dagger(\kappa')}(k')] = 0 \quad (2.94)$$

(2) Calculer la densité hamiltonienne et montrer que seule les photons transverses qui contribuent à l'énergie, rappelons que :

$$\hat{H} =: \int d^3x (\pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}) : \quad (2.95)$$

Solution :

Après la quantification, le champ A_μ devient un opérateur, on écrit donc :

$$\hat{A}_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{\kappa=0}^3 [\hat{a}^{(\kappa)}(k) \epsilon_\mu^{(\kappa)}(k) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}^{\dagger(\kappa)}(k) \epsilon_\mu^{*(\kappa)}(k) e^{ik \cdot x}] \quad (2.96)$$

$$= \hat{A}_\mu^+(x) + \hat{A}_\mu^-(x) \quad (2.97)$$

avec

$$\hat{A}_\mu^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{\kappa=0}^3 \hat{a}^{(\kappa)}(k) \varepsilon_\mu^{(\kappa)}(k) e^{-ik \cdot x}, \quad \hat{A}_\mu^-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{\kappa=0}^3 \hat{a}^{*(\kappa)}(k) \varepsilon_\mu^{*(\kappa)}(k) e^{ik \cdot x} \quad (2.98)$$

où $\hat{a}^{(\kappa)}(k)$ et $\hat{A}_\mu^+(x)$ annihilent un photon d'impulsion k et de polarisation κ ($\kappa = 0, 1, 2, 3$), c.à.d.

$$\hat{a}^{(\kappa)}(k) |0\rangle = 0, \quad \hat{A}_\mu^+(x) |0\rangle = 0. \quad (2.99)$$

et $\hat{a}^{*(\kappa)}(k)$ et $\hat{A}_\mu^-(x)$ créent un photon d'impulsion k et de polarisation κ ($\kappa = 0, 1, 2, 3$), c.à.d.

$$\hat{a}^{*(\kappa)}(k) |0\rangle = |1_\kappa(k)\rangle. \quad (2.100)$$

où $|0\rangle$ est le vide et $|1_\kappa(k)\rangle$ est l'état d'un photon de polarisation κ et d'impulsion k .

On exprime l'hamiltonien en fonction de $\hat{\pi}_\mu$ et \hat{A}_μ , on trouve :

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \int d^3x : \hat{\pi}^\mu \hat{\pi}_\mu + (\vec{\nabla} \hat{A}_\mu) \cdot (\vec{\nabla} \hat{A}^\mu) : \quad (2.101)$$

avec

$$\hat{\pi}_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sum_{\kappa=0}^3 [\hat{a}^{(\kappa)}(k) \varepsilon_\mu^{(\kappa)}(k) e^{-ik \cdot x} - \hat{a}^{*(\kappa)}(k) \varepsilon_\mu^{*(\kappa)}(k) e^{ik \cdot x}] \quad (2.102)$$

$$= \hat{A}_\mu^+(x) + \hat{A}_\mu^-(x) \quad (2.103)$$

On suppose que les relations de commutations (2.94) sont vérifiées (voir [7] par exemple). L'opérateur hamiltonien s'exprime en fonction des opérateurs de création et annihilation comme suit :

$$\hat{H} = \int d^3k \omega_k \sum_{\kappa=0}^3 \zeta_\kappa \hat{a}^{*(\kappa)}(k) \hat{a}^{(\kappa)}(k) \quad (2.104)$$

où $\zeta_0 = -1$ et $\zeta_\kappa = 1$ pour $\kappa = 1, 2, 3$.

Agissant, maintenant, l'opérateur \hat{H} sur l'état $|1_\kappa(k)\rangle$, alors

$$\begin{aligned} \hat{H} |1_\kappa(k)\rangle &= \int d^3q \omega_q \sum_{\rho=0}^3 \zeta_\rho \hat{a}^{*(\rho)}(q) \hat{a}^{(\rho)}(q) \hat{a}^{*(\kappa)}(k) |0\rangle \\ &= \omega_k \hat{a}^{*(\kappa)}(k) |0\rangle \end{aligned} \quad (2.105)$$

Donc, l'énergie d'un photon scalaire, longitudinal ou transverse est ω_κ . Ce problème est résolut par Gupta et Bleuler en remplaçant la condition de Lorentz par :

$$\partial^\mu A_\mu^+(x) |\psi\rangle = 0, \quad \langle \psi | \partial^\mu A_\mu^-(x) = 0. \quad (2.106)$$

et donc

$$\langle \psi | \partial^\mu A_\mu(x) | \psi \rangle = \langle \psi | \partial^\mu A_\mu^+(x) + \partial^\mu A_\mu^-(x) | \psi \rangle = 0 \quad (2.107)$$

Cette condition assure que la condition de Lorentz et les équations de Maxwell sont la limite classique de cette théorie. En fonction des opérateurs de création et annihilation, les contraintes eqs. (2.106) deviennent :

$$[a^{\dagger(3)}(k) - a^{\dagger(0)}(k)]|\psi\rangle = 0, \quad \langle\psi|[a^{\dagger(3)}(k) - a^{\dagger(0)}(k)] = 0 \quad (2.108)$$

or

$$\langle\psi|[a^{\dagger(3)}(k) - a^{\dagger(0)}(k)] \times [a^{\dagger(3)}(k) - a^{\dagger(0)}(k)]|\psi\rangle = \langle\psi|a^{\dagger(3)}(k)a^{(3)}(k) - a^{\dagger(0)}(k)a^{(3)}(k)|\psi\rangle = 0 \quad (2.109)$$

Calculons la valeur moyenne de \hat{H} , on a :

$$\begin{aligned} \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle &= \int d^3k \omega_k \sum_{\kappa=0}^3 \langle\psi|\zeta_\kappa \hat{a}^{(\kappa)}(k) a^{(\kappa)}(k)|\psi\rangle \\ &= \int d^3k \omega_k \langle\psi| -\hat{a}^{\dagger(0)}(k) a^{(0)}(k) + \hat{a}^{\dagger(3)}(k) a^{(3)}(k) + \sum_{\kappa=1,2} \hat{a}^{(\kappa)}(k) a^{(\kappa)}(k)|\psi\rangle \\ &= \int d^3k \omega_k \sum_{\kappa=1,2} \langle\psi|\hat{a}^{(\kappa)}(k) a^{(\kappa)}(k)|\psi\rangle \end{aligned} \quad (2.110)$$

L'expression de l'énergie du système, obtenue après calcul, montre que seuls les termes correspondant aux photons transverses (polarisations $\kappa = 1, 2$) contribuent à l'énergie totale.

Propagateur du photon :

Le propagateur du photon est défini par

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(x - x') = \langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(x')]|0\rangle \quad (2.111)$$

avec

$$T[A_\mu(x)A_\nu(x')] = \theta(t - t')A_\mu(x)A_\nu(x') - \theta(t' - t)A_\nu(x')A_\mu(x) \quad (2.112)$$

Le propagateur $\tilde{D}_{\mu\nu}$ est une fonction de Green, il vérifie l'équation différentielle suivante :

$$[\partial^2 g_{\mu\nu} - (1 - 1/\alpha)\partial_\mu\partial_\nu]\tilde{D}^{\nu\sigma}(x - x') = ig_\mu^\sigma\delta^{(4)}(x - x') \quad (2.113)$$

La transformé de Fourier de $\tilde{D}_{\mu\nu}(x - x')$ est

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x - x')} G_{\mu\nu}(k). \quad (2.114)$$

Alors,

$$[-k^2 g_{\mu\nu} + (1 - 1/\alpha)k_\mu k_\nu]G^{\nu\sigma}(k) = ig_\mu^\sigma. \quad (2.115)$$

on montre que

$$G_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\lambda} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\lambda} \right] \quad (2.116)$$

dans la jauge de Feynman $\alpha = 1$, le propagateur devient

$$G_{\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\lambda} \quad (2.117)$$

dans la jauge de Landau $\alpha = 0$, le propagateur devient

$$G_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\lambda} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\lambda} \right] \quad (2.118)$$

2.4 Matrice S et Règles de Feynman

2.4.1 Définition de la matrice S

La matrice \hat{S} est un opérateur qui donne la probabilité de transition d'un état initial $|i\rangle$ à un état final $|f\rangle$. Pour assurer la conservation de la probabilité, l'opérateur \hat{S} doit être unitaire $\hat{S}\hat{S}^\dagger = 1$. Un élément de cette matrice s'écrit :

$$S_{fi} = \langle f | \hat{S} | i \rangle \quad \text{où} \quad \sum_f |S_{fi}|^2 = 1. \quad (2.119)$$

L'expansion de Dyson de la matrice \hat{S} , dans le cas général, est :

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \cdots \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1)\mathcal{H}_I(x_2) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)\} \quad (2.120)$$

où $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$ est la densité hamiltonienne d'interaction. Rappelons que :

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I & \mathcal{L}_I = -e : \bar{\psi} \not{A} \psi : \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I & \mathcal{H}_I = e : \bar{\psi} \not{A} \psi : \end{cases} \quad (2.121)$$

2.4.2 Théorème de Wick

On rappelle que le produit normal de deux opérateurs A et B est défini par :

$$:AB: = \begin{cases} A^+B^+ - B^-A^+ + A^-B^+ + A^-B^- & A \text{ et } B \text{ sont des opérateurs fermioniques} \\ A^+B^+ + B^-A^+ + A^-B^+ + A^-B^- & \text{autres} \end{cases} \quad (2.122)$$

où $A^+(B^+)$ sont des opérateurs d'annihilation et $A^-(B^-)$ sont des opérateurs de création. Pour deux champs scalaires et deux spineurs de Dirac, respectivement, le produit normal est défini par :

$$:\phi(x)\phi(y): = \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y). \quad (2.123)$$

$$:\psi(x)\psi(y): = \psi^{(-)}(x)\psi^{(-)}(y) - \psi^{(-)}(y)\psi^{(+)}(x) + \psi^{(+)}(x)\psi^{(+)}(y) + \psi^{(-)}(x)\psi^{(+)}(y). \quad (2.124)$$

où \hat{O}^+ et \hat{O}^- sont, respectivement, les opérateurs d'annihilation et de création.

On peut écrire aussi :

$$AB - :AB: = \begin{cases} \{A^+, B^-\} & A \text{ et } B \text{ sont des opérateurs fermioniques} \\ [A^+, B^-] & \text{autres} \end{cases} \quad (2.125)$$

Le commutateur et l'anti-commutateur sont des scalaires, alors, on peut montrer que :

$$\langle 0 | AB | 0 \rangle = \begin{cases} \{A^+, B^-\} & \text{fermions} \\ [A^+, B^-] & \text{bosons} \end{cases} \quad (2.126)$$

Le produit chronologique de deux opérateurs s'écrit sous la forme :

$$T[A(x_1)B(x_2)] =: A(x_1)B(x_2) : + \langle 0 | T[A(x_1)B(x_2)] | 0 \rangle \quad (2.127)$$

On introduit la notion de contraction de deux opérateurs. La valeur moyenne sur le vide du produit chronologique de A et B ($\langle 0 | T[A(x_1)B(x_2)] | 0 \rangle$) est donné par la contraction des deux opérateurs A et B , on écrit donc

$$\underbrace{A(x_1)B(x_2)}_{=} = \langle 0 | T[A(x_1)B(x_2)] | 0 \rangle \quad (2.128)$$

Les contraction non nulles sont les propagateurs de Feynman. Pour la QED, les contraction non nulles sont les suivantes :

$$\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}_{\psi} = -\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) = i\tilde{S}_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}}{k - m + i\lambda} \quad (2.129)$$

$$\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)}_{A} = i\tilde{D}(x_1 - x_2) = g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)} \left(\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\lambda} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\lambda} \right) \quad (2.130)$$

La généralisation du T -produit (théorème de Wick) :

$$\begin{aligned}
 T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\cdots\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C}\cdots\hat{X}\hat{Y}\hat{Z} : \\
 &+ :\hat{A}\hat{B}\hat{C}\cdots\hat{X}\hat{Y}\hat{Z} : + \cdots + :\hat{A}\hat{B}\hat{C}\cdots\hat{Y}\hat{Z} : \\
 &+ :\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\cdots\hat{X}\hat{Y}\hat{Z} : + \cdots + :\hat{A}\hat{B}\hat{C}\cdots\hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z} : \\
 &+ \text{somme sur les contractions triples} \\
 &+ \text{somme sur toutes les contractions supérieures!}
 \end{aligned} \tag{2.131}$$

Par exemple,

$$T[\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)] =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : + :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : \tag{2.132}$$

$$\begin{aligned}
 T[\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)] &=: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) : + :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) : \\
 &+ :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) : + :\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) :
 \end{aligned} \tag{2.133}$$

2.4.3 Matrice S et Règles de Feynman

Revenons, maintenant, à la matrice S , voir eq. (2.120). En QFD, elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \hat{S} &= \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int \cdots \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n T\{ :\bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_1} :\bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_2} \cdots :\bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_n} \}
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

On note qu'on peut remplacer le T -produit dans (2.134) par :

$$T\{ :\bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_1} :\bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_2} \cdots :\bar{\psi} \not{A} \psi :_{x_n} \} = T\{ (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} \cdots (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_n} \} \tag{2.135}$$

Regardons, maintenant, le premier ordre de l'opérateur \hat{S} . Il s'écrit,

$$\begin{aligned}
 \hat{S}^{(1)} &= -ie \int d^4x T\{ :\bar{\psi} \not{A} \psi : \} \\
 &= -ie \int d^4x T\{ :\bar{\psi}^+ \not{A}^+ \psi^+ + \bar{\psi}^+ \not{A}^+ \psi^- + \cdots + \bar{\psi}^- \not{A}^- \psi^- : \} \\
 &= -ie \int d^4x [\bar{\psi}^+ \not{A}^+ \psi^+ + \bar{\psi}^+ \not{A}^+ \psi^- + \cdots + \bar{\psi}^- \not{A}^- \psi^-]
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

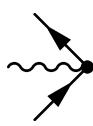
Considérons l'état $|e^-, e^+, \gamma\rangle$ et l'opérateur $\bar{\psi}^+ \not{A}^+ \psi^+$,

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}^+ \not{A}^+ \psi^+ |e^-, e^+, \gamma\rangle &= \bar{\psi}^+ \not{A}^+ |0, e^+, \gamma\rangle \\
 &= \bar{\psi}^+ |0, e^+, 0\rangle \\
 &= |0, 0, 0\rangle
 \end{aligned} \tag{2.137}$$

on peut interpréter cette opération comme l'annihilation d'un électron, positron et un photon.

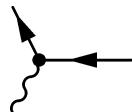
Schématiquement, $\hat{S}^{(1)}$ décrit 8 processus (tous sont non-physique car l'énergie ne peut être conservée). Voici les 8 processus basiques de la QED :

- Annihilation d'un électron et un positron et absorption d'un photon au point x :



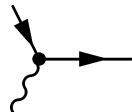
$$(-ie)\bar{\psi}^+ \not{A}^+ \psi^+ \tag{2.138}$$

- Annihilation d'un positron et absorption d'un photon au point x et création d'un positron :



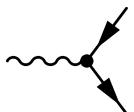
$$(-ie)\bar{\psi}^+ \mathcal{A}^+ \psi^- \quad (2.139)$$

- Annihilation d'un électron et absorption d'un photon au point x et création d'un électron :



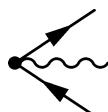
$$(-ie)\bar{\psi}^- \mathcal{A}^+ \psi^+ \quad (2.140)$$

- Absorption d'un photon au point x et création d'un électron et un positron :



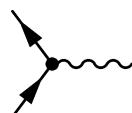
$$(-ie)\bar{\psi}^- \mathcal{A}^+ \psi^- \quad (2.141)$$

- Création d'un électron et positron et émission d'un photon au point x :



$$(-ie)\bar{\psi}^- \mathcal{A}^- \psi^- \quad (2.142)$$

- Émission d'un photon et annihilation d'un électron et un positron au point x :



$$(-ie)\bar{\psi}^+ \mathcal{A}^- \psi^+ \quad (2.143)$$

- Émission d'un photon et création d'un électron et annihilation d'un électron :



$$(-ie)\bar{\psi}^- \mathcal{A}^- \psi^+ \quad (2.144)$$

- Émission d'un photon et création d'un positron et annihilation d'un positron :



$$(-ie)\bar{\psi}^+ \mathcal{A}^- \psi^- \quad (2.145)$$

Règles de Feynman dans l'espace des configurations

- Absorption d'un électron au point x :



$$\hat{\psi}^+(x) \quad (2.146)$$

- Absorption d'un positron au point x :



$$\hat{\psi}^+(x) \quad (2.147)$$

- Émission d'un électron au point x :



$$\hat{\psi}^-(x) \quad (2.148)$$

- Émission d'un positron au point x :



$$\hat{\psi}^-(x) \quad (2.149)$$

□ Absorption d'un photon au point x :

$$\mu \sim \bullet x \quad A_\mu^+(x) \quad (2.150)$$

□ Émission d'un photon au point x :

$$x \bullet \sim \mu \quad A_\mu^-(x) \quad (2.151)$$

□ Propagation d'un électron du point x_1 au point x_2 :

$$x_1 \bullet \rightarrow x_2 \quad i\tilde{S}_F(x_1 - x_2) \quad (2.152)$$

□ Propagation d'un photon du point x_1 au point x_2 :

$$x_1 \bullet \sim \bullet x_2 \quad i\tilde{D}_{\mu\nu}(x_1 - x_2) \quad (2.153)$$

□ Vertex électron-électron-photon :



$$(2.154)$$

Processus à l'ordre de Born :

Considérons l'ordre 2 de la matrice S ,

$$\hat{S}^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T\{ : \bar{\psi}(x_1) \not{A}(x_1) \psi(x_1) : : \bar{\psi}(x_2) \not{A}(x_2) \psi(x_2) : \} \quad (2.155)$$

D'après le théorème de Wick, on ne prend pas en compte les contraction dans le même point de l'espace-temps et les contractions suivantes sont nulles,

$$\langle 0 | T[\hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2)] | 0 \rangle = \langle 0 | T[\hat{\bar{\psi}}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(x_2)] | 0 \rangle = 0. \quad (2.156)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \hat{S}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \psi(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \} \equiv \hat{S}_1^{(2)} \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \} \equiv \hat{S}_2^{(2)} \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \} \equiv \hat{S}_3^{(2)} \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \} \equiv \hat{S}_4^{(2)} \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \} \equiv \hat{S}_5^{(2)} \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \} \equiv \hat{S}_6^{(2)} \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \} \equiv \hat{S}_7^{(2)} \\ &+ \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \} \equiv \hat{S}_8^{(2)} \end{aligned} \quad (2.157)$$

$$= \hat{S}_1^{(2)} + \hat{S}_2^{(2)} + \hat{S}_3^{(2)} + \hat{S}_4^{(2)} + \hat{S}_5^{(2)} + \hat{S}_6^{(2)} + \hat{S}_7^{(2)} + \hat{S}_8^{(2)} \quad (2.158)$$

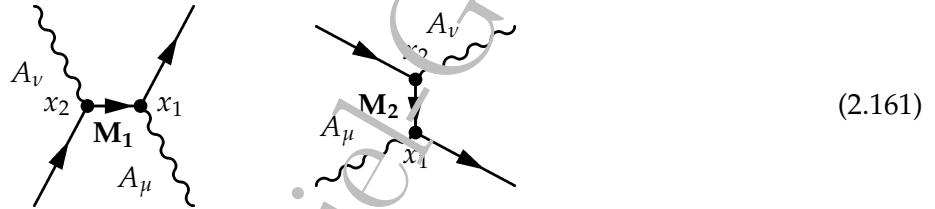
On peut montrer que $\hat{S}_2^{(2)} = \hat{S}_3^{(2)}$, alors,

$$\begin{aligned}\hat{S}_2^{(2)} + \hat{S}_3^{(2)} &= (-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \} \\ &= i(-ie)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \tilde{S}_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \}\end{aligned}\quad (2.159)$$

En développant cet élément en fonction des fréquences positive et négative des champs, cet élément de la matrice peut décrire plusieurs processus tout dépend de l'état initial et final.

- **Diffusion Compton** : $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$

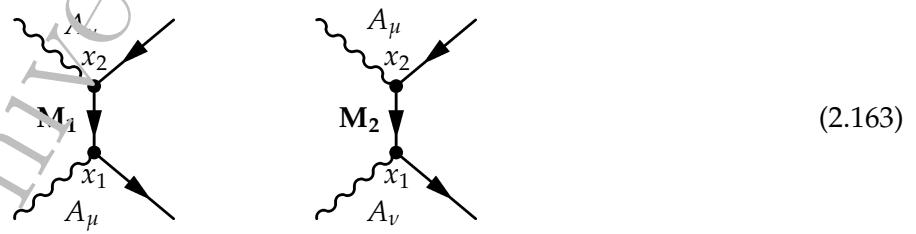
$$\begin{aligned}\hat{S}_{e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma}^{(2)} &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu i \tilde{S}_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi^+(x_2) A_\mu^+(x_1) A_\nu^+(x_2) : \} \rightarrow M_1 \\ &\quad - e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu i \tilde{S}_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi^+(x_2) A_\mu^+(x_1) A_\nu^-(x_2) : \} \rightarrow M_2\end{aligned}\quad (2.160)$$



La première ligne de (2.160) est représenté par le diagramme M_1 et le dixième est représenté par le diagramme M_2 .

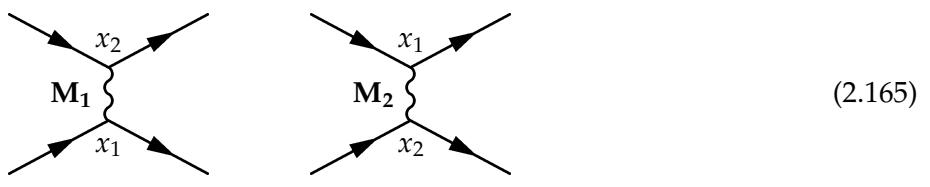
- **Processus** : $2\gamma \rightarrow e^- e^+$

$$\begin{aligned}\hat{S}_{2\gamma \rightarrow e^- e^+}^{(2)} &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu i \tilde{S}_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi^-(x_2) A_\mu^+(x_1) A_\nu^+(x_2) : \} \\ &\quad - e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu i \tilde{S}_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu \psi^-(x_2) A_\nu^+(x_1) A_\mu^+(x_2) : \}\end{aligned}\quad (2.162)$$



- **Processus** : $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$

$$\hat{S}_{2e^- \rightarrow 2e^-}^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\mu \psi^+(x_1) \bar{\psi}^-(x_2) \gamma^\nu \psi^+(x_2) : i \tilde{D}_{\mu\nu}(x_1 - x_2) \}\quad (2.164)$$



- **Diagrammes à une et à deux boucles** : les éléments de la matrices S , c.f. eq.(2.158), $S_5^{(2)}$ ($\hat{S}_6^{(2)}$), $\hat{S}_7^{(2)}$ et $\hat{S}_8^{(2)}$ sont représentés, respectivement, par les diagrammes de Feynman suivants :



2.4.4 Règles de Feynman en QED dans l'espace des impulsions

- Fermion entrant avec une impulsion p :



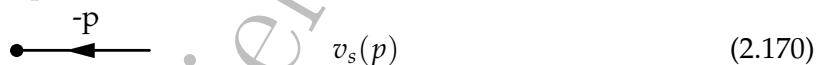
- Fermion sortant avec une impulsion p :



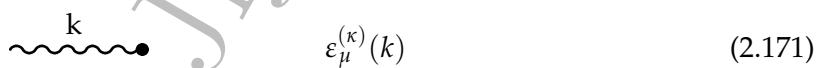
- Anti-fermion entrant avec une impulsion p :



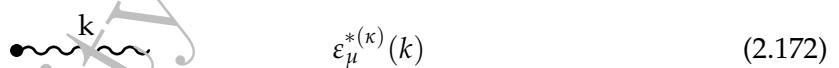
- Anti-fermion sortant avec une impulsion p :



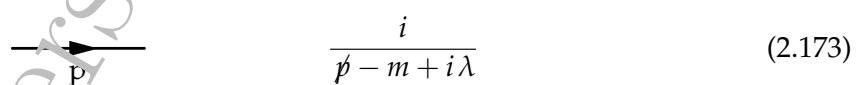
- Photon entrant avec une impulsion k :



- Photon sortant avec une impulsion k :



- Propagateur du fermion :



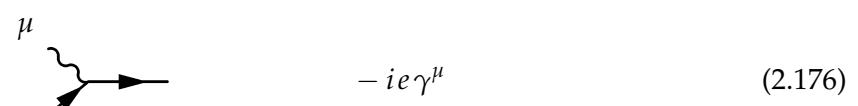
- Propagateur du photon :

$$\mu \text{---} \text{---} \text{---} \nu \quad \frac{-i}{k^2 + i\lambda} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\lambda} \right) \quad (2.174)$$

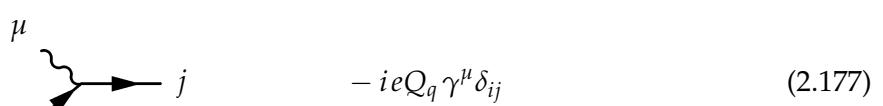
Dans la jauge de Feynman, on pose $\alpha = 1$. Donc le propagateur du photon devient,

$$\mu \text{---} \text{---} \text{---} \nu \quad \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\lambda} \quad (2.175)$$

- Vertex fermion-fermion-photon :



- Vertex quark-quark-photon :



où i, j désignent les couleurs des quarks et Q_q est la fraction de charge des quarks ($Q_q = 2/3$ pour les quarks up et $Q_q = -1/3$ pour les quarks down).

2.5 Calcul des processus à l'ordre de Born

Pour calculer les carrés des amplitudes, on utilise les relations suivantes :

$$\sum_{s=1}^2 u_s(k) \bar{u}_s(k) = \not{k} + m, \quad \sum_{s=1}^2 v_s(k) \bar{v}_s(k) = \not{k} - m \quad (2.178)$$

$$\sum_{s=1}^2 (u_s(k))_i (\bar{u}_s(k))_j = (\not{k} + m)_{ij}, \quad \sum_{s=1}^2 (v_s(k))_i (\bar{v}_s(k))_j = (\not{k} - m)_{ij} \quad (2.179)$$

(2.180)

et

$$\sum_{\kappa} \epsilon_{\mu}^{(\kappa)}(k) \epsilon_{\nu}^{*(\kappa)}(k) = -g_{\mu\nu} \quad (2.181)$$

Contraction sur les indices de Lorentz :

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu} \gamma_{\mu} &= 4 \\ \gamma^{\mu} \gamma_{\alpha} \gamma_{\mu} &= -2 \gamma_{\alpha} \\ \gamma^{\mu} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \gamma_{\mu} &= 4 g_{\alpha\beta} \\ \gamma^{\mu} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} &= -2 \gamma_{\sigma} \gamma_{\beta} \gamma_{\alpha} \end{aligned} \quad (2.182)$$

Traces des matrices de Dirac :

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu} \gamma^{\nu}) = 4g^{\mu\nu} \quad (2.183)$$

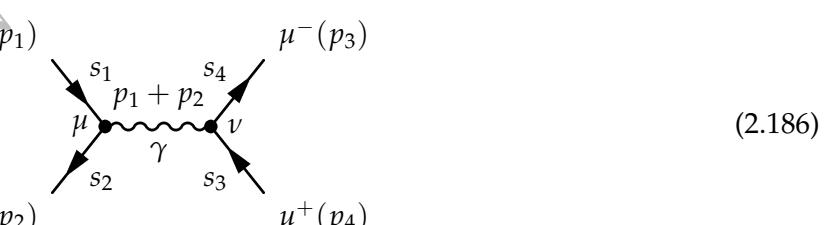
$$\text{Tr}(\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\sigma} \gamma^{\lambda}) = 4(g^{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \quad (2.184)$$

2.5.1 Crédit d'une paire de leptons : $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

Considérons la réaction suivante :

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4) \quad (2.185)$$

Le diagramme de Feynman décrivant cette réaction est le suivant :



L'amplitude correspondante s'écrit,

$$\begin{aligned} M &= \frac{ie^2}{(p_1 + p_2)^2 + i\lambda} \bar{v}_{s_2}(p_2) \gamma^{\mu} u_{s_1}(p_1) \bar{u}_{s_3}(p_3) \gamma^{\nu} v_{s_4}(p_4) g_{\mu\nu} \\ &= \frac{ie^2}{(p_1 + p_2)^2 + i\lambda} \bar{v}_{s_2}(p_2) \gamma^{\mu} u_{s_1}(p_1) \bar{u}_{s_3}(p_3) \gamma_{\mu} v_{s_4}(p_4) \end{aligned} \quad (2.187)$$

Le complexe conjugué est donné par,

$$\bar{M} = \frac{-ie^2}{(p_1 + p_2)^2 + i\lambda} \bar{u}_{s_1}(p_1) \gamma^{\mu'} v_{s_2}(p_2) \bar{v}_{s_4}(p_4) \gamma_{\mu'} u_{s_3}(p_3) \quad (2.188)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins

$$\begin{aligned}
 \overline{\sum} |M|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \sum_{s_4=1}^2 M \overline{M} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 + i\lambda]^2} \sum_{s_2=1}^2 \bar{v}_{s_2}(p_2) \gamma^\mu \overbrace{\sum_{s_1=1}^2 u_{s_1}(p_1) \bar{u}_{s_1}(p_1)}^{=\not{p}_1 + m_e} \gamma^{\mu'} v_{s_2}(p_2) \\
 &\quad \times \sum_{s_3=1}^2 \bar{u}_{s_3}(p_3) \gamma_\mu \overbrace{\sum_{s_4=1}^2 v_{s_4}(p_4) \bar{v}_{s_4}(p_4)}^{=\not{p}_4 - m_\mu} \gamma_{\mu'} u_{s_3}(p_3)
 \end{aligned} \tag{2.189}$$

alors,

$$\begin{aligned}
 \overline{\sum} |M|^2 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 + i\lambda]^2} \sum_{s_2=1}^2 \left(\bar{v}_{s_2}(p_2) \right)_{\alpha_1} \left(\gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\mu'} \right)_{\alpha_1 \beta_1} \left(v_{s_2}(p_2) \right)_{\beta_1} \\
 &\quad \times \sum_{s_3=1}^2 \left(\bar{u}_{s_3}(p_3) \right)_{\alpha_2} \left(\gamma_\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma_{\mu'} \right)_{\alpha_2 \beta_2} \left(u_{s_3}(p_3) \right)_{\beta_2} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 + i\lambda]^2} \sum_{s_2=1}^2 \left(v_{s_2}(p_2) \right)_{\beta_1} \left(\bar{v}_{s_2}(p_2) \right)_{\alpha_1} \left(\gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\mu'} \right)_{\alpha_1 \beta_1} \\
 &\quad \times \sum_{s_3=1}^2 \left(u_{s_3}(p_3) \right)_{\beta_2} \left(\bar{u}_{s_3}(p_3) \right)_{\alpha_2} \left(\gamma_\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma_{\mu'} \right)_{\alpha_2 \beta_2} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 + i\lambda]^2} \left(\not{p}_2 - m_e \right)_{\beta_1 \alpha_1} \left(\gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\mu'} \right)_{\alpha_1 \beta_1} \\
 &\quad \times \left(\not{p}_3 + m_\mu \right)_{\beta_2 \alpha_2} \left(\gamma_\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma_{\mu'} \right)_{\alpha_2 \beta_2} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 + i\lambda]^2} \text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\mu'}] \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma_{\mu'}]
 \end{aligned} \tag{2.190}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\mu'}] &= \text{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\mu'}] - m_e^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^{\mu'}] \\
 &= 4 \left(p_2^\mu p_1^{\mu'} - p_1 \cdot p_2 g^{\mu \mu'} + p_2^{\mu'} p_1^\mu \right) - 4m_e^2 g^{\mu \mu'}
 \end{aligned} \tag{2.191}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\not{p}_3 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma_{\mu'}] &= \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_{\mu'}] - m_\mu^2 \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_{\mu'}] \\
 &= 4 \left(p_{3\mu} p_{4\mu'} - p_3 \cdot p_4 g_{\mu \mu'} + p_{3\mu'} p_{4\mu} \right) - 4m_\mu^2 g_{\mu \mu'}
 \end{aligned} \tag{2.192}$$

Le produit des deux traces est,

$$\text{Tr}[\dots] \text{Tr}[\dots] = 32(p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 + m_e^2 p_3 \cdot p_4 + m_\mu^2 p_1 \cdot p_2 + 2m_e^2 m_\mu^2) \tag{2.193}$$

Rappelons que $g^{\mu \mu'} g_{\mu \mu'} = g_\mu^\mu = 4$ et $p_2^\mu p_1^{\mu'} p_{3\mu} p_{4\mu'} = p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3, \dots$ etc. Alors, le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins est,

$$\overline{\sum} |M|^2 = \frac{8e^4}{[(p_1 + p_2)^2 + i\lambda]^2} (p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 + m_e^2 p_3 \cdot p_4 + m_\mu^2 p_1 \cdot p_2 + 2m_e^2 m_\mu^2) \tag{2.194}$$

On re-exprime $\sum|M|^2$ en fonction des variables de MandelStam. Rappelons que,

$$\begin{aligned}
 s &= (p_1 + p_2)^2 = 2m_e^2 + 2p_1 \cdot p_2 & \Rightarrow & p_1 \cdot p_2 = \frac{s - 2m_e^2}{2} \\
 &= (p_3 + p_4)^2 = 2m_\mu^2 + 2p_3 \cdot p_4 & \Rightarrow & p_3 \cdot p_4 = \frac{s - 2m_\mu^2}{2} \\
 t &= (p_1 - p_3)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p_1 \cdot p_3 & \Rightarrow & p_1 \cdot p_3 = \frac{m_e^2 + m_\mu^2 - t}{2} \\
 &= (p_2 - p_4)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p_2 \cdot p_4 & \Rightarrow & p_2 \cdot p_4 = \frac{m_e^2 + m_\mu^2 - t}{2} \\
 u &= (p_1 - p_4)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p_1 \cdot p_4 & \Rightarrow & p_1 \cdot p_4 = \frac{m_e^2 + m_\mu^2 - u}{2} \\
 &= (p_2 - p_3)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2p_2 \cdot p_3 & \Rightarrow & p_2 \cdot p_3 = \frac{m_e^2 + m_\mu^2 - u}{2}
 \end{aligned} \tag{2.195}$$

Donc,

$$\sum|M|^2 = \frac{2e^4}{[s + i\lambda]^2} [t^2 + u^2 - 2(m_e^2 + m_\mu^2)(m_e^2 + m_\mu^2 - 2s)] \tag{2.196}$$

Pour trouver la dernière formule, on a utilisé le fait que : $u = 2m_e^2 + m_\mu^2 - s - t$.

On calcule, maintenant, la section efficace totale :

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_e^4}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3} \frac{d^3 \vec{p}_4}{2E_4} \sum|M|^2 \tag{2.197}$$

On a

$$\int \frac{d^3 \vec{p}_4}{2E_4} = \int d^4 p_4 \delta^+(p_4^2 - m_\mu^2) \tag{2.198}$$

A l'aide de cette formule, on intègre facilement sur la 4-impulsion p_4 (grâce à la fonction δ) :

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_e^4}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{|\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3|}{2E_3} d\Omega_3 \delta^+[(p_1 + p_2 - p_3)^2 - m_\mu^2] \sum|M|^2 \tag{2.199}$$

On se place dans le référentiel CM : $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 = \vec{0}$ et

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \rho_e \end{pmatrix} \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho_e \end{pmatrix} \tag{2.200}$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_\mu \sin(\theta) \\ 0 \\ \rho_\mu \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho_\mu \sin(\theta) \\ 0 \\ -\rho_\mu \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{2.201}$$

avec

$$\rho_e = \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} \quad \rho_\mu = \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \tag{2.202}$$

Pour lineariser l'argument de la fonction δ , on utilise :

$$\delta(g(x)) = \sum_i \delta(x - x_i) / |g'(x_i)| \tag{2.203}$$

alors :

$$\delta^+[(p_1 + p_2 - p_3)^2 - m_\mu^2] = \delta^+[s - 2\sqrt{s}\sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_\mu^2}] \quad (2.204)$$

on a

$$g(|\vec{p}_3|) = s - 2\sqrt{s}\sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_\mu^2} \quad |\vec{p}_3|_\pm = \pm \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \equiv \pm \frac{\sqrt{s}}{2} \rho_\mu \quad (2.205)$$

On prend en compte que la solution positive,

$$|g'(|\vec{p}_3|_+)| = 2\sqrt{s}\rho_\mu \quad (2.206)$$

alors,

$$\delta^+[(p_1 + p_2 - p_3)^2 - m_\mu^2] = \frac{\delta\left(|\vec{p}_3| - \frac{\sqrt{s}}{2}\rho_\mu\right)}{2\sqrt{s}\rho_\mu} \quad (2.207)$$

On remplace dans la section efficace,

$$\sigma = \frac{1}{4s\rho_e} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{|\vec{p}_3|^2}{\sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_\mu^2}} d|\vec{p}_3| \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\delta\left(|\vec{p}_3| - \frac{\sqrt{s}}{2}\rho_\mu\right)}{2\sqrt{s}\rho_\mu} \sum |M|^2 \quad (2.208)$$

Le carré de l'amplitude ne dépend que de θ ,

$$\sum |M|^2 = \frac{2e^4}{[s + i\lambda]^2} \left[\frac{s^2}{8} \{(\rho_e^2 + \rho_\mu^2)^2 + 4\rho_e^2\rho_\mu^2 \cos^2(\theta)\} - 2(m_e^2 + m_\mu^2)(m_e^2 + m_\mu^2 - 2s) \right] \quad (2.209)$$

avec,

$$t = -\frac{1}{4}s[\rho_e^2 + \rho_\mu^2 - \mu^2 - 2\rho_e\rho_\mu \cos(\theta)] \quad (2.210)$$

$$u = -\frac{1}{4}s[\rho_e^2 + \rho_\mu^2 - \mu^2 + 2\rho_e\rho_\mu \cos(\theta)] \quad (2.211)$$

Intégrant σ sur ϕ , on obtient

$$\sigma = \frac{1}{4s\rho_e} \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{|\vec{p}_3|^2}{\sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_\mu^2}} d|\vec{p}_3| \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \frac{\delta\left(|\vec{p}_3| - \frac{\sqrt{s}}{2}\rho_\mu\right)}{2\sqrt{s}\rho_\mu} \sum |M|^2 \quad (2.212)$$

Intégrant, maintenant, la dernière formule sur $|\vec{p}_3|$, on trouve

$$\sigma = \frac{e^4}{16\pi s} \frac{\rho_\mu}{\rho_e} \frac{1}{(s + i\lambda)^2} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \left[\frac{s^2}{8} \{(\rho_e^2 + \rho_\mu^2)^2 + 4\rho_e^2\rho_\mu^2 \cos^2(\theta)\} - 2(m_e^2 + m_\mu^2)(m_e^2 + m_\mu^2 - 2s) \right] \quad (2.213)$$

Pour intégrer sur θ , on fait le changement de variable suivant :

$$\cos(\theta) = X \quad \sin(\theta) d\theta = dX \quad (2.214)$$

alors,

$$\sigma = \frac{e^4}{16\pi s} \frac{\rho_\mu}{\rho_e} \frac{1}{s^2} \int_{-1}^{+1} dX \left[\frac{s^2}{8} \{(\rho_e^2 + \rho_\mu^2)^2 + 4\rho_e^2\rho_\mu^2 X^2\} - 2(m_e^2 + m_\mu^2)(m_e^2 + m_\mu^2 - 2s) \right] \quad (2.215)$$

On peut négliger la masse de l'électron devant m_μ et s et car,

$$m_e^2 \ll s \quad m_e^2 \ll m_\mu^2 \quad (2.216)$$

donc, $\rho_e \rightarrow 1$. On trouve,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{e^4}{16\pi s} \rho_\mu \frac{1}{s^2} \int_{-1}^{+1} dX \left[\frac{s^2}{8} \{ (1 + \rho_\mu^2)^2 + 4\rho_\mu^2 X^2 \} - 2m_\mu^2 (m_\mu^2 - 2s) \right] \\ &= \frac{4\alpha^2\pi}{3} \rho_\mu \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{s} \right) \end{aligned} \quad (2.217)$$

Pour $s \gg m_\mu^2$, on peut négliger la masse du muon et on obtient la fameuse formule de la section efficace :

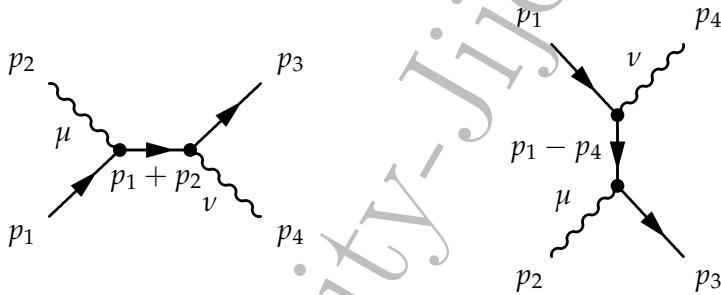
$$\sigma = \frac{4\alpha^2\pi}{3} \frac{1}{s} \quad (2.218)$$

2.5.2 Diffusion Compton : $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$

Considérons la réaction suivante :

$$e^-(p_1) + \gamma(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + \gamma(p_4) \quad (2.219)$$

Les deux diagrammes de Feynman décrivant cette réaction :



Calcul de l'amplitude :

Les amplitudes associées à ces deux diagrammes de Feynman, respectivement, sont :

$$M_1 = \frac{-ie^2}{(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\lambda} \bar{u}_{s_3}(p_3) \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu u_{s_1}(p_1) \epsilon_\mu^{(\kappa_2)}(p_2) \epsilon_\nu^{*(\kappa_4)}(p_4) \quad (2.220)$$

$$M_2 = \frac{-ie^2}{(p_1 - p_4)^2 - m^2 + i\lambda} \bar{u}_{s_3}(p_3) \gamma^\mu (\not{p}_1 - \not{p}_4 + m) \gamma^\nu u_{s_1}(p_1) \epsilon_\mu^{(\kappa_2)}(p_2) \epsilon_\nu^{*(\kappa_4)}(p_4) \quad (2.221)$$

Les complexes conjugués de M_1 et M_2 sont,

$$\overline{M}_1 = \frac{ie^2}{(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\lambda} \bar{u}_{s_1}(p_1) \gamma^\mu' (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\nu' u_{s_3}(p_3) \epsilon_{\mu'}^{*(\kappa_2)}(p_2) \epsilon_{\nu'}^{(\kappa_4)}(p_4) \quad (2.222)$$

$$\overline{M}_2 = \frac{ie^2}{(p_1 - p_4)^2 - m^2 + i\lambda} \bar{u}_{s_1}(p_1) \gamma^\nu' (\not{p}_1 - \not{p}_4 + m) \gamma^\mu' u_{s_3}(p_3) \epsilon_{\mu'}^{*(\kappa_2)}(p_2) \epsilon_{\nu'}^{(\kappa_4)}(p_4) \quad (2.223)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins et les polarisations s'écrit,

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |M|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{s_2, s_2} \sum_{\kappa_2, \kappa_4} |M_1 + M_2|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{s_2, s_2} \sum_{\kappa_2, \kappa_4} |M_1|^2 + \frac{1}{4} \sum_{s_2, s_2} \sum_{\kappa_2, \kappa_4} |M_2|^2 + \frac{1}{2} \text{Re} \left[\sum_{s_2, s_2} \sum_{\kappa_2, \kappa_4} M_1 \overline{M}_2 \right] \end{aligned} \quad (2.224)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{s_2, s_2} \sum_{\kappa_2, \kappa_4} |M_1|^2 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\lambda]^2} \\
&\times \sum_{s_3} \bar{u}_{s_3}(p_3) \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu \overbrace{\left(\sum_{s_1} u_{s_1}(p_1) \bar{u}_{s_1}(p_1) \right)}^{=\not{p}_1 + m} \gamma^{\mu'} (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^{\nu'} u_{s_3}(p_3) \\
&\times \overbrace{\left(\sum_{\kappa_2} \varepsilon_\mu^{(\kappa_2)}(p_2) \varepsilon_{\mu'}^{*(\kappa_2)}(p_2) \right)}^{-g_{\mu\mu'}} \overbrace{\left(\sum_{\kappa_2} \varepsilon_{\nu'}^{(\kappa_4)}(p_4) \varepsilon_{\nu}^{*(\kappa_4)}(p_4) \right)}^{-g_{\nu\nu'}} \\
&= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\lambda]^2} \\
&\times \sum_{s_3} \bar{u}_{s_3}(p_3) \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma_\nu u_{s_3}(p_3) \\
&= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\lambda]^2} \\
&\times \sum_{s_3} \left(\bar{u}_{s_3}(p_3) \right)_\alpha \left(\gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma_\nu \right)_{\alpha\beta} \left(u_{s_3}(p_3) \right)_\beta \\
&= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\lambda]^2} \\
&\times \sum_{s_3} \left(u_{s_3}(p_3) \right)_\beta \left(\bar{u}_{s_3}(p_3) \right)_\alpha \left(\gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma_\nu \right)_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\lambda]^2} \\
&\times \sum_{s_3} (\not{p}_3 + m)_{\beta\alpha} (\gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma_\nu)_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\lambda]^2} \text{Tr}[(\not{p}_3 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 + \not{p}_2 + m) \gamma_\nu] \quad (2.225)
\end{aligned}$$

On contracte sur les indices de Lorentz, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{s_2, s_2} \sum_{\kappa_2, \kappa_4} |M_1|^2 &= \frac{2e^4}{(p_1 \cdot p_2)} \left[2m^2 + p_2 \cdot p_3 + \frac{m^2}{p_1 \cdot p_2} (2m^2 - p_1 \cdot p_3 - p_2 \cdot p_3) \right] \\
&= \frac{2e^4}{(p_1 \cdot p_2)^2} \left[(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) + m^2(p_1 \cdot p_2) + m^4 \right] \quad (2.226)
\end{aligned}$$

Le carré de la deuxième amplitude est :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{\kappa_2, \kappa_4} |M_2|^2 &= \frac{1}{4} \frac{e^4}{[(p_1 - p_4)^2 - m^2 + i\lambda]^2} \\
&\times \text{Tr}[(\not{p}_3 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 - \not{p}_4 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p}_1 - \not{p}_4 + m) \gamma_\mu] \\
&= -\frac{2e^4}{p_1 \cdot p_4} \left[2m^2 - p_3 \cdot p_4 - \frac{m^2}{p_1 \cdot p_4} (2m^2 - p_1 \cdot p_3 + p_3 \cdot p_4) \right] \\
&= \frac{2e^4}{(p_1 \cdot p_4)^2} \left[(p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_4) - m^2(p_1 \cdot p_4) + m^4 \right] \quad (2.227)
\end{aligned}$$

Le terme d'interférence est

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \text{Re} \left[\sum_{s_2, s_2} \sum_{\kappa_2, \kappa_4} M_1 \bar{M}_2 \right] &= \frac{1}{2} \frac{e^4}{[(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\lambda][(p_1 - p_4)^2 - m^2 + i\lambda]} \\
 &\times \text{Tr}[(\not{p}_3 + m)\gamma^\nu(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu(\not{p}_1 - \not{p}_4 + m)\gamma_\mu] \\
 &= -2 \frac{e^4}{(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4)} [m^4 + 2p_1 \cdot p_2(m^2 - p_1 \cdot p_3) + p_1 \cdot p_3(m^2 + 2p_1 \cdot p_4 + 2p_2 \cdot p_4) \\
 &- m^2(2p_1 \cdot p_4 - p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4 + p_3 \cdot p_4)] \\
 &= 2 \frac{e^4}{(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4)} \left[-2m^4 - 2(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_4)(m^2 - p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_4) \right. \\
 &\left. + p_2 \cdot p_4(m^2 - 2p_1 \cdot p_2 + 2p_1 \cdot p_4) \right] \\
 &= -\frac{2e^4}{(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4)} m^2 \left[2m^2 + (p_1 \cdot p_2) - (p_1 \cdot p_4) \right]
 \end{aligned} \tag{2.228}$$

Le carré de l'amplitude totale s'écrit,

$$\overline{\sum} |M|^2 = 2e^4 \left[\frac{p_1 \cdot p_4}{p_1 \cdot p_2} + \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_4} + 2m^2 \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \right) + m^4 \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \right)^2 \right] \tag{2.229}$$

On se place dans le référentiel du laboratoire (l'électron d'impulsion p_1 est au repos). Alors,

$$\begin{aligned}
 p_1 &= m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & p_2 &= E_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 p_4 &= E_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} & p_3 &= p_1 + p_2 - p_4 = \begin{pmatrix} m + E_2 - E_4 \\ -E_4 \sin(\theta) \\ 0 \\ E_2 - E_4 \cos(\theta) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.230}$$

Alors,

$$\overline{\sum} |M|^2 = 2e^4 \left[\frac{E_4}{E_2} + \frac{E_2}{E_4} + 2m \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_4} \right) + m^2 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_4} \right)^2 \right] \tag{2.231}$$

on a

$$\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_4} = \frac{1}{m} [\cos(\theta) - 1] \tag{2.232}$$

on trouve

$$\overline{\sum} |M|^2 = 32\pi^2 \alpha^2 \left[\frac{E_4}{E_2} + \frac{E_2}{E_4} - \sin^2(\theta) \right] \tag{2.233}$$

où $\alpha = e^2 / (4\pi)$.

Calcul de la Section efficace :

Dans ce cas, la section efficace totale est donnée par :

$$\sigma = \frac{1}{4p_1 \cdot p_2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3} \frac{d^3 \vec{p}_4}{2E_4} \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \overline{\sum} |M|^2 \tag{2.234}$$

on a,

$$p_1 \cdot p_2 = mE_2 \quad \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3} = \int d^4 p_3 \delta^+(p_3^2 - m^2) \tag{2.235}$$

Alors,

$$\sigma = \frac{1}{8mE_2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 p_3 \frac{d^3 \vec{p}_4}{E_4} \delta^+(p_3^2 - m^2) \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \sum |M|^2 \quad (2.236)$$

Grâce à la fonction $\delta^{(4)}(p_3 = p_1 + p_2 - p_4)$, on peut intégrer facilement sur \vec{p}_3 , on trouve alors,

$$\sigma = \frac{1}{8mE_2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 \vec{p}_4}{E_4} \delta^+[(p_1 + p_2 - p_4)^2 - m^2] \sum |M|^2 \Big|_{p_3=p_1+p_2-p_4} \quad (2.237)$$

on a,

$$\delta^+[(p_1 + p_2 - p_4)^2 - m^2] = \delta^+[2mE_2 - 2mE_4 - 2E_2E_4(1 - \cos(\theta))] = \delta^+[g(E_4)] \quad (2.238)$$

avec

$$g(E_4) = 0 \implies E_4 = \frac{mE_2}{m + E_2(1 - \cos(\theta))} \quad (2.239)$$

et

$$|g'(E_4)| = 2[m + E_2(1 - \cos(\theta))] \quad (2.240)$$

Donc, la fonction δ^+ devient,

$$\delta^+[(p_1 + p_2 - p_4)^2 - m^2] = \frac{\delta[E_4 - \frac{mE_2}{m + E_2(1 - \cos(\theta))}]}{2[m + E_2(1 - \cos(\theta))]} \quad (2.241)$$

Dans les coordonnées sphériques, $d^3 \vec{p}_4$ s'écrit

$$d^3 \vec{p}_4 = |\vec{p}_4| \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (2.242)$$

mais $E_4 = |\vec{p}_4|$, alors,

$$d^3 \vec{p}_4 = E_4^2 dE_4 \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (2.243)$$

on obtient

$$\sigma = \frac{1}{16mE_2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} E_4 dE_4 \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\delta[E_4 - \frac{mE_2}{m + E_2(1 - \cos(\theta))}]}{[m + E_2(1 - \cos(\theta))]} \sum |M|^2 \quad (2.244)$$

L'intégrande de σ ne dépend pas de φ , il dépend que de E_4 et θ . Intégrant sur φ , on trouve,

$$\sigma = \frac{1}{16mE_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{+\infty} dE_4 E_4 \frac{\delta[E_4 - \frac{mE_2}{m + E_2(1 - \cos(\theta))}]}{[m + E_2(1 - \cos(\theta))]} \sum |M|^2 \quad (2.245)$$

Intégrant sur E_4 ,

$$\sigma = \pi \alpha^2 \int_0^\pi d\theta \frac{\sin(\theta)}{[m + E_2(1 - \cos(\theta))]^2} \left[\frac{m}{m + E_2(1 - \cos(\theta))} + \frac{m + E_2(1 - \cos(\theta))}{m} - \sin^2(\theta) \right] \quad (2.246)$$

A la limite à basse énergie $E_2 \ll m$ et $E_2 \approx E_4$ (c.à.d l'énergie de recul de l'électron est négligeable). σ devient,

$$\sigma = \pi \alpha^2 \int_0^\pi d\theta \frac{\sin(\theta)}{m^2} (2 - \sin^2(\theta)) = \pi \alpha^2 \int_0^\pi d\theta \frac{\sin(\theta)}{m^2} (1 + \cos^2(\theta)) \quad (2.247)$$

on fait le changement de variable $X = \cos(\theta)$. On obtient,

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi \alpha^2 \int_{-1}^{+1} dX \frac{1}{m^2} (1 + X^2) \\ &= \frac{8 \pi \alpha^2}{3} \frac{1}{m^2} \end{aligned} \quad (2.248)$$

c'est la fameuse formule de Thomson.

2.5.3 Amplitudes polarisées de la réaction : $e^-e^+ \rightarrow l^-l^+$

Dans les sous-sections précédentes, on a supposé que les réactions sont non-polarisées, ce qui signifie qu'on a sommé sur les spins et les polarisations des particules dans les états initiaux et finaux pour calculer les carrés des amplitudes. Dans cette sous-section, on va calculer les amplitudes polarisées pour la réaction $e^-e^+ \rightarrow l^-l^+$.

Rappelons que les spineurs de Dirac pour un fermion (anti-fermion) d'énergie E , de quantité de mouvement \vec{p} et de masse m qui se déplace dans une direction arbitraire définie par l'angle polaire θ et azimutale ϕ sont donnés par :

$$u_{\uparrow}(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{pmatrix} \equiv u^+(p), \quad u_{\downarrow}(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{pmatrix} \equiv u^-(p). \quad (2.249)$$

$$v_{\uparrow}(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{pmatrix} \equiv v^+(p), \quad v_{\downarrow}(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{pmatrix} \equiv v^-(p). \quad (2.250)$$

Les opérateurs hélicité pour le fermions (h) et les anti-fermions (\bar{h}) sont définis par :

$$h(p) = \frac{1}{2} \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \equiv \frac{\Sigma_x p_x + \Sigma_y p_y + \Sigma_z p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}. \quad (2.251)$$

$$\bar{h}(p) = -\frac{1}{2} \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \equiv \frac{\Sigma_x p_x + \Sigma_y p_y + \Sigma_z p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \quad (2.252)$$

avec

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.253)$$

On a donc,

$$h(p) u_{\uparrow}(p) = +\frac{1}{2} u_{\uparrow}(p), \quad h(p) u_{\downarrow}(p) = -\frac{1}{2} u_{\downarrow}(p). \quad (2.254)$$

$$\bar{h}(p) v_{\uparrow}(p) = -\frac{1}{2} v_{\uparrow}(p), \quad \bar{h}(p) v_{\downarrow}(p) = -\frac{1}{2} v_{\downarrow}(p). \quad (2.255)$$

On se place dans le référentiel du centre de masse. On suppose que :

$$\begin{aligned} \bullet \vec{p}_1 : [\theta = 0, \phi = 0] & \quad p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} [1, 0, 0, \beta_e], \\ \bullet \vec{p}_2 : [\theta = \pi, \phi = \pi] & \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} [1, 0, 0, -\beta_e] \\ \bullet \vec{p}_3 : [\theta = \theta, \phi = 0] & \quad p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2} [1, \beta_{\mu} \cos(\theta), 0, \beta_{\mu} \sin(\theta)], \\ \bullet \vec{p}_4 : [\theta = \pi - \theta, \phi = \pi] & \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} [1, -\beta_{\mu} \cos(\theta), 0, -\beta_{\mu} \sin(\theta)] \end{aligned} \quad (2.256)$$

avec

$$\beta_e = \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}}, \quad \beta_{\mu} = \sqrt{1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s}}. \quad (2.257)$$

L'amplitude de la réaction $e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4)$ s'écrit :

$$M^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = \frac{-i4\pi\alpha}{s^2} \bar{v}^{\lambda_2}(p_2) \gamma_\mu u^{(\lambda_1)}(p_1) \bar{u}^{\lambda_3}(p_3) \gamma^\mu v^{(\lambda_4)}(p_4). \quad (2.258)$$

où $\lambda_i = \pm$ (pour $i = 1, 2, 3, 4$) est l'hélicité du fermion i et $\alpha = e^2/(4\pi)$.

Après un calcul un peu long, on trouve :

$$\begin{aligned} M^{++++} &= i(4\pi\alpha) \frac{4m_e m_\mu}{s} \cos(\theta), & M^{-+++} &= i(4\pi\alpha) \frac{2m_\mu}{\sqrt{s}} \sin(\theta), \\ M^{+-+-+} &= i(4\pi\alpha) \frac{2m_\mu}{\sqrt{s}} \sin(\theta), & M^{--++} &= -i(4\pi\alpha) \frac{4m_e m_\mu}{s} \cos(\theta), \\ M^{++-+} &= -i(4\pi\alpha) \frac{2m_e}{\sqrt{s}} \sin(\theta), & M^{-+-+} &= i(4\pi\alpha) [1 + \cos(\theta)], \\ M^{+-+-} &= -i(4\pi\alpha) [1 - \cos(\theta)], & M^{---+} &= i(4\pi\alpha) \frac{2m_e}{\sqrt{s}} \sin(\theta), \\ M^{+++-} &= -i(4\pi\alpha) \frac{2m_e}{\sqrt{s}} \sin(\theta), & M^{-++-} &= -i(4\pi\alpha) [1 - \cos(\theta)], \\ M^{+-+-} &= i(4\pi\alpha) [1 + \cos(\theta)], & M^{--+-} &= i(4\pi\alpha) \frac{2m_e}{\sqrt{s}} \sin(\theta), \\ M^{+-+-} &= -i(4\pi\alpha) \frac{4m_e m_\mu}{s} \cos(\theta), & M^{-+--} &= -i(4\pi\alpha) \frac{2m_\mu}{\sqrt{s}} \sin(\theta), \\ M^{+---} &= -i(4\pi\alpha) \frac{2m_\mu}{\sqrt{s}} \sin(\theta), & M^{--++} &= i(4\pi\alpha) \frac{4m_e m_\mu}{s} \cos(\theta), \end{aligned} \quad (2.259)$$

Lorsque la masse tend vers zéro, les amplitudes non nulles correspondent aux réactions avec $s = 1$. Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} M^{+-+-} &= M^{-++/+} = i(4\pi\alpha) [1 + \cos(\theta)], \\ M^{+-+-+} &= M^{-+++-} = -i(4\pi\alpha) [1 - \cos(\theta)]. \end{aligned} \quad (2.260)$$

Dans cette limite, la somme sur les spins initiaux et finaux, et la moyenne sur les spins initiaux du carré de l'amplitude, s'écrit :

$$\sum |M|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = \pm} |M^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}|^2 = 16\pi^2\alpha^2 [1 + \cos(\theta)^2]. \quad (2.261)$$

2.6 Exercice et Problèmes

2.6.1 Rappel de cours

▷ **Produit chronologique T :**

$$T[\hat{C}(t_1)\hat{O}(t_2) \cdots \hat{O}(t_n)] = \hat{O}(t_{i_1})\hat{O}(t_{i_2}) \cdots \hat{O}(t_{i_n}), \quad t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq \cdots \geq t_{i_n}. \quad (2.262)$$

▷ **Produit normal :**

$$\begin{aligned} :\phi(x)\phi(y): &= \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(+)}(y)\phi^{(-)}(x). \\ :\psi(x)\psi(y): &= \psi^{(-)}(x)\psi^{(-)}(y) - \psi^{(+)}(x)\psi^{(-)}(y) + \psi^{(+)}(x)\psi^{(+)}(y) + \psi^{(+)}(x)\psi^{(-)}(y). \end{aligned} \quad (2.263)$$

ou \hat{O}^+ et \hat{O}^- sont les opérateurs de création et annihilation.

▷ Théorème de Wick :

$$T[\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)] =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2) : + : \phi_A(x_1) \phi_B(x_2) : \quad (2.264)$$

$$T[\phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3)] =: \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) : + : \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) : + : \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) : + : \phi_A(x_1)\phi_B(x_2)\phi_C(x_3) : \quad (2.265)$$

En général,

$$\begin{aligned} T[\hat{A}\hat{B}\hat{C}\cdots\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}] &=: \hat{A}\hat{B}\hat{C}\cdots\hat{X}\hat{Y}\hat{Z} : \\ &+ : \hat{A}\hat{B}\hat{C}\cdots\hat{X}\hat{Y}\hat{Z} : + \cdots + : \hat{A}\hat{B}\hat{C}\cdots\hat{Y}\hat{Z} : \\ &+ : \hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\cdots\hat{X}\hat{Y}\hat{Z} : + \cdots + : \hat{A}\hat{B}\hat{C}\cdots\hat{W}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z} : \\ &+ \text{ somme sur les contractions triples} \\ &+ \text{ somme sur toutes les contractions supérieures!} \end{aligned} \quad (2.266)$$

▷ Matrice S :

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T[\hat{\mathcal{H}}_I(x_1) \cdots \hat{\mathcal{H}}_I(x_n)]. \quad (2.267)$$

▷ Amplitude de diffusion :

$$\begin{aligned} < f | \hat{S} | i > &= \hat{S}_{fi} = \delta_{fi} + iT_{fi} \\ &= \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \Pi_{i=1}^2 \sqrt{N_i / (2E_i(2\pi)^3)} \Pi_{i=3}^N \sqrt{N'_i / (2E'_i(2\pi)^3)} M_{fi} \end{aligned} \quad (2.268)$$

avec

- $N_i = 1$ pour les particules de spin 0 ou le photon.
- $N'_i = 2m$ pour les particules de spin 1/2.
- P_f : somme des 4-impulsion de l'état final $|f> = |p_1, p_2>$.
- P_i : somme des 4-impulsion de l'état initial $|i> = |p_3, \dots, p_n>$.
- M : amplitude de Feynman $M = M^{(1)} + M^{(2)} + \dots$

▷ Section efficace :

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \int |M|^2 \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \cdots \frac{d^3\vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + \dots + p_n - p_1 - p_2) \quad (2.269)$$

▷ Taux de désintégration

$$\Gamma = \frac{1}{2m_1} \int |M|^2 \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \cdots \frac{d^3\vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_3 + \dots + p_n - p_1) \quad (2.270)$$

▷ Propagateurs :

$$S_F(x_1 - x_2) = \underline{\psi(x_1)} \bar{\psi}(x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x_1-x_2)} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.271)$$

$$D_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \underline{A^\mu(x_1)} A^\nu(x_2) = \frac{-g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x_1-x_2)} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}. \quad (2.272)$$

▷ Opérateurs champs :

$$\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}^{(+)}(x) + \hat{\psi}^{(-)}(x). \quad (2.273)$$

$$\hat{\bar{\psi}}(x) = \hat{\bar{\psi}}^{(+)}(x) + \hat{\bar{\psi}}^{(-)}(x). \quad (2.274)$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x). \quad (2.275)$$

avec

$$\hat{\psi}^{(+)}(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \hat{b}(p, s) u(p, s) e^{-ip \cdot x}. \quad (2.276)$$

$$\hat{\psi}^{(-)}(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \hat{d}^\dagger(p, s) v(p, s) e^{+ip \cdot x}. \quad (2.277)$$

$$\hat{\psi}^{(+)}(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \hat{d}(p, s) \bar{v}(p, s) e^{-ip \cdot x}. \quad (2.278)$$

$$\hat{\psi}^{(-)}(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \hat{b}^\dagger(p, s) \bar{u}(p, s) e^{+ip \cdot x}. \quad (2.279)$$

$$A_\mu^{(+)}(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_p}} \hat{a}(k, \lambda) \epsilon_\mu(k, \lambda) e^{-ik \cdot x}. \quad (2.280)$$

$$A_\mu^{(-)}(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_p}} \hat{a}^\dagger(k, \lambda) \epsilon_\mu^*(k, \lambda) e^{-ik \cdot x}. \quad (2.281)$$

2.6.2 Questions de cours

- (1) Expliquer pourquoi on doit ré-exprimer les opérateurs \hat{Q} , $\hat{\Gamma}$, ... etc en fonction du produit normal.
 (2) Expliquer pourquoi on doit utiliser les anti-commutateurs pour quantifier le champ de Dirac et pas les commutateurs.
 (3) Montrer les égalités suivantes :

$$\sum_{s=1}^2 u_s(k) \bar{u}_s(k) = \not{k} + m, \quad \sum_{s=1}^2 v_s(k) \bar{v}_s(k) = \not{k} - m \quad (2.282)$$

$$\sum_{s=1}^2 (u_s(k))_i (\bar{u}_s(k))_j = (\not{k} + m)_{ij}, \quad \sum_{s=1}^2 (v_s(k))_i (\bar{v}_s(k))_j = (\not{k} - m)_{ij} \quad (2.283)$$

$$(2.284)$$

- (4) Montrer les relations d'anti-commutation suivantes :

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = (i \not{\partial} - m)(i \Delta(x - y)), \quad \{\psi(x), \psi(y)\} = 0 \quad (2.285)$$

- (5) Calculer, dans le système d'unités naturelles ($\hbar = c = 1$), la dimension de :

$$E \quad p \quad t \quad x \quad \mathcal{L} \quad \mathcal{H} \quad \psi \quad \phi \quad A_\mu \quad F_{\mu\nu} \quad \alpha \quad e \quad S. \quad (2.286)$$

- (6) Comparer les représentations à Heisenberg, Schrödinger et Dirac en donnant les relations entre les fonctions d'onde et les opérateurs dans chaque représentation.

- (7) Démontrer la formule de la matrice S (éq. (2.267)).

- (8) Montrer que

$$[A^{(+)}, B^{(-)}]_\pm = \langle 0 | AB | 0 \rangle. \quad (2.287)$$

- (9) Montrer que

$$T[\phi_A(x_1) \phi_B(x_2)] =: \phi_A(x_1) \phi_B(x_2) : + : \underbrace{\phi_A(x_1)}_{\phi_B(x_2)} : \quad (2.288)$$

- (10) Montrer que :

$$\underbrace{\psi_\alpha(x_1)}_{\psi_\beta(x_2)} \underbrace{\bar{\psi}_\beta(x_2)}_{\psi_\alpha(x_1)} = - \bar{\psi}_\beta(x_2) \psi_\alpha(x_1) = i S_{F,\alpha\beta}(x_1 - x_2). \quad (2.289)$$

$$\underbrace{\phi(x_1)}_{\phi^\dagger(x_2)} \underbrace{\phi^\dagger(x_2)}_{\phi(x_1)} = \phi^\dagger(x_2) \phi(x_1) = i \Delta(x_1 - x_2). \quad (2.290)$$

$$(2.291)$$

où ψ est un champ fermionique et ϕ est champ scalaire complexe.

(11) Théorème de Wick. Montrer les relations suivantes :

$$:\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)A^\mu(x_3)\bar{\psi}_\gamma(x_4)\bar{\psi}_\delta(x_5):=(-1)\psi_\beta(x_2)\bar{\psi}_\delta(x_5):\psi_\alpha(x_1)A^\mu(x_3)\bar{\psi}_\gamma(x_4): \quad (2.292)$$

(12) Montrer l'égalité suivante :

$$\int d^4x_1 d^4x_2 :(\bar{\psi} A\psi)_{x_1}(\bar{\psi} A\psi)_{x_2}: = \int d^4x_1 d^4x_2 :(\bar{\psi} A\psi)_{x_1}(\bar{\psi} A\psi)_{x_2}: \quad (2.293)$$

(13) Justifier

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = 0. \quad (2.294)$$

(14) Monter que le propagateur du fermion est donné par :

$$S_F(p) = \frac{i}{p - m + i\lambda}. \quad (2.295)$$

sachant qu'il vérifie l'équation de Green

$$(i\cancel{p} - m)\tilde{S}_F(x - x') = i\delta^{(4)}(x - x'), \quad \text{avec} \quad \tilde{S}_F(x - x') = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_F(k) e^{-ik \cdot (x - x')}. \quad (2.296)$$

(15) Monter que le propagateur du photon est donné par :

$$G_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right] \quad (2.297)$$

sachant qu'il vérifie l'équation de Green

$$[-k^2 g_{\mu\nu} + (1 - \alpha)k_\mu k_\nu]G^{\nu\mu}(k) = ig_\mu^\rho \quad (2.298)$$

(16) Montrer que

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \epsilon_\nu^{*(\lambda)}(k) = - \left[g_{\mu\nu} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right] \quad (2.299)$$

(17) Montrer que si on choisit une jauge non-covariante (jauge axiale par exemple) on trouve que

$$G_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} - \frac{k_\mu k_\nu}{(k \cdot n)^2} \right] \quad (2.300)$$

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \epsilon_\nu^{*(\lambda)}(k) = - \left[g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} - \frac{k_\mu k_\nu}{(k \cdot n)^2} \right] \quad (2.301)$$

(18) Dériver les règles de Feynman en QED dans l'espace des impulsions.

2.6.3 Exercices et Problèmes

Exercice 1 : Matrice de diffusion

Considérons l'élément $S_B^{(2)} = S_2^{(2)} + S_3^{(2)}$ du deuxième ordre de la matrice S (voir le cours)

$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 :(\bar{\psi} A\psi)_{x_1}(\bar{\psi} A\psi)_{x_2}:, \quad t_2 < t_1. \quad (2.302)$$

(1) Écrire les termes de $S_B^{(2)}$ décrivant les processus :

- Diffusion Compton par électron : $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$.
- Diffusion Compton par positron : $\gamma + e^+ \rightarrow \gamma + e^+$.
- Annihilation de paire : $e^- + e^+ \rightarrow \gamma\gamma$.
- Création de paire : $\gamma\gamma \rightarrow e^- + e^+$.

(2) Écrire l'amplitude de transition $(S_B^{(2)})_{fi}$ et l'amplitude de Feynman de chaque processus.

(3) Tracer les diagrammes de Feynman pour chaque processus.

(4) Écrire l'amplitude de Feynman de chaque processus à l'aide des règles de Feynman en QED.

(5) Calculer le carré de l'amplitude de chaque processus.

(6) Calculer la section efficace de chaque processus.

Exercice 2 : Échange d'un photon virtuel

Considérons l'élément S_d du deuxième ordre de la matrice S (voir le cours)

$$S_d^{(2)} = \frac{(-ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) : \} \quad (2.303)$$

(1) Écrire les termes de $S_d^{(2)}$ décrivant les processus :

- $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$.
- $e^+ + e^+ \rightarrow e^+ + e^+$.
- $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$.

(2) Écrire l'amplitude de transition $(S_d^{(2)})_{fi}$ et l'amplitude de Feynman de chaque processus.

(3) Tracer les diagrammes de Feynman pour chaque processus.

(4) Écrire l'amplitude de Feynman de chaque processus à l'aide des règles de Feynman en QED.

(5) Calculer le carré de l'amplitude de chaque processus.

(6) Calculer la section efficace de chaque processus.

Exercice 3 : réaction $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$

Considérons le processus

$$e^+(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow \mu^+(p_3) + \mu^-(p_4). \quad (2.304)$$

(2) Dériver l'élément de la matrice $S^{(2)}$ décrivant cette réaction.

(3) Écrire l'amplitude de transition $(S_B^{(2)})_{fi}$ et l'amplitude de Feynman de chaque processus.

(4) Tracer les diagrammes de Feynman pour chaque processus.

(5) Écrire l'amplitude de Feynman de chaque processus à l'aide des règles de Feynman en QED.

(6) Calculer le carré de l'amplitude de chaque processus.

(7) Calculer la section efficace de chaque processus.

Exercice 4 : Diagrammes de Feynman à une et à deux boucles

Considérons les éléments de $S^{(2)}$ suivants

$$S_e^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} : \quad (2.305)$$

$$S_f^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} : \quad (2.306)$$

$$S_h^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \not{A} \psi)_{x_2} : \quad (2.307)$$

Tracer les diagrammes de Feynman correspondants et montrer que ces éléments de matrices ne peuvent pas décrire des processus physiques.

Problème : Carré des amplitudes et sections efficace des processus de Born

Voir le chapitre 3 (137-174) de *Quantum Field Theory* de F. Mandl et G. Shaw

(1) Diffusion Bhabha : $e^+(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow e^+(p_3) + e^-(p_4)$

(a) Montrer que les carrés des amplitudes sont donnés par :

$$\sum |M_1|^2 = \frac{e^4}{16m^4} \left[1 + \cos^2(\theta) + O(m^2/E^2) \right] \quad (2.308)$$

$$\sum |M_2|^2 = \frac{e^4}{8m^4 \sin^4(\theta/2)} \left[1 + \cos^4(\theta/2) + O(m^2/E^2) \right] \quad (2.309)$$

$$\sum |M_{12}|^2 = \frac{-e^4}{8m^4 \sin^2(\theta/2)} \left[\cos^4(\theta/2) + O(m^2/E^2) \right] \quad (2.310)$$

où l'amplitude totale s'écrit

$$\bar{\sum}|M|^2 = \sum|M_1|^2 + \sum|M_2|^2 + 2\sum|M_{12}|^2 \quad (2.311)$$

(b) Montrer que la section efficace différentielle, dans le ref CM, est donnée par :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left[\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1 + \cos^2(\theta)}{2} - \frac{2\cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} \right] \quad (2.312)$$

(c) Calculer la section efficace totale ! Commenter le résultats.

(2) **Diffusion Compton** : $e^-(p) + \gamma(k) \rightarrow e^-(p') + \gamma(k')$

(a) Montrer que le carré de l'amplitude s'écrit sous la forme :

$$\bar{\sum}|M|^2 = \frac{e^4}{64m^2} \left[\frac{|M_1|^2}{(p \cdot k)^2} + \frac{|M_2|^2}{(p \cdot k')^2} - \frac{2|M_{12}|^2}{(p \cdot k)(p \cdot k')} \right] \quad (2.313)$$

avec

$$|M_1|^2 = 32[m^4 + m^2(p \cdot k) + (p \cdot k)(p \cdot k')] \quad (2.314)$$

$$|M_2|^2 = 32[m^4 - m^2(p \cdot k') + (p \cdot k)(p \cdot k')] \quad (2.315)$$

$$|M_{12}|^2 = 16m^2[2m^2 + (p \cdot k) - (p \cdot k')] \quad (2.316)$$

$$(2.317)$$

(b) Dans le système du laboratoire (référentiel lié à l'électron), on a $p \cdot k = m\omega$ et $p \cdot k' = m\omega'$. Montrer que

$$\bar{\sum}|M|^2 = \frac{e^4}{2m^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2(\theta) \right] \quad (2.318)$$

(c) Montrer que la section efficace différentielle, dans le ref du lab, est donnée par :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2(\theta) \right] \quad (2.319)$$

Calculer la section efficace totale.

(3) **Production d'une paire de leptons** : $e^+(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow l^+(p'_1) + l^-(p'_2)$

(a) Montrer que la carré de l'amplitude est :

$$\bar{\sum}|M|^2 = \frac{e^4[(p_1 \cdot p'_1)(p_2 \cdot p'_2) + (p_1 \cdot p'_2)(p_2 \cdot p'_1) + m_e^2(p'_1 \cdot p'_2) + m_l^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2m_l^2]}{2m_e^2m_l^2[(p_1 + p_2)^2]} \quad (2.320)$$

(b) Montrer que les sections efficaces différentielle et totale sont données par :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{\alpha^2}{16E^2} (1 + \cos^2(\theta)) \quad (2.321)$$

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{2E^2} \quad (2.322)$$

M.S.Zidi-University-Jijel-Gauge-Theories

3. Chromodynamique Quantique

Sommaire

3.1	Charge de couleur	80
3.1.1	Couleur & confirmation	80
3.1.2	Charge de couleur et le groupe $SU(3)$	82
3.2	Groupe $SU(3)$ et ses représentations	83
3.3	Lagrangien classique de la chromodynamique	86
3.4	Quantification de la chromodynamique	89
3.4.1	Généralités sur la quantification des théories de jauge non-abéliennes	89
3.4.2	Quantification par la méthode fonctionnelle	91
3.4.3	Invariance BRST	95
3.4.4	Extraction des règles de Feynman par la méthode fonctionnelle	96
3.5	Règles de Feynman en QCD	98
3.5.1	Règle de Feynman en jauge covariante	98
3.5.2	Règle de Feynman en jauge non-covariante	99
3.6	Calcul des processus à l'ordre de Born	100
3.6.1	Sections efficaces hadronique et partonique	100
3.6.2	Processus : $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$	102
3.6.3	Processus : $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$	104
3.6.4	Processus : $j\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$	106
3.6.5	Processus : $\gamma\gamma \rightarrow q\bar{q}$	108
3.6.6	Processus : $\bar{q}\bar{q} \rightarrow \bar{q}\bar{q}$	109
3.6.7	Processus : $qg \rightarrow qg$	109
3.7	Exercices et Problèmes	113
3.7.1	Questions de cours	113
3.7.2	Exercices	114

La chromodynamique quantique ou la QCD (Quantum ChromoDynamics) est une théorie quantique des champs basée sur le groupe de jauge $SU(3)$, donc c'est une théorie de jauge non-abélienne. Elle décrit l'interaction forte entre les quarks et les gluons et permet de comprendre la cohésion des

hadrons. Le nombre quantique de couleur ou la charge de couleur portée par les quarks et les gluons est le responsable de l'interaction forte (l'équivalent de la charge électrique en QED). Dans ce chapitre, on étudie tout ce qui concerne cette théorie, en commençant par la façon dont elle est construite et en terminant par certaines de ses applications [9, 10]. Globalement dans ce chapitre, on suit de près le livre [10] de T. Muta et nous adoptons même sa notation.

3.1 Charge de couleur

Les quarks peuvent se présenter sous trois états de couleurs différents, chaque état est différent de l'autre par le nombre quantique de couleur (*rouge, bleu et vert*). Le nombre quantique de couleur (ou la charge de couleur) a été proposé pour la première fois (par M-Y. Han et Y. Nambu en 1964) pour résoudre le problème de la symétrie du baryon Δ^{++} . Ce baryon est constitué de trois quarks up ($\Delta^{++} \equiv uuu$) et il est de spin $3/2$ ($J = 3/2^+$), ce qui implique que les trois quarks doivent avoir des spin parallèles ($+1/2$) et moment cinétique orbital nul.

$$|\Delta^{++}, J = 3/2^+ \rangle \equiv |u \uparrow, u \uparrow, u \uparrow \rangle \quad (3.1)$$

Donc, ce baryon ne peut pas avoir une fonction d'onde anti-symétrique ce qui est en contradiction avec le principe d'exclusion de Pauli. Pour éviter ce paradoxe, M-Y. Han et Y. Nambu ont suggéré que les quarks possèdent un nouveau nombre quantique (appelé plus tard couleur) qui peut avoir trois valeurs. Alors, les quarks qui constituent le baryon Δ^{++} possèdent des couleurs différentes et donc cet état ni plus symétrique et la fonction d'onde associée est anti-symétrique, donc la *contradiction est résolue*!

Dans le tableau suivant, on donne quelques propriétés des quarks :

Quark	Charge	Masse	Nombre baryonique	Isospin	Couleur
u	$+\frac{2}{3}$	~ 4 MeV	$\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{2}$	$3 \in SU(3)$
d	$-\frac{1}{3}$	~ 7 MeV	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$3 \in SU(3)$
c	$+\frac{2}{3}$	~ 1.5 GeV	$\frac{1}{3}$	0	$3 \in SU(3)$
s	$-\frac{1}{3}$	~ 135 MeV	$\frac{1}{3}$	0	$3 \in SU(3)$
t	$+\frac{2}{3}$	~ 175 GeV	$\frac{1}{3}$	0	$3 \in SU(3)$
b	$-\frac{1}{3}$	~ 5 GeV	$\frac{1}{3}$	0	$3 \in SU(3)$
g	0	0	0	0	$8 \in SU(3)$

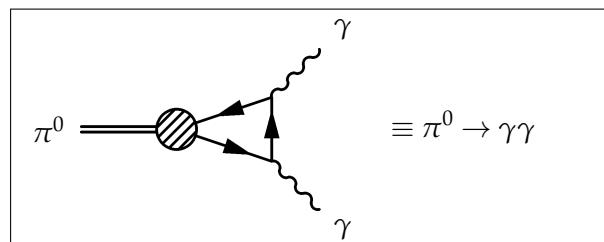
Il existe plusieurs expériences qui prouvent l'existence de la charge de couleur sous ses trois formes. Dans cette section, on cite deux exemples.

3.1.1 Couleur & confirmation

Désintégration du pion neutre :

L'une des premières expériences qui confirme l'existence de trois types de charges de couleurs pour les quarks est la désintégration du pion neutre π^0 en deux photons ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$). Le taux de désintégration de ce processus est donné par :

$$\Gamma^{\text{th}}[\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma] = N_c^2 (Q_u^2 - Q_d^2)^2 \frac{\alpha^2 m_{\pi^0}^3}{64\pi^3 F_\pi^2} \quad (3.2)$$



où N_c est le nombre des états de couleur possibles pour un quark, $Q_u = 2/3$ est la fraction de charge pour les quarks up, $Q_d = -1/3$ est la fraction de charge pour les quarks down, $\alpha = e^2/(4\pi) = 1/137$

est la constante de couplage de la QED, $m_{\pi_0} \approx 135$ MeV est la masse du pion et $F_\pi = 93$ MeV est la constante de désintégration du pion mesurée dans la désintégration $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$.

Le taux de désintégration mesuré expérimentalement et les taux de désintégration théoriques pour différentes valeurs de N_c sont, respectivement, donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\Gamma^{\text{exp}}[\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma] = 7.7 \pm 0.6 \text{ eV}} \\ \Gamma^{\text{th}}[\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma] = 0.85 \text{ eV} \\ \Gamma^{\text{th}}[\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma] = 3.39 \text{ eV} \\ \Gamma^{\text{th}}[\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma] = 7.64 \text{ eV} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{pour } N_c = 1 \\ \text{pour } N_c = 2 \\ \text{pour } N_c = 3 \end{array} \quad (3.3)$$

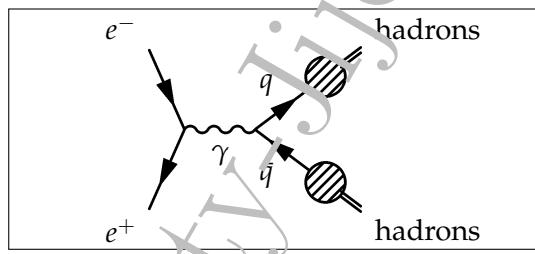
on déduit donc que $N_c = 3$.

Production des hadrons dans la collision e^+e^- :

Une autre expérience qui montre que le nombre de couleur des quarks est égal à 3 est la production d'hadrons dans la collision e^+e^- ,

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \text{hadrons.} \quad (3.4)$$

On prend le rapport R de la section efficace hadronique totale de cette réaction est la section efficace totale de la réaction $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ et on compare le rapport mesuré expérimentalement (que l'on note R^{exp}) et le rapport calculé analytiquement (que l'on note R^{th}).



On rappelle que les sections efficaces de ces deux réactions sont données par :

$$\sigma[e^+e^- \rightarrow q\bar{q}] = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \quad \sigma[e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-] = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (3.5)$$

où N_c est le nombre de couleur, N_f est le nombre de saveur (par exemple, $N_f = 6$ si on prend toutes les saveurs de quarks u, d, s, c, t , et b), Q_i est la fraction de la charge électrique des quarks et \sqrt{s} est l'énergie de centre de masse. Le rapport entre ces deux sections efficaces est donné par :

$$R^{(\text{th})} = \frac{\sigma[e^+e^- \rightarrow q\bar{q}]}{\sigma[e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-]} \equiv N_c \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^2 \quad (3.6)$$

On note que, pour pouvoir produire deux quarks de masse m_q , il faut que l'énergie du centre de masse soit plus grande que la masse fois deux (c.à.d. $\sqrt{s} > 2m_q$). Dans la suite, on va comparer les rapports théoriques et expérimentales pour plusieurs valeurs de \sqrt{s} .

▷ Pour $\sqrt{s} < 3$ GeV : dans ce cas, que les quarks u, d et s qui contribuent. Donc,

$$R^{(\text{th})} = N_c \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + 2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right] = \begin{cases} \frac{2}{3} \neq R^{(\text{exp})} & N_c = 1 \\ \frac{4}{3} \neq R^{(\text{exp})} & N_c = 2 \\ 2 \approx R^{(\text{exp})} & N_c = 3 \end{cases} \quad (3.7)$$

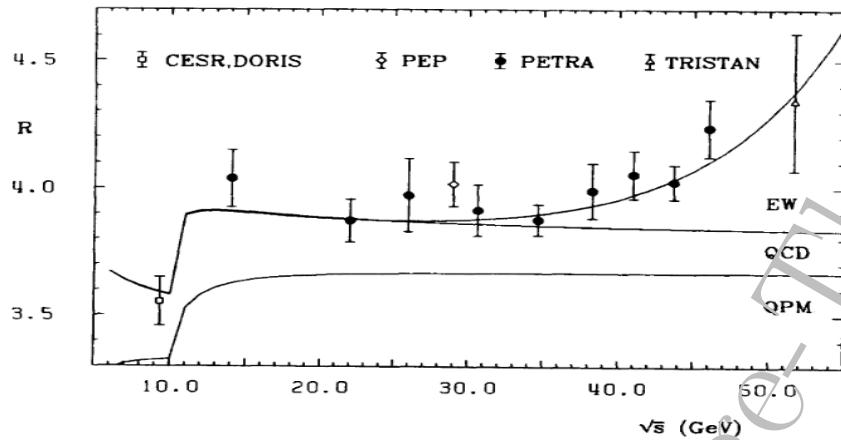


FIGURE 3.1 – Comparaison de $R^{(\text{exp})}$ avec $R^{(\text{th})}$, Nuc. Phys B (Proc. Suppl.) 3 (1988) 39-138.

▷ Pour $\sqrt{s} < 9 \text{ GeV}$: dans ce cas, 4 quarks qui rentrent en jeu (u, d, s et c). Donc,

$$R^{(\text{th})} = N_c \left[2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 2 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right] = \begin{cases} \frac{10}{9} \neq R^{(\text{exp})} & N_c = 1 \\ \frac{20}{9} \neq R^{(\text{exp})} & N_c = 2 \\ \frac{10}{3} \approx R^{(\text{exp})} & N_c = 3 \end{cases} \quad (3.8)$$

▷ Pour $\sqrt{s} > 10 \text{ GeV}$: dans ce cas, 5 quarks qui rentrent en jeu (u, d, s, c et b). Donc,

$$R^{(\text{th})} = N_c \left[2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 3 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right] = \begin{cases} \frac{11}{9} \neq R^{(\text{exp})} & N_c = 1 \\ \frac{22}{9} \neq R^{(\text{exp})} & N_c = 2 \\ \frac{11}{3} \approx R^{(\text{exp})} & N_c = 3 \end{cases} \quad (3.9)$$

On voit que les prédictions théoriques pour $N_c = 3$ sont en accord avec les mesures expérimentales pour les 3 cas précédents, voir figure (3.1).

3.1.2 Charge de couleur et le groupe $SU(3)$

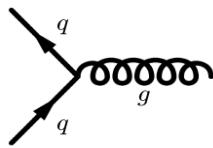
Un quark est un triplet de couleur, à chaque saveur de quark on associe un indice de couleur i qui prend trois valeurs possibles. Par exemple, un quark entrant correspond au spinor u_i (pour $i = 1, 2, 3$). On peut représenter un quark dans un état de couleur donné par un vecteur dans l'espace vectoriel des couleurs (à 3 dimensions),

$$|r\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv r \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv b \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv g \quad (3.10)$$

où r , b et g sont les quarks rouge (red), bleu (blue) et vert (green), respectivement. Donc, un spinor de Dirac d'un quark est représenté par le triplet

$$q = \begin{pmatrix} r \\ b \\ g \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

On dit que le spinor q appartient à la représentation fondamentale **3** du groupe $SU(3)$ et le spinor \bar{q} appartient à la représentation anti-fondamentale **3** de $SU(3)$. Le gluon est un octet **8** dans l'espace des couleurs. A l'aide du vertex $q - q - g$, on peut déduire tous les états de couleurs possibles pour le gluon.



Le produit tensoriel des deux représentations fondamentales de $SU(3)$, $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$, est

$$\underbrace{\mathbf{3}}_{\mathbf{3}} \otimes \underbrace{\bar{\mathbf{3}}}_{\bar{\mathbf{3}}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

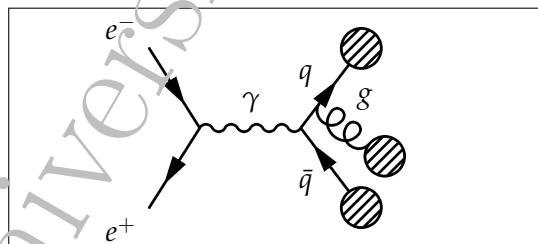
Alors, les états de couleurs possibles pour le gluon (ou les gluons) sont les suivants :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{b} + b\bar{r}) & g_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{g} + g\bar{b}) \\ g_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(g\bar{r} + r\bar{g}) & g_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b}) \\ g_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b\bar{g} - g\bar{b}) & g_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(g\bar{r} - r\bar{g}) \\ g_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b}) & g_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donc,

$$\left\{ \begin{array}{ll} q \in \mathbf{3} & \text{les quarks appartiennent à la représentation fondamentale } \mathbf{3} \text{ de } SU(3) \\ \bar{q} \in \bar{\mathbf{3}} & \text{les anti-quarks appartiennent à la représentation anti-fondamentale } \bar{\mathbf{3}} \text{ de } SU(3) \\ g \in \mathbf{8} & \text{les gluons appartiennent à la représentation adjointe } \mathbf{8} \text{ de } SU(3) \end{array} \right.$$

L'existence du gluon (et ses états de couleur) est prouvée par plusieurs expériences. On cite comme exemple : (i) l'annihilation electron-positron $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$, (ii) désintégration du quarkonium $Q\bar{Q} \rightarrow 3g$ ou $Q\bar{Q} \rightarrow \gamma + 2g$, ... etc. Le diagramme de Feynman décrivant la réaction de l'exemple (i) est,



Le rapport entre les sections efficaces des réactions $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$ et $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$, calculées théoriquement est,

$$R_3^{(\text{th})} = \frac{\sigma[e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g]}{\sigma[e^+e^- \rightarrow q\bar{q}]} \propto \alpha_s \quad (3.13)$$

où α_s est la constante de couplage forte. Le rapport mesuré expérimentalement, voir figure (3.2), est en accord avec le rapport prédit par la théorie.

3.2 Groupe $SU(3)$ et ses représentations

On peut choisir les matrices de Gell-Mann divisées par 2, $\lambda_a/2$ (pour $a = 1, \dots, 8$), comme générateurs de $SU(3)$. Alors, un élément de ce groupe s'écrit sous la forme,

$$U = e^{-i\alpha_a T_a} \quad (3.14)$$

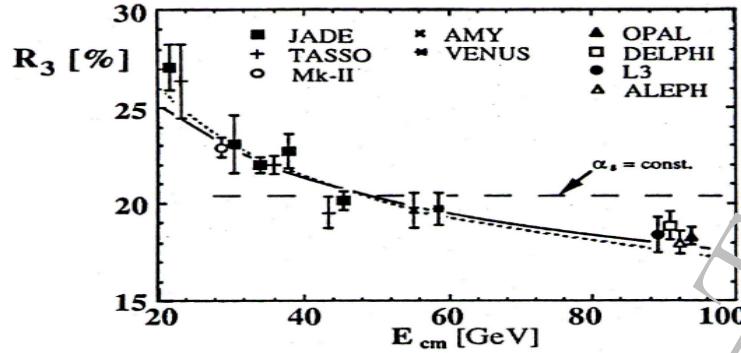


FIGURE 3.2 – Comparaison de $R_3^{(\text{exp})}$ avec $R_3^{(\text{th})}$, Nuc. Phys B (Proc. Suppl.) 3 (1988) 39-138.

où α_a sont les paramètres du groupe et $T_a = \lambda_a/2$ sont les générateurs du groupe, ils vérifient les relations suivantes,

$$[\hat{T}_a, \hat{T}_b] = if_{abc} \hat{T}_c, \quad \text{Tr}[\hat{T}_a] = 0 \quad \text{Tr}[\hat{T}_a T_b] = \frac{\delta_{ab}}{2}. \quad (3.15)$$

Les matrice de Gell-Mann sont données par,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les constantes de structure f_{abc} sont réelles et totalement anti-symétriques par l'échange des indices a, b et c . On peut montrer que f_{abc} est donnée par,

$$f_{abc} = (4i)^{-1} \text{Tr}[\lambda_a [\lambda_b, \lambda_c]] \quad (3.17)$$

Voici quelques constantes de structure f_{abc} non nulles,

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 \\ f_{147} &= f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2 \\ f_{459} &= f_{678} = \sqrt{3}/2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le groupe $SU(3)$ possède deux représentations fondamentales, notés **3** et **3̄**. La représentation **3** est générée par les matrices (3.19) et la représentation **3̄** est générée par les matrices $\{-\bar{T}^{*a}\}$, où $-\bar{T}^{*a} = \bar{\lambda}_a/2$ avec,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\lambda}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\lambda}_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\lambda}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\lambda}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\lambda}_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\lambda}_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\lambda}_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les générateurs de la représentation anti-fondamentale $\bar{\mathbf{3}}$ vérifient la relation (algèbre de Lie),

$$\left[\frac{\bar{\lambda}_a}{2}, \frac{\bar{\lambda}_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\bar{\lambda}_c}{2} \quad (3.20)$$

La représentation adjointe, notée $\mathbf{8}$, est générée par les matrice 8×8 , $(F_a)_{bc} = -i f_{abc}$

$$F_a = -i \begin{pmatrix} f_{a11} & f_{a12} & \cdots & f_{a18} \\ f_{a21} & f_{a22} & \cdots & f_{a28} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{a81} & f_{a82} & \cdots & f_{a88} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Par exemple :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad F_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer les facteurs de couleur des amplitudes, on a besoin de calculer les traces des produit des matrices de couleur dans la représentation fondamentale. Voici quelques relation utiles :

Le commutateur et l'anti-commutateur de deux matrices de couleur,

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (3.22)$$

$$\{T_a, T_b\} = \frac{\delta_{ab}}{N} \mathbb{I}_N + d_{abc} T_c \quad \text{avec} \quad d_{abc} = (4)^{-1} \text{Tr}[\lambda_a \{\lambda_b, \lambda_c\}] \quad (3.23)$$

où f_{abc} et d_{abc} sont les constantes de structure du groupe (anti-symétrique et symétrique, respectivement), $\mathbb{I}_{(N)}$ est la matrice unité de dimension $N \times N \equiv 3 \times 3$.

A l'aide de ces deux relations, on montre que le produit de deux matrices de couleur est donné par,

$$T_a T_b = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{N} \delta_{ab} I_{(N)} + (d_{abc} + i f_{abc}) T_c \right] \quad (3.24)$$

Les matrices de couleur sont de trace nulle par définition,

$$\text{Tr}[T_a] = 0 \quad (3.25)$$

On peut monter que les traces de 2, 3 et 4 matrices de couleurs sont données par,

$$\text{Tr}[T_a T_b] = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (3.26)$$

$$\text{Tr}[T_a T_b T_c] = \frac{1}{4} (d_{abc} + i f_{abc}) \quad (3.27)$$

$$\text{Tr}[T_a T_b T_c T_d] = \frac{1}{4N} \delta_{ab} \delta_{cd} + \frac{1}{8} (d_{abe} + i f_{abe}) (d_{cde} + i f_{cde}) \quad (3.28)$$

$$\text{Tr}[T_a T_b T_a T_d] = -\frac{1}{4N} \delta_{bd} \quad (3.29)$$

Une autre relation très utile qui est la transformation de Fierz,

$$(T_a)_{ij} (T_a)_{kl} = \frac{1}{2} \left[\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \quad (3.30)$$

On peut dériver d'autres relations sur les générateurs de la représentation adjointe (F_a) et les matrices D_a , qu'ils sont définis par,

$$(F_a)_{bc} = -i f_{abc} \quad (3.31)$$

$$(D_a)_{bc} = d_{abc} \quad (3.32)$$

Les identités de Jacobi sont définies par,

$$f_{abe}f_{ecd} + f_{cbe}f_{aed} + f_{dbe}f_{ace} = 0 \quad (3.33)$$

$$f_{abe}d_{ecd} + f_{cbe}d_{aed} + f_{dbe}d_{ace} = 0 \quad (3.34)$$

A l'aide de l'identité de Jacobi, on déduit que,

$$[F_a, F_b] = i f_{abc} F_c \quad (3.35)$$

$$[F_a, D_b] = i f_{abc} D_c \quad (3.36)$$

On peut montrer que,

$$f_{abb} = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}[F_a] = 0 \quad (3.37)$$

$$d_{abb} = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}[D_a] = 0 \quad (3.38)$$

$$f_{acd}f_{bcd} = N \delta_{ab} \Leftrightarrow \text{Tr}[F_a F_b] = N \delta_{ab} \quad (3.39)$$

$$f_{acd}d_{bcd} = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}[F_a D_b] = 0 \quad (3.40)$$

$$d_{acd}d_{bcd} = \frac{N^2 - 4}{N} \delta_{ab} \Leftrightarrow \text{Tr}[D_a D_b] = \frac{N^2 - 4}{N} \delta_{ab} \quad (3.41)$$

Traces de produits des matrice F_a et D_a ,

$$\text{Tr}[F_a F_b F_c] = i \frac{N}{2} f_{abc} \quad (3.42)$$

$$\text{Tr}[D_a F_b F_c] = \frac{N}{2} d_{abc} \quad (3.43)$$

$$\text{Tr}[D_a D_b F_c] = i \frac{N^2 - 4}{2N} f_{abc} \quad (3.44)$$

$$\text{Tr}[D_a D_b D_c] = \frac{N^2 - 12}{2N} d_{abc} \quad (3.45)$$

$$\text{Tr}[F_a F_b F_c F^d] = \delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ad} \delta_{bc} + \frac{N}{4} (d_{abe} d_{cde} - d_{ace} d_{bde} + d_{ade} d_{bce}) \quad (3.46)$$

Les constantes de Casimir de la représentation fondamentale (C_F) et adjointe (C_A) sont reliées aux générateurs et aux constantes de structure par :

$$(T^a T^a)_{ij} = C_F \delta_{ij}, \quad f_{abc} f_{abd} = C_A \delta_{cd} \quad (3.47)$$

où $C_F = (N^2 - 1)/(2N)$, $C_A = N$

3.3 Lagrangien classique de la chromodynamique

On représente un champ de quark par un triplet de $SU(3)$,

$$\psi = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

où q_r , q_b et q_g représentent les quarks dans les états de couleurs rouge, bleu et vert, respectivement. Chaque composante de ψ est un spinor de Dirac, c.à.d. ψ en réalité s'écrit,

$$\psi = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$q_r \equiv \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

$q_b \equiv \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

$q_g \equiv \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

Les quarks sont des fermions de spin 1/2, donc leur évolution est décrite par l'équation de Dirac,

$$(i \not{d} - m) \mathbb{I}_{3 \times 3} \psi(x) = 0 \quad (3.50)$$

où $\mathbb{I}_{3 \times 3}$ est la matrice identité 3×3 . Sous forme matricielle, l'équation de Dirac s'écrit,

$$\begin{pmatrix} (i \not{d} - m) & 0 & 0 \\ 0 & (i \not{d} - m) & 0 \\ 0 & 0 & (i \not{d} - m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = 0 \iff \sum_{i=1}^3 (i \not{d} - m) \psi_i(x) = 0 \quad (3.51)$$

Alors, la densité lagrangienne associée est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \bar{\psi}(x) (i \not{d} - m) \mathbb{I}_{3 \times 3} \psi(x) \\ &= \bar{\psi}_i(x) (i \not{d} - m) \delta_{ij} \psi_j(x) \\ &= \bar{\psi}_1(x) (i \not{d} - m) \psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x) (i \not{d} - m) \psi_2(x) + \bar{\psi}_3(x) (i \not{d} - m) \psi_3(x) \\ &\equiv \sum_{c=1}^3 \bar{\psi}_c(x) (i \not{d} - m) \psi_c(x) \end{aligned} \quad (3.52)$$

\mathcal{L}_F est invariante sous la transformation de jauge globale,

$$\psi'(x) = U \psi(x) \iff \psi'_i(x) = U_{ij} \psi_j(x) \quad (3.53)$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) U^\dagger \iff \bar{\psi}'_i(x) = \bar{\psi}_j(x) U_{ji}^* \quad (3.54)$$

avec,

$$U = e^{-i\alpha_a T_a}, \quad T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad \text{pour} \quad a = 1, 2, \dots, 8. \quad (3.55)$$

où λ_a sont les matrices de Gell-Mann et α_a sont les paramètres du groupe (ne dépendent pas de x dans ce cas). T_a sont les générateurs du groupe (matrices de couleur), ils vérifient les relations suivantes :

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad \text{Tr}[T_a T_b] = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (3.56)$$

La densité lagrangienne n'est pas invariante sous la transformation de jauge locale,

$$U(x) = e^{-i\alpha_a(x) T_a} \quad (3.57)$$

car

$$\mathcal{L}'_F = \mathcal{L}_F + (\partial_\mu \alpha_a(x)) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu T_a \psi(x) \neq \mathcal{L}_F \quad (3.58)$$

Pour rendre \mathcal{L}_F invariant sous la transformation de jauge locale, on remplace la dérivé normale ∂_μ par la dérivé covariante D_μ . La dérivé covariante est donnée par :

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - ig_s T_a G_\mu^a(x) \\ &= \partial_\mu - ig_s \mathbb{G}_\mu(x) \end{aligned} \quad (3.59)$$

où g_s est une constante de couplage (entre les champs ψ et G_μ^a), G_μ^a pour $a = 1, 2, \dots, 8$ sont les champs de jauge (champs de gluons) et \mathbb{G}_μ est la matrice des champs de jauge. La matrice \mathbb{G}_μ est donnée par :

$$\mathbb{G}_\mu = \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} G_\mu^3 + G_\mu^8/\sqrt{3} & G_\mu^1 - iG_\mu^2 & G_\mu^4 - iG_\mu^5 \\ G_\mu^1 + iG_\mu^2 & -(G_\mu^3 - G_\mu^8/\sqrt{3}) & G_\mu^6 - iG_\mu^7 \\ G_\mu^4 + iG_\mu^5 & G_\mu^6 + iG_\mu^7 & -2G_\mu^8/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

La matrice \mathbb{G}_μ se transforme comme suit :

$$\mathbb{G}'_\mu = U(x) \mathbb{G}_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g_s} (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x) \quad (3.61)$$

$$\iff \quad (3.62)$$

$$G'_\mu^a = G_\mu^a + f_{abc} \alpha_b G_\mu^c - \frac{1}{g_s} \partial_\mu \alpha_a \quad (3.63)$$

Alors, \mathcal{L}_F devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu D_\mu - m] \psi(x) \\ &= \bar{\psi}_i(x) [i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m\delta_{ij}] \psi_j(x) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Exercice : montrer que,

$$[D_\mu \psi(x)]' = U(x) [D_\mu \psi(x)] \quad (3.65)$$

$$\mathcal{L}'_F = \mathcal{L}_F \quad (3.66)$$

Le terme cinétique des bosons de jauge est donné par,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (3.67)$$

On peut écrire ce terme sous la forme,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2} \text{Tr} [\mathbb{F}_{\mu\nu} \mathbb{F}^{\mu\nu}] \quad (3.68)$$

avec $\mathbb{F}_{\mu\nu} = T_a F_{\mu\nu}^a$ et,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (3.69)$$

Exercice : montrer que,

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig_s T_a F_{\mu\nu}^a \quad (3.70)$$

$$\mathcal{L}'_G = \mathcal{L}_G \quad (3.71)$$

Alors, la densité lagrangienne classique de la chromodynamique est donnée par,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{class}} &= \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(x) (i \not{D} - m) \psi(x) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Si on prend en compte toutes les saveurs de quarks, la densité lagrangienne s'écrit sous la forme,

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{class}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_{k=1}^{N_f} \bar{\psi}_k(x) (i \not{D} - m_k) \psi_k(x) \quad (3.73)$$

où N_f est le nombre de saveur des quarks et m_k est la masse du quark k .

3.4 Quantification de la chromodynamique

3.4.1 Généralités sur la quantification des théories de jauge non-abéliennes

Comme en QED, on doit fixer la jauge pour lever la contradiction dans les relations de commutation. Le conjugué du champ du gluon est,

$$\pi_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 G^{a\mu})} = -F_{0\mu}^a \quad (3.74)$$

donc,

$$\pi_0^a = 0 \quad (3.75)$$

La relation de commutation du champ de gluon G_μ^a et son conjugué π_μ^a ,

$$[G_\mu^a(x), \pi_\nu^b(y)]_{x_0=y_0} = i\delta_{ab}g_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.76)$$

mais

$$\begin{aligned} [G_0^a(x), \pi_0^b(y)]_{x_0=y_0} &= i\delta_{ab}g_{00}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ [G_0^a(x), 0]_{x_0=y_0} &= 0 \neq i\delta_{ab}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Pour lever cette contradiction, on doit fixer la jauge pour éliminer les degrés de liberté superficiels. Un terme de fixation de la jauge s'écrit,

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu G^{a\mu})^2 \quad (3.78)$$

où α est un paramètre de jauge (multiplicateur de Lagrange). Ce terme est covariant, on l'appelle jauge covariante.

Mais cette procédure ne résout pas tous les problèmes et ne conduit pas à une quantification consistante, comme dans le cas de l'électrodynamique quantique si la jauge covariante a été choisie. L'origine de ces problèmes est l'*auto-interaction* des bosons des jauge dans les théories de jauge non-abéliennes (vertex à 3 – g et 4 – g dans $SU(3)$ par exemple).

- **Problème 1 : non-invariance de jauge de la correction à une boucle au propagateur du gluon.** Si on prend en compte que la densité lagrangienne des gluons $\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF}$, on s'aperçoit que le propagateur du gluon ne reçoit que les contributions des deux diagrammes à une boucle représenté (à gauche) dans la figure (3.3)¹. On peut facilement montrer que cette contribution n'est pas invariante de jauge, c.à.d.

$$q^\mu \mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab} \neq 0 \quad (3.79)$$

où $\mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab}$ est la contribution de ces deux diagrammes.

- **Problème 2 : section efficace mal définie de la diffusion $g - g$.** On peut montrer que la section efficace de la diffusion $gg \rightarrow gg$, voir les deux diagrammes de Feynman représenté (à gauche) dans la figure (3.4), n'est pas bien définie car les polarisations physiques du gluon ne sont pas traitées correctement.

1. Ces diagrammes à une boucle sont calculés dans le chapitre 5.

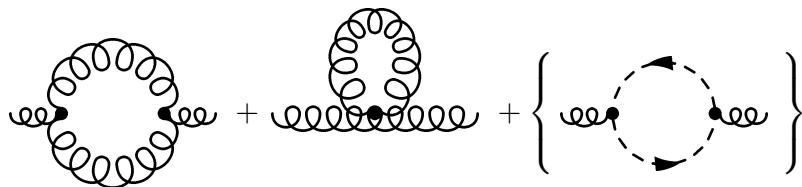


FIGURE 3.3 – Correction au propagateur du gluon (sans ghost)

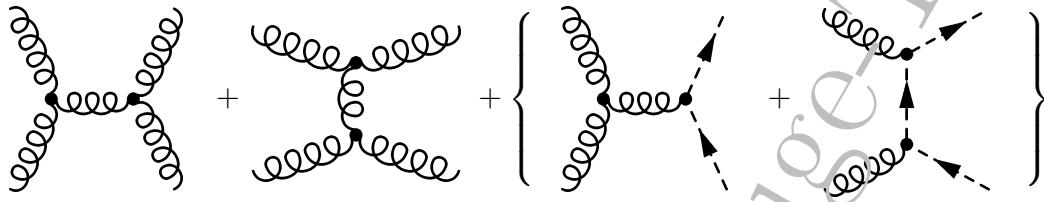


FIGURE 3.4 – Diffusion gluon-gluon.

L'origine de ce problème est que la densité lagrangienne $\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF}$ ne permet pas d'extraire les polarisations physiques du gluon. On mentionne que ce genre de problèmes est rencontré avec les termes de fixation de jauge covariantes (jauge de Feynman, Landau, ...). Pour résoudre ce problème, on doit rajouter un autre terme au lagrangien appelé densité lagrangienne des ghosts de Fadeev-Popov,

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial^\mu \chi^{*a}) D_\mu^{ab} \chi^b \quad (3.80)$$

où χ^a est le champ de ghost est un champ scalaire qui se comporte comme les fermions (n'est pas physique). D_μ^{ab} est la dérivé covariante dans la représentation adjointe du groupe $SU(3)$,

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta_{ab} - f_{abc} G_\mu^c \quad (3.81)$$

La contribution des ghosts de Fadeev-Popov rend la correction à une boucle au propagateur du gluon invariante de jauge (ç.à.d. $q^\mu \mathcal{P}_{\mu\nu}^{ab} = 0$) grâce au diagramme de Feynman à une boucle des fantômes (entre accolades) représenté dans la figure (3.3); et corrige la section efficace en restaurant l'unitarité dans la diffusion $gg \rightarrow gg$ grâce à la contribution des deux diagrammes de Feynman des fantômes (entre accolades) représentés dans la figure (3.4).

Donc, après la quantification, la densité lagrangienne de la QCD devient,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \quad (3.82)$$

On peut diviser \mathcal{L}_{QCD} en densité lagrangienne libre \mathcal{L}_0 et une densité lagrangienne d'interaction \mathcal{L}_I ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \quad (3.83)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) (\partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu}) - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu G^{a\mu})^2 \\ & + (\partial^\mu \chi^{*a}) (\partial_\mu \chi^a) + \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi \end{aligned} \quad (3.84)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & -\frac{g_s}{2} \delta_{abc} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) G^{b\mu} G^{c\nu} \equiv \mathcal{L}_I^{3G} & \rightarrow \text{vertex 3 gluons} \\ & -\frac{g_s^2}{4} f_{abc} f_{cde} G_\mu^a G_\nu^b G^{uc} G^{vd} \equiv \mathcal{L}_I^{4G} & \rightarrow \text{vertex 4 gluons} \\ & -g_s f_{abc} (\partial^\mu \chi^{*a}) \chi^b G_\mu^c \equiv \mathcal{L}_I^{2ghG} & \rightarrow \text{vertex ghost-ghost-gluon} \\ & + g_s \bar{\psi} T_a \gamma^\mu \psi G_\mu^a \equiv \mathcal{L}_I^{2FG} & \rightarrow \text{vertex quark-quark-gluon} \end{aligned} \quad (3.85)$$

3.4.2 Quantification par la méthode fonctionnelle

Quantification de la théorie scalaire :

La fonction de Green à n -points d'un champ scalaire $\phi(x)$ est définie par la valeur moyenne dans le vide du produit chronologique des n opérateurs $\hat{\phi}(x_1), \hat{\phi}(x_2), \dots, \hat{\phi}(x_n)$,

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle \quad (3.86)$$

Par exemple, le propagateur du point x_1 au point x_2 (ou de x_2 à x_1) est donné par la fonction de Green à 2-point,

$$G_n(x_1, x_2) = \langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle \quad (3.87)$$

où ϕ est un champ scalaire neutre et $\hat{\phi}$ est l'opérateur champ défini dans la quantification canonique. On rappelle que l'opérateur champ et son conjugué canonique $\pi = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}$ vérifient les relations de commutation, à temps-égal, suivantes :

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t)] &= [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

La même fonction de Green définie dans l'éq. (3.86) peut être définie par l'intégrale fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle &= \frac{\int [d\phi] \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp[iS]}{\int [d\phi] \exp[iS]} \\ &\equiv G_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (3.89)$$

où S est l'action classique, c.à.d elle est définie en fonction des champs et pas des opérateurs !

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)). \quad (3.90)$$

La densité lagrangienne classique \mathcal{L} associée au champ ϕ s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \overbrace{\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2)}^{\equiv \mathcal{L}_0} - \overbrace{V(\phi)}^{\equiv \mathcal{L}_I} \\ &\equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \end{aligned} \quad (3.91)$$

avec \mathcal{L}_0 est la densité lagrangienne libre, elle ne contient que le terme cinétique et le terme de masse. \mathcal{L}_I est la densité lagrangienne d'interaction, elle contient le terme décrivant l'auto-interaction du champ ϕ . Par exemple,

$$\mathcal{L}_I = -V(\phi) = \begin{cases} \lambda \frac{\phi^3}{3!} & \text{théorie } \lambda - \phi - 3 \\ \lambda \frac{\phi^4}{4!} & \text{théorie } \lambda - \phi - 4 \end{cases} \quad (3.92)$$

où λ est une constante de couplage.

On peut re-dériver la fonction de Green définie dans l'éq.(3.89) à l'aide de la fonctionnelle génératrice suivante (méthode de Schwinger) :

$$Z[J] = \int [d\phi] \exp[i \int d^4x (\mathcal{L} + \phi J)] \quad (3.93)$$

où $J(x)$ est une source artificielle. On peut montrer que la fonction de Green à n -point est obtenu en dérivant n -fois la fonctionnelle génératrice $Z[J]$ par rapport à la source J ,

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{(-i)^n}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \equiv \langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle \quad (3.94)$$

On fait un développement en série de (3.89), on peut montrer aussi que,

$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n G_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n). \quad (3.95)$$

Exercice : théorie $\lambda - \phi - 3$

La densité lagrangienne de la théorie ϕ^3 est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) + \frac{g}{3!} \phi^3. \quad (3.96)$$

Les fonctionnelles génératrices Z et Z_0 sont données par :

$$Z[J] = \int [d\phi] \exp[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \frac{g}{3!} \phi^3 + \phi J)]. \quad (3.97)$$

$$Z_0[J] = \int [d\phi] \exp[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \phi J)]. \quad (3.98)$$

(1) Montrer que

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left\{ -i \int d^4x V \left(\frac{\delta}{i \delta J(x)} \right) \right\} Z_0[J], \\ &= \left\{ 1 - \frac{g}{3!} \int d^4x \left(\frac{\delta}{i \delta J(x)} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{3!} \right)^2 \left(\int d^4x \left(\frac{\delta}{i \delta J(x)} \right)^3 \right)^2 + \dots \right\} Z_0[J] \end{aligned} \quad \text{avec } V \left(\frac{\delta}{i \delta J(x)} \right) = -\frac{g}{3!} \left(\frac{\delta}{i \delta J(x)} \right)^3 \quad (3.99)$$

(2) Montrer que la fonctionnelle génératrice libre s'écrit

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \int [d\phi] \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y) + i \int d^4x \phi(x) J(x) \right]. \\ \text{avec } K(x, y) &= \delta^4(x - y) \frac{\partial}{\partial y^\mu \partial y_\mu}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

(3) Montrer qu'on peut écrire la fonctionnelle génératrice (voir Muta p.73)

$$Z_0[J] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y) \right\}, \quad \text{avec } \Delta(x, y) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.101)$$

où $\Delta(x, y)$ est le propagateur de Feynman du champ scalaire ϕ .

(4) Montrer que le propagateur $\Delta(x, y)$ est lié à la fonction de Green à deux points par

$$G_2(x, y) = \langle 0 | T[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle = \frac{(-i)^2}{Z_0[0]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0}. \quad (3.102)$$

(5) Montrer qu'on peut écrire

$$Z[J] = Z_0[J] \{ 1 - g z_1[J] + g^2 z_2[J] + O(g^3) \}. \quad (3.103)$$

trouver $z_1[J]$ et $z_2[J]$.

(6) On peut montrer que la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes s'écrit :

$$W[J] = -i \ln Z[0] + \frac{1}{2} \int dx dy J(x) \Delta(x, y) J(y) - i \{-g z_1[J] + g^2 z_2[J] + O(g^3)\}. \quad (3.104)$$

avec

$$G_n^c(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (3.105)$$

6-1. Calculer les fonctions de Green connexes G_1^c, G_2^c, G_3^c et G_4^c .

6-2. Écrire les transformés de Fourier des ces fonctions.

6-3. Dériver les règles de Feynman de cette théorie dans l'espace des impulsions.

Quantification de la chromodynamique :

Champs de jauge :

Par analogie avec le cas scalaire, la fonctionnelle génératrice pour le champ de jauge A_μ^a ($A_\mu^a \equiv G_\mu^a$ pour $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ est le champ de gluon en QCD) est définie par :

$$Z[J] = \int [dA] \exp[i \int d^4x (\mathcal{L}_G + A_\mu^a J^{a\mu})]. \quad (3.106)$$

avec

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad \text{et} \quad [dA] = \prod_{a,\mu} dA_\mu^a \quad (3.107)$$

Bien que les termes \mathcal{L}_G et $[dA]$ soient invariants sous la transformation de jauge, la fonctionnelle génératrice $Z[J]$ ne l'est pas car le terme de source $A_\mu^a J^{a\mu}$ n'est pas invariant de jauge. On a,

$$\bullet \quad -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu}^a F'^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (3.108)$$

$$\bullet \quad \begin{aligned} [dA'] &= [dA] \det \left(\frac{\partial A'^a_\mu}{\partial A^b_\nu} \right) \\ &= [dA] \det(\delta_{ab} + f_{abc} \alpha_b) \\ &= [dA] (1 + \mathcal{O}(\alpha^2)) \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\text{mais } \bullet \quad A'^a_\mu J^{a\mu} \neq A^a_\mu J^{a\mu} \quad (3.110)$$

Donc, la fonctionnelle génératrice $Z[J]$ n'est pas invariante sous la transformation de jauge, c.à.d.

$$Z'[J] \neq Z[J] \quad (3.111)$$

On note que, pour obtenir la dernière ligne dans (3.109), on a utilisé la relation : $\det(1 + L) = 1 + \text{Tr}(L) + \dots + \det(L)$.

On voit que si la source est nulle ($J \equiv 0$), alors la fonctionnelle génératrice $Z[0]$ est invariante sous la transformation de jauge. Comme dans la quantification canonique, on doit imposer des contraintes sur le champ de jauge c.à.d. fixer la jauge. La forme générale d'un terme de fixation de jauge s'écrit,

$$D^\mu A_\mu^a = B^a \quad (3.112)$$

La jauge de Lorentz, par exemple, correspond à $D^\mu \equiv \partial^\mu$ et $B^a \equiv 0$. Pour implémenter cette contrainte dans $Z[0]$, on introduit la quantité suivante

$$\Delta_G[A] \int [\prod_a d\alpha_a] \delta^n(D^\mu A_\mu^a - B^a) = 1 \quad (3.113)$$

où α_a est le paramètre du groupe et n est sa dimension. Alors, la fonctionnelle génératrice $Z[0]$ devient,

$$Z[0] = \int [dA] [\prod_a d\alpha_a] \delta^n(D^\mu A_\mu^a - B^a) \Delta_G[A] \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_G \right] \quad (3.114)$$

$$= \int [dA] \Delta_G[A] \prod_{a,x} \delta^n(D^\mu A_\mu^a - B^a) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_G \right] \quad (3.115)$$

On note que $Z[0]$ reste toujours invariante de jauge car $\mathcal{L}_G, [dA], [\prod_a d\alpha_a]$ et $\Delta_G[A]$ sont invariants de jauge (voir Muta pour plus de détail).

Finalement, on peut montrer que la fonctionnelle génératrice $Z[J]$ s'écrit,

$$Z[J] = \int [dA] \det M_G \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + A_\mu^a J^{a\mu} \right) \right] \quad (3.116)$$

avec

$$[M_G(x, y)]_{ab} = \frac{\delta [D^\mu A_\mu^a(x)]}{\delta \alpha_a(y)} \quad (3.117)$$

et le terme de fixation de jauge

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\lambda} (D^\mu A_\mu^a)^2 \quad (3.118)$$

On note qu'il existe plusieurs choix de fixation de jauge, on cite par exemple :

▷ Jauge de Coulomb (jauge non-covariante) :

$$\begin{aligned} D^\mu &\equiv (0, \vec{\nabla}) & \mathcal{L}_{GF} &= -\frac{1}{2\lambda} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^a)^2 \\ [M_G(x, y)]_{ab} &= [\delta_{ab} \vec{\nabla}^2 - g_s f_{abc} \vec{A}^c \cdot \vec{\nabla}] \delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (3.119)$$

▷ Jauge de Lorentz (jauge covariante) :

$$\begin{aligned} D^\mu &\equiv \partial^\mu & \mathcal{L}_{GF} &= -\frac{1}{2\lambda} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \\ [M_G(x, y)]_{ab} &= [\delta_{ab} \square - g_s f_{abc} \partial^\mu A_\mu^c] \delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (3.120)$$

▷ Jauge axiale (jauge non-covariante) :

$$\begin{aligned} D^\mu &\equiv \eta^\mu & \mathcal{L}_{GF} &= -\frac{1}{2\lambda} (\eta^\mu A_\mu^a)^2 \\ [M_G(x, y)]_{ab} &= [\delta_{ab} \eta \cdot \partial - g_s f_{abc} \vec{\eta} \cdot \vec{A}^c] \delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (3.121)$$

où η^μ est un 4-vecteur constant de genre espace ($\eta^2 > 0$).

▷ Jauge toporelle (jauge non-covariante) :

$$\begin{aligned} D^\mu &\equiv (1, 0, 0, 0) & \mathcal{L}_{GF} &= -\frac{1}{2\lambda} (A_0^a)^2 \\ [M_G(x, y)]_{ab} &= [\delta_{ab} \partial_0 - g_s f_{abc} A_0^c] \delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (3.122)$$

Champs des ghosts :

Le déterminant de la matrice M_G peut s'écrire sous forme de l'intégrale fonctionnelle suivante :

$$\det M_G = \int [d\chi] [d\chi^*] \exp \left[-i \int d^4x d^4y \chi^{*a}(x) [M_G(x, y)]_{ab} \chi^b(y) \right] \quad (3.123)$$

où χ^a sont des champs scalaires qui obéissent à la statistique de Fermi-Dirac (donc des variables de Grassmann) et appartiennent à la représentation adjointe du groupe $SU(N)$ (dans notre cas le groupe $SU(3)$). On peut montrer que

$$\int d^4x d^4y \chi^{*a}(x) [M_G(x, y)]_{ab} \chi^b(y) = - \int d^4x [\partial^\mu \chi^a(x)]^* D_\mu^{ab} \chi^b(x) \quad (3.124)$$

avec D_μ^{ab} est la dérivé covariante dans la représentation adjointe,

$$D_\mu^{ab} = \delta_{ab} \partial_\mu - g_s f_{abc} A_\mu^c \quad (3.125)$$

Donc, la quantité $\det M_G$ peut s'écrire sous forme de la fonctionnelle génératrice suivante,

$$\det M_G = \int [d\chi] [d\chi^*] \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{FP} \right] \equiv Z_\chi[0, 0] \quad (3.126)$$

Champs fermioniques :

On considère maintenant la densité lagrangienne totale de la QCD (en jauge covariante),

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \quad (3.127)$$

avec

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (3.128)$$

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(x) [i\gamma^\mu D_\mu - m] \psi(x) \quad (3.129)$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\lambda} (\partial^\mu G_\mu^a)^2 \quad (3.130)$$

$$\mathcal{L}_{FP} = (\partial^\mu \chi^{*a}) D_\mu^{ab} \chi^b \quad (3.131)$$

Alors, la fonctionnelle génératrice associée à la densité lagrangienne totale s'écrit sous la forme,

$$\begin{aligned} Z[J, \zeta^*, \zeta, \eta, \bar{\eta}] &= \int [dA][d\chi][d\chi^*][d\psi][d\bar{\psi}] \\ &\times \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} + A_\mu^a J^{a\mu} + \chi^{*a} \zeta^a + \chi^a \zeta^{*a} + \bar{\psi} \eta + \bar{\eta} \psi \right) \right] \end{aligned} \quad (3.132)$$

où ζ^a et ζ^{*a} sont des sources associées (variables de Grassmann) aux champs des ghosts et $\eta, \bar{\eta}$ sont des sources (classiques) associées aux champs fermioniques. Ils vérifient

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = 0, \quad \{\psi(x), \eta(y)\} = 0 \quad (3.133)$$

Donc, le propagateur du fermion est donné par la fonction de Green à 2-points suivantes :

$$\langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(x) \bar{\hat{\psi}}_\beta(y) | 0 \rangle = \frac{(-i)^2}{Z[0, 0, 0, 0, 0]} \frac{\delta^2 Z[J, \zeta, \zeta^*, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta_\alpha(x) \delta(-\eta_\beta(y))} \Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=\zeta=\zeta^*=0}. \quad (3.134)$$

3.4.3 Invariance BRST

La densité lagrangienne de la chromodynamique quantique (après quantification) est,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \quad (3.135)$$

Les deux derniers termes ' $\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$ ' ne sont pas invariant sous la transformation de jauge locale du groupe $SU(3)$, donc la densité lagrangienne totale (\mathcal{L}_{QCD}) n'est pas invariante aussi. On peut montrer que \mathcal{L}_{QCD} est invariante sous une autre transformation plus générale appelée *transformation BRST* (Becchi-Rouet-Stora-Tyutin).

Pour dériver cette transformation, on récrit le paramètre du groupe comme suit,

$$\alpha_a(x) = -g_s \delta \lambda \chi_2^a(x) \quad (3.136)$$

où $\delta \lambda$ est une variable de Grassmann (indépendante de x). Ce dernier anti-commute avec le champ du fantôme χ_2^a ,

$$\{\delta \lambda, \chi_2^a\} = 0. \quad (3.137)$$

Alors, les transformations de jauge infinitésimales des champs ψ et G_μ^a s'exprime en fonction de la nouvelle variable comme suit,

$$\begin{cases} \delta G_\mu^a = \delta \lambda D_\mu^{ab} \chi_2^a \\ \delta \psi = \delta \lambda i g_s T_a \chi_2^a \psi \end{cases} \quad (3.138)$$

La densité lagrangienne classique de la QCD ($\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F$) est invariante sous les transformation (3.138). On impose les contraintes suivantes sur les deux champs de fantômes,

$$\begin{cases} \delta \chi_1^a = i \delta \lambda / \alpha \partial^\mu G_\mu^a \\ \delta \chi_2^a = -\frac{1}{2} \delta \lambda g_s f_{abc} \chi_2^b \chi_2^c \end{cases} \quad (3.139)$$

On peut montrer que ' $\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$ ' est invariant sous cette transformation et la transformation (3.138). On peut voir les transformations (3.138) et (3.139) comme la version quantique du transformation de jauge.

En résumé, les lagrangiens quantique des théories de jauge non-abéliennes sont invariants sous la transformation BRST. Cette transformation est donnée par,

$$\text{BRST} \equiv \begin{cases} \delta G_\mu^a = \delta \lambda D_\mu^{ab} \chi_2^a \\ \delta \psi = \delta \lambda i g_s T_a \chi_2^a \psi \\ \delta \chi_1^a = i \delta \lambda B^a \\ \delta \chi_2^a = -\frac{1}{2} \delta \lambda g_s f_{abc} \chi_2^b \chi_2^c \\ \delta B^a = 0 \end{cases} \quad (3.140)$$

avec

$$B^a = D^\mu G_\mu^a \quad (3.141)$$

3.4.4 Extraction des règles de Feynman par la méthode fonctionnelle

La fonctionnelle génératrice $Z[J, \zeta, \zeta^*, \eta, \bar{\eta}]$ définie dans l'éq. (3.132) peut s'écrire sous la forme :

$$Z[J, \zeta, \zeta^*, \eta, \bar{\eta}] = \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{\delta}{i \delta J^{a\mu}}, \frac{\delta}{i \delta \zeta^{*a}}, \frac{\delta}{i \delta (-\zeta^a)}, \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{i \delta (-\eta)} \right) \right\} Z_0[J, \zeta, \zeta^*, \eta, \bar{\eta}] \quad (3.142)$$

où \mathcal{L}_I est le densité lagrangienne d'interaction donnée par l'éq. (3.85) en remplaçant chaque champ par l'opérateur $\frac{\delta}{i \delta J}$ (où $J \equiv J^{a\mu}, \zeta^a, \dots$ etc. est la source associé à chaque champ). $Z_0[J, \zeta, \zeta^*, \eta, \bar{\eta}]$ est la fonctionnelle génératrice des champs libre, elle se décompose comme suit :

$$Z_0[J, \zeta, \zeta^*, \eta, \bar{\eta}] = Z_0^G[J] Z_0^{FP}[\zeta, \zeta^*] Z_0^F[\eta, \bar{\eta}] \quad (3.143)$$

où $= Z_0^G, Z_0^{FP}$, et Z_0^F sont les fonctionnelles génératrices libre associées, respectivement, aux champs des gluons, des fantômes de Faddeev-Popov et des fermions, elles prennent les formes suivantes :

$$Z_0^G[J] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^{a\mu}(x) D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) J^{b\nu}(y) \right\} \quad (3.144)$$

$$Z_0^{FP}[\zeta, \zeta^*] = \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \zeta^{*a}(x) D^{ab}(x-y) \zeta^b(y) \right\} \quad (3.145)$$

$$Z_0^F[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \right\} \quad (3.146)$$

Les propagateurs du gluon $D_{\mu\nu}^{ab}(x)$, des ghosts de Faddeev-Popov $D^{ab}(x)$ et des quarks $S(x)$ sont donnés par :

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x) = -\delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2 + i\lambda} \left(-g_{\mu\nu} + (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (3.147)$$

$$D^{ab}(x) = -\delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2 + i\lambda} \quad (3.148)$$

$$S(x) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot x}}{p - m + i\lambda} \quad (3.149)$$

Pour extraire les règles de Feynman, on utilise le développement en série de la fonctionnelle génératrice (3.150). On écrit donc

$$Z[J, \zeta, \zeta^*, \eta, \bar{\eta}] = \left\{ 1 + i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{\delta}{i \delta J^{a\mu}}, \frac{\delta}{i \delta \zeta^{*a}}, \frac{\delta}{i \delta (-\zeta^a)}, \frac{\delta}{i \delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{i \delta (-\eta)} \right) + \dots \right\} Z_0[J, \zeta, \zeta^*, \eta, \bar{\eta}] \quad (3.150)$$

Le **vertex 3-gluons** est associé à la fonction de Green à 3-points suivante :

$$G_{3\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(x_1, x_2, x_3) = (-i)^2 \frac{\delta^3}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3} \left[\int d^4x \mathcal{L}_I^{3G} \left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}} \right) Z_0^G[J] \right] \Big|_{J=0} \quad (3.151)$$

avec $J_i \equiv J^{a_i\mu_i}(x_i)$ (pour $i = 1, 2, 3$) et

$$\mathcal{L}_I^{3G} \left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}} \right) = -\frac{g_s}{2} f_{abc} \left(\partial_\mu \frac{\delta}{i\delta J^{av}} - \partial_\nu \frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}} \right) \frac{\delta}{i\delta J_\mu^b} \frac{\delta}{i\delta J_\nu^c} \quad (3.152)$$

on trouve,

$$\begin{aligned} -iG_{3\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(x_1, x_2, x_3) = & -ig_s f_{abc} \int d^4x \left[\right. \\ & \left\{ \partial_\mu D_{v\mu_1}^{aa_1}(x - x_1) - \partial_\nu D_{\mu\mu_1}^{aa_1}(x - x_1) \right\} D_{\mu_2}^{ba_2\mu}(x - x_2) D_{\mu_3}^{ca_3\nu}(x - x_3) \\ & + \left\{ \partial_\mu D_{v\mu_2}^{aa_2}(x - x_2) - \partial_\nu D_{\mu\mu_2}^{aa_2}(x - x_2) \right\} D_{\mu_3}^{ba_3\mu}(x - x_3) D_{\mu_1}^{ca_1\nu}(x - x_1) \\ & \left. + \left\{ \partial_\mu D_{v\mu_3}^{aa_3}(x - x_3) - \partial_\nu D_{\mu\mu_3}^{aa_3}(x - x_3) \right\} D_{\mu_1}^{ba_1\mu}(x - x_1) D_{\mu_2}^{ca_2\nu}(x - x_2) \right] \end{aligned} \quad (3.153)$$

On substitue les propagateurs du gluon par leurs transformées de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned} -iG_{3\mu_1\mu_2\mu_3}^{a_1a_2a_3}(x_1, x_2, x_3) = & \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} e^{i(k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + k_3 \cdot x_3)} \frac{d_{\mu_1\nu_1}(k_1) d_{\mu_2\nu_2}(k_2) d_{\mu_3\nu_3}(k_3)}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} \\ & \times g_s f_{a_1a_2a_3} \{ g^{\nu_1\nu_2}(k_1 - k_2)^{\nu_3} + g^{\nu_2\nu_3}(k_2 - k_3)^{\nu_1} + g^{\nu_3\nu_1}(k_3 - k_1)^{\nu_2} \} \end{aligned} \quad (3.154)$$

avec $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ et

$$d_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (3.155)$$

Pour chaque patte, on tronque un facteur $-id_{\mu\nu}/k^2$ pour obtenir le fameux vertex 3-gluons suivant :

$$-ig_s f_{a_1a_2a_3} \{ g^{\nu_1\nu_2}(k_1 - k_2)^{\nu_3} + g^{\nu_2\nu_3}(k_2 - k_3)^{\nu_1} + g^{\nu_3\nu_1}(k_3 - k_1)^{\nu_2} \} \quad (3.156)$$

Le **vertex 4-gluons** est associé à la fonction de Green à 4-points suivante :

$$G_{3\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{a_1a_2a_3a_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-i)^3 \frac{\delta^4}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4} \left[\int d^4x \mathcal{L}_I^{4G} \left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}} \right) Z_0^G[J] \right] \Big|_{J=0} \quad (3.157)$$

avec $J_i \equiv J^{a_i\mu_i}(x_i)$ (pour $i = 1, 2, 3, 4$) et

$$\mathcal{L}_I^{4G} \left(\frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}} \right) = -\frac{g_s^2}{4} f_{abe} f_{cde} \frac{\delta}{i\delta J^{a\mu}} \frac{\delta}{i\delta J^{b\nu}} \frac{\delta}{i\delta J_\mu^c} \frac{\delta}{i\delta J_\nu^d} \quad (3.158)$$

Après manipulation, on montre que :

$$\begin{aligned} G_{3\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{a_1a_2a_3a_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -i \frac{g_s^2}{4} f_{abe} f_{cde} \frac{\delta^4}{\delta J^{a_1\mu_1}(x_1) \delta J^{a_2\mu_2}(x_2) \delta J^{a_3\mu_3}(x_3) \delta J^{a_4\mu_4}(x_4)} \left[\int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 d^4y_4 \right. \\ & \times D_{\mu\mu_1}^{ab_1}(x - y_1) D_{\nu\lambda_1}^{b_2}(x - y_2) D_{\lambda_3}^{cb_3\mu}(x - y_3) D_{\lambda_4}^{db_4\nu}(x - y_4) \\ & \left. \times J^{b_1\lambda_1}(y_1) J^{b_2\lambda_2}(y_2) J^{b_3\lambda_3}(y_3) J^{b_4\lambda_4}(y_4) \right] \end{aligned} \quad (3.159)$$

On dérive par rapport aux sources, on trouve

$$\begin{aligned} -iG_{3\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{a_1a_2a_3a_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -g_s^2 \left\{ (f_{b_1b_3b}f_{b_2b_4b} - f_{b_1b_2b}f_{b_3b_4b})g^{\lambda_1\lambda_3}g^{\lambda_2\lambda_4} \right. \\ & + (f_{b_1b_2b}f_{b_3b_4b} - f_{b_1b_4b}f_{b_2b_3b})g^{\lambda_1\lambda_2}g^{\lambda_3\lambda_4} \\ & \left. + (f_{b_1b_3b}f_{b_4b_2b} - f_{b_1b_2b}f_{b_3b_4b})g^{\lambda_1\lambda_4}g^{\lambda_2\lambda_3} \right\} \\ & \times \int d^4x D_{\lambda_1\mu_1}^{b_1a_1}(x - x_1) D_{\lambda_2\mu_2}^{b_2a_2}(x - x_2) D_{\lambda_3\mu_3}^{b_3a_3}(x - x_3) D_{\lambda_4\mu_4}^{b_4a_4}(x - x_4) \quad (3.160) \end{aligned}$$

En tronquant les propagateur de chaque patte externe, on obtient le fameux vertex 4-gluons :

$$\begin{aligned} -g_s^2 \left\{ & (f_{b_1b_3b}f_{b_2b_4b} - f_{b_1b_2b}f_{b_3b_4b})g^{\lambda_1\lambda_3}g^{\lambda_2\lambda_4} \right. \\ & + (f_{b_1b_2b}f_{b_3b_4b} - f_{b_1b_4b}f_{b_2b_3b})g^{\lambda_1\lambda_2}g^{\lambda_3\lambda_4} \\ & \left. + (f_{b_1b_3b}f_{b_4b_2b} - f_{b_1b_2b}f_{b_3b_4b})g^{\lambda_1\lambda_4}g^{\lambda_2\lambda_3} \right\} \quad (3.161) \end{aligned}$$

3.5 Règles de Feynman en QCD

3.5.1 Règle de Feynman en jauge covariante

Voici les règles de Feynman dans la jauge covariante,

▷ Propagateur du fermion :

$$\begin{array}{c} i \bullet \xrightarrow{p} \bullet j \\ \text{Propagateur du fermion :} \end{array} \frac{i\delta^{ij}}{p - m + i\lambda} \quad (3.162)$$

▷ Propagateur du gluon :

$$\begin{array}{c} a, \mu \bullet \text{---} \bullet b, \nu \\ \text{Propagateur du gluon :} \\ k \end{array} \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i\lambda} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\lambda} \right) \quad (3.163)$$

▷ Propagateur du fantôme :

$$\begin{array}{c} a \text{---} \xrightarrow{p} \bullet b \\ \text{Propagateur du fantôme :} \end{array} \frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\lambda} \quad (3.164)$$

▷ Vertex fermion-fermion-gluon :

$$\begin{array}{c} a, \mu \bullet \text{---} \bullet j \\ \text{Vertex fermion-fermion-gluon :} \\ i \end{array} -i g_s (T_a)_{ji} \gamma^\mu \quad (3.165)$$

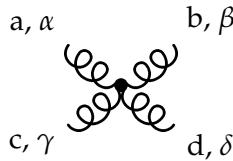
▷ Vertex fantôme-fantôme-gluon :

$$\begin{array}{c} a, \mu \bullet \text{---} \bullet c \\ \text{Vertex fantôme-fantôme-gluon :} \\ b \end{array} g_s f_{abc} q^\mu \quad (3.166)$$

▷ Vertex gluon-gluon-gluon :

$$\begin{array}{c} b, \beta \bullet \text{---} \bullet c, \gamma \\ \text{Vertex gluon-gluon-gluon :} \\ q \\ a, \alpha \end{array} \begin{aligned} & -g_s f_{abc} [g^{\alpha\beta} (p - q)^\gamma \\ & + g^{\beta\gamma} (q - r)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (r - p)^\beta] \quad (3.167) \end{aligned}$$

- ▷ Vertex gluon-gluon-gluon-gluon :



$$\begin{aligned} & -ig_s^2 f^{eac} f^{ebd} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \\ & -ig_s^2 f^{ead} f^{ebc} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}) \\ & -ig_s^2 f^{eab} f^{ecd} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \end{aligned} \quad (3.168)$$

- ▷ Gluon entrant :



$$\epsilon_\mu^a(k) \quad (3.169)$$

- ▷ Gluon sortant :



$$\epsilon_\mu^{*a}(k) \quad (3.170)$$

Dans la jauge de Feynman ($\xi = 1$), le propagateur du gluon devient



$$\frac{-i\delta^{ab}g^{\mu\nu}}{k^2 + i\lambda} \quad (3.171)$$

3.5.2 Règle de Feynman en jauge non-covariante

Il existe plusieurs choix pour fixer la jauge, tous ces choix sont équivalents car la physique est indépendante de la jauge, c.à.d. dans toutes les jauge on trouve les mêmes valeurs pour les observables physiques comme la section efficace ou le carré de l'amplitude. Le terme de fixation de jauge peut s'écrire sous la forme générale suivante,

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (D^\mu G_\mu^a)^2 \quad (3.172)$$

Alors,

- ▷ Jauge de Coulomb (jauge non-covariante) :

$$D^\mu \equiv (0, \vec{\nabla}) \quad \mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}^a)^2 \quad (3.173)$$

- ▷ Jauge de Lorentz (jauge covariante) :

$$D^\mu \equiv \partial^\mu \quad \mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu G_\mu^a)^2 \quad (3.174)$$

- ▷ Jauge axiale (jauge non-covariante) :

$$D^\mu \equiv \eta^\mu \quad \mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (\eta^\mu G_\mu^a)^2 \quad (3.175)$$

où η^μ est un 4-vecteur constant de genre espace ($\eta^2 > 0$).

- ▷ Jauge toporelle (jauge non-covariante) :

$$D^\mu \equiv (1, 0, 0, 0) \quad \mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (G_0^a)^2 \quad (3.176)$$

En jauge non covariante, les fantômes de Fadeev-Popov sont absents, il n'y a donc pas de règles de Feynman pour les fantômes mais les propagateurs de gluons virtuels sont différents (plus compliqués!) du cas de la jauge covariante. Dans la suite, nous donnons le propagateur et la somme sur les polarisations physiques du gluon dans 3 jauge non covariantes.

- **Jauge de coulomb (de radiation) :**

$$D_{\mu\nu}^{ab} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i\lambda} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu - k \cdot n (k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu + k^2 n_\mu n_\nu)}{k^2 - (k \cdot n)^2} \right]$$

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^a(k) \epsilon_\nu^{*b}(k) = - \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu - k \cdot n (k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu + k^2 n_\mu n_\nu)}{k^2 - (k \cdot n)^2} \right] \quad (3.177)$$

où $n_\mu = (0, 0, 0, 1)$.

- **Jauge axiale :**

$$D_{\mu\nu}^{ab} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i\lambda} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{n \cdot k} + \frac{(n^2 + \alpha k^2) k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right]$$

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^a(k) \epsilon_\nu^{*b}(k) = - \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{n \cdot k} + \frac{(n^2 + \alpha k^2) k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right] \quad (3.178)$$

où n est un 4-vecteur arbitraire de genre espace.

- **Jauge du cône de lumière :** c'est un cas particulier de la jauge axiale ($\alpha = 0$ et $n^2 = 0$)

$$D_{\mu\nu}^{ab} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i\lambda} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} \right]$$

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^a(k) \epsilon_\nu^{*b}(k) = - \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k \cdot n} \right] \quad (3.179)$$

Ces jauge sont très importantes car elles permettent d'extraire les polarisations physiques du gluon, c.à.d. les deux polarisations transverses. On peut facilement montrer que $n^\mu D_{\mu\nu} = 0$ et $k^\mu D_{\mu\nu} = 0$ dans la limite $k^2 \rightarrow 0$ et $n^\mu \epsilon_\mu^a = 0$ et $k^\mu \epsilon_\mu^a = 0$ pour la jauge cône de lumière.

On note que les autres règles de Feynman restent les mêmes sauf les règles de Feynman des fantômes qu'elles n'existent pas dans ce cas.

3.6 Calcul des processus à l'ordre de Born

Le modèle des partons considère les hadrons comme composés de particules ponctuelles quasi-libres. Ce modèle décrit la section efficace à haute énergie de la collision des hadrons avec d'autres particules, comme une somme incohérente des sections efficaces des partons dans les hadrons. Les facteurs hadroniques dans la section efficace sont données par la fonction de structure. Ces dernières sont exprimées en termes des fonctions de distribution partonique qui donnent la distribution de l'impulsion longitudinale des partons dans le hadron. Les fonctions de distribution ont un caractère universel et elles ne sont pas calculables dans la théorie perturbative mais on les détermine expérimentalement : une fois on les fixe dans un tel processus, on peut les utiliser pour étudier d'autres processus grâce de leur universalité, voir le cours de P. Aurenche et al [9] pour plus de détail.

3.6.1 Sections efficaces hadronique et partonique

Considérons la collision de deux hadrons H_1 et H_2 (proton-proton par exemple). On note les impulsions des hadrons P_1 et P_2 et les impulsions des partons à l'intérieur de ces hadrons p_1 et p_2 , respectivement. Les partons portent une fraction de l'impulsion des hadrons, alors

$$p_1 = x_1 P_1 \quad p_2 = x_2 P_2. \quad (3.180)$$

La section efficace hadronique est définie par,

$$\sigma^H = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_i^{H_1}(x_1, \mu_F^2) f_j^{H_2}(x_2, \mu_F^2) \hat{\sigma}^{ij \rightarrow k+l+X} \quad (3.181)$$

où $i, j \equiv \nu, d, s, c, b, g$ et

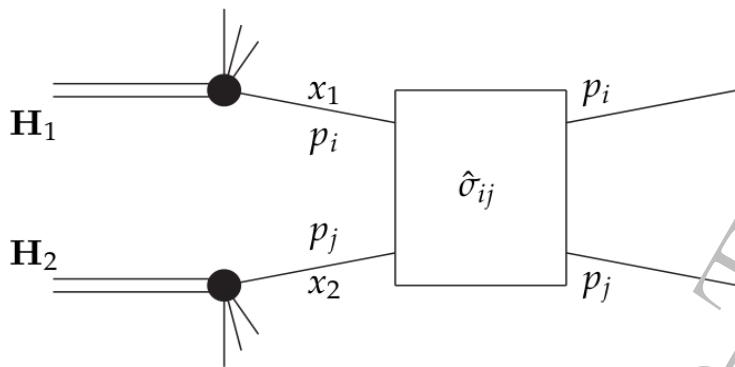


FIGURE 3.5 – Collision hadron-hadron d'après le modèle des partons.

- f_i^H : est la fonction de distribution partonique, elle décrit la distribution du parton i à l'intérieur du hadron H , elle décrit la physique à basse énergie.
 - $\hat{\sigma}^{ij \rightarrow k+l+X}$ est la section efficace partonique, elle décrit la physique à haut énergie.
 - μ_F^2 : est l'échelle de factorisation.

Confinement :

Les particules qui portent une charge de couleur comme les quarks et les gluons ne peuvent pas être isolées et donc ne peuvent pas être observées d'une manière directe dans les expériences de collision. Les quarks et les gluons doivent se combiner pour former des hadrons, ces derniers (les hadrons) sont observés expérimentalement. On appelle ce phénomène le *confinement* ... jusqu'à maintenant il n'existe pas une explication convaincante de ce phénomène!

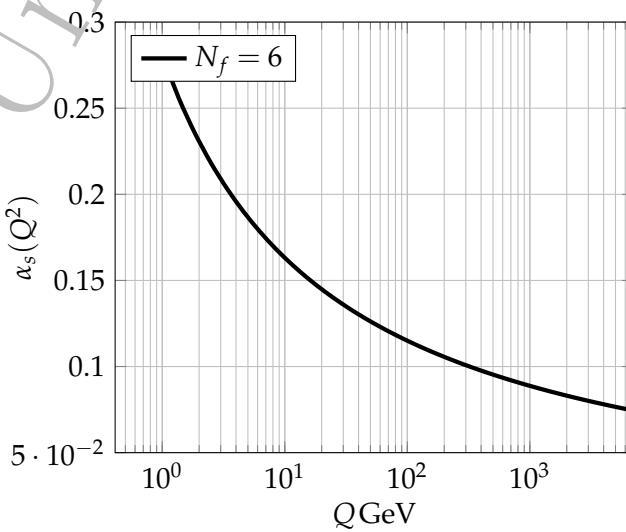
Liberté asymptotique :

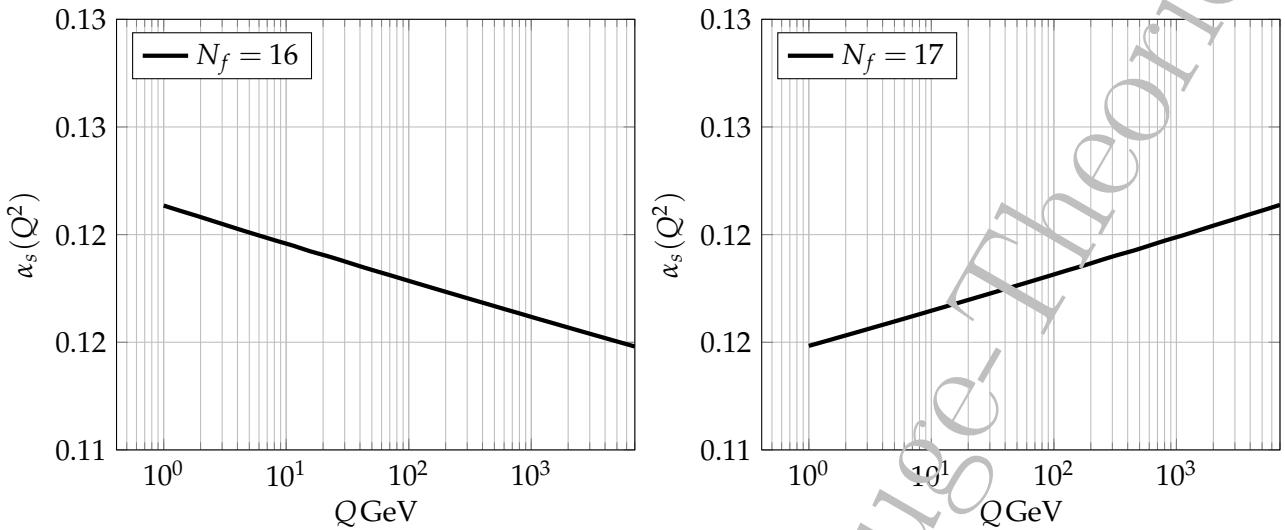
L'interaction dans les théories de jauge non-abélienne (comme la QCD) devient asymptotiquement faible à haute énergie et très forte à basse énergie. La constante de couplage mobile de l'interaction forte est donnée par,

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_s(M^2)} + \frac{33 - 2N_f}{12\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{M^2}\right) \quad (3.182)$$

or

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(M^2)}{1 + \alpha_s(M^2)[33 - 2N_f]\ln(\frac{Q^2}{M^2})/(12\pi)} \quad (3.183)$$





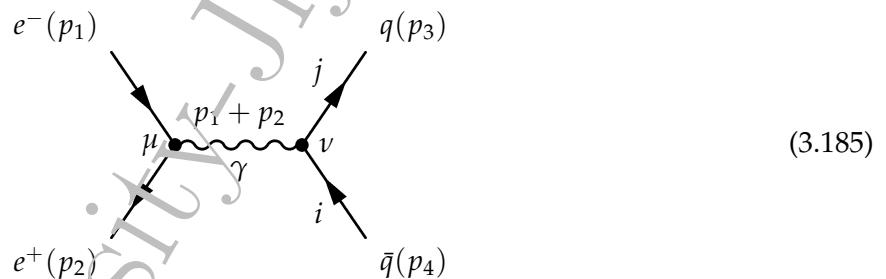
D'après ces 3 figures, la théorie n'est asymptotiquement libre que si le nombre de saveurs $N_f < 16$.

3.6.2 Processus : $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$

Considérons la réaction,

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow q(p_3) + \bar{q}(p_4) \quad (3.184)$$

Le diagramme de Feynman décrivant cette réaction est,



On rappelle que le vertex quark-quark-photon est donnée par,

$$-ieQ_q \gamma^\mu \delta_{ij} \quad (3.186)$$

où i, j désignent les couleurs des quarks et Q_q est la fraction de charge des quarks ($Q_q = 2/3$ pour les quarks up et $Q_q = -1/3$ pour les quarks down).

L'amplitude et son complexe conjugué sont donnés par,

$$M = \frac{ie^2 Q_q}{(p_1 + p_2)^2 + i\lambda} \delta_{ij} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}_i(p_3) \gamma_\mu v_j(p_4) \quad (3.187)$$

$$\bar{M} = \frac{ie^2 Q_q}{(p_1 + p_2)^2 + i\lambda} \delta_{i'j'} \bar{u}(p_1) \gamma^{\mu'} v(p_2) \bar{v}_{j'}(p_4) \gamma_{\mu'} u_{i'}(p_3) \quad (3.188)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins et les couleurs s'écrit,

$$\sum_{spin coul} |M|^2 = \frac{1}{4} \sum_{spin coul} \sum M \bar{M} \quad (3.189)$$

On néglige les masses des fermions, et on utilise les relations suivantes,

$$\sum_{\text{spin}} u(p) \bar{u}(p) = \sum_{\text{spin}} v(p) \bar{v}(p) = \not{p} \quad \sum_{\text{spin}} u_i(p) \bar{u}_j(p) = \sum_{\text{spin}} v_i(p) \bar{v}_j(p) = \delta_{ij} \not{p} \quad (3.190)$$

$$(3.191)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |M|^2 &= \frac{1}{4} \frac{e^4 Q_q^2}{[(p_1 + p_2)^2 + i\lambda]^2} \delta_{ij} \delta_{i'j'} \delta_{ii'} \delta_{jj'} \text{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\mu'}] \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_{\mu'}] \\ &= 8e^4 Q_q^2 N \frac{p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{(p_1 + p_2)^4} \end{aligned} \quad (3.192)$$

Le facteur de couleur,

$$\delta_{ij} \delta_{i'j'} \delta_{ii'} \delta_{jj'} = \delta_{ii} = N = 3 \quad (3.193)$$

On ré-exprime l'amplitude en fonction des variables de Mandelstam, on a

$$p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = -\frac{t}{2} \quad p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = -\frac{u}{2} \quad (3.194)$$

donc,

$$\overline{\sum} |M|^2 = 2e^4 Q_q^2 N \frac{t^2 + u^2}{s^2} \quad (3.195)$$

Dans le référentiel du centre de masse ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$), on a,

$$t = -\frac{s}{2}[1 - \cos(\theta)] \quad u = -\frac{s}{2}[1 + \cos(\theta)] \quad (3.196)$$

alors,

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |M|^2 &= e^4 Q_q^2 N (1 + \cos^2(\theta)) \\ &= \frac{1}{16} \pi^2 \alpha^2 Q_q^2 N (1 + \cos^2(\theta)) \end{aligned} \quad (3.197)$$

On calcule maintenant la section efficace,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{1}{4 \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^4 (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3} \frac{d^3 \vec{p}_4}{2E_4} \overline{\sum} |M|^2 \\ &= \frac{1}{2s} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3} \frac{d^3 \vec{p}_4}{2E_4} \overline{\sum} |M|^2 \end{aligned} \quad (3.198)$$

On a,

$$E_1 = E_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} \quad E_3 = E_4 = |\vec{p}_3| \quad (3.199)$$

alors,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{1}{2s} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(\sqrt{s} - 2|\vec{p}_3|) \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) \frac{d^3 \vec{p}_3}{2|\vec{p}_3|} \frac{d^3 \vec{p}_4}{2|\vec{p}_3|} \overline{\sum} |M|^2 \\ &= \frac{1}{8s} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(\sqrt{s} - 2|\vec{p}_3|) \frac{d^3 \vec{p}_3}{|\vec{p}_3|^2} \overline{\sum} |M|^2 \Big|_{\vec{p}_4 = \vec{p}_3} \end{aligned} \quad (3.200)$$

Dans les coordonnées sphériques, on a

$$\frac{d^3 \vec{p}_3}{|\vec{p}_3|^2} = d|\vec{p}_3| \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (3.201)$$

et

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \quad \text{donc} \quad \delta(\sqrt{s} - 2|\vec{p}_3|) = \frac{\delta(|\vec{p}_3| - \sqrt{s}/2)}{2} \quad (3.202)$$

La section efficace devient,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{1}{16s} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} d|\vec{p}_3| \delta(|\vec{p}_3| - \sqrt{s}/2) \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \overline{\sum_i |M_i|^2} \Big|_{\vec{p}_4 = \vec{p}_3} \\ &= \frac{\pi \alpha^2 Q_q^2 N}{2s} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta [1 + \cos^2(\theta)] \\ &= \frac{\pi \alpha^2 Q_q^2 N}{2s} \int_{-1}^{+1} dX (1 + X^2) \\ &= \frac{4\pi \alpha^2 Q_q^2 N}{3s} \end{aligned} \quad (3.203)$$

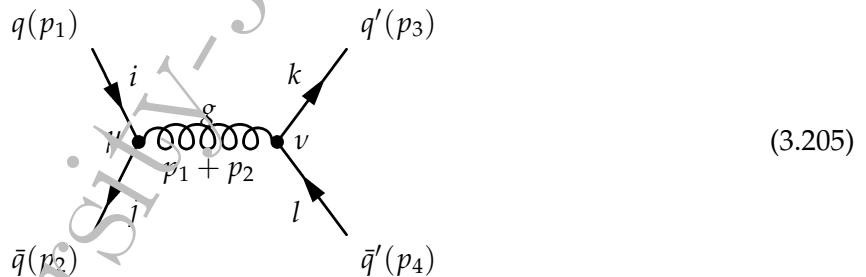
3.6.3 Processus : $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$

Considérons la réaction suivante,

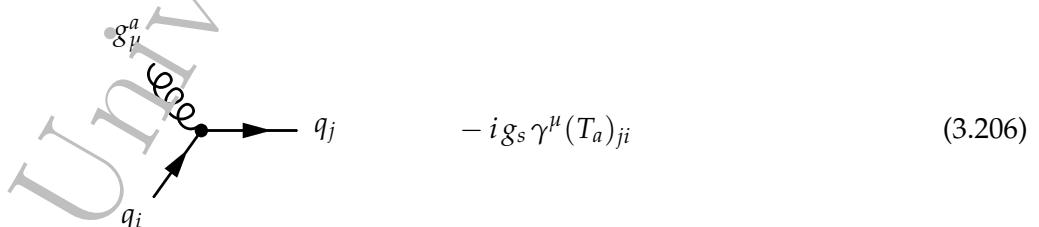
$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow q'(p_3) + \bar{q}'(p_4) \quad (3.204)$$

où q et q' sont deux quarks différents.

Le diagramme de Feynman décrivant cette réaction est,



On rappelle que le vertex quark-quark-gluon est donnée par,



L'amplitude et son complexe conjugué sont donnés par,

$$M = \frac{ig_s^2}{(p_1 + p_2)^2 + i\lambda} (T^a)_{ji} (T^a)_{kl} \bar{v}_j(p_2) \gamma^\mu u_i(p_1) \bar{u}_k(p_3) \gamma_\mu v_l(p_4) \quad (3.207)$$

$$\bar{M} = \frac{ig_s^2}{(p_1 + p_2)^2 + i\lambda} (T^{a'})_{i'j'} (T^{a'})_{l'k'} \bar{u}_{i'}(p_1) \gamma^{\mu'} v_{j'}(p_2) \bar{v}_{l'}(p_4) \gamma_{\mu'} u_{k'}(p_3) \quad (3.208)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins et les couleurs s'écrit,

$$\sum_{spin coul} |M|^2 = \frac{1}{4N^2} \sum_{spin coul} \sum M \bar{M} \quad (3.209)$$

On néglige les masses des fermions, et on utilise les relations suivantes,

$$\sum_{\text{spin}} u_i(p) \bar{u}_j(p) = \sum_{\text{spin}} v_i(p) \bar{v}_j(p) = \delta_{ij} \not{p} \quad (3.210)$$

$$(3.211)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |M|^2 &= \frac{1}{4N^2} \frac{g_s^4}{[(p_1 + p_2)^2 + i\lambda]^2} \delta_{ij} \delta_{i'j'} \delta_{ii'} \delta_{jj'} (T^a)_{ji} (T^a)_{kl} (T^{a'})_{j'i'} (T^{a'})_{k'l'} \\ &\times \text{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\mu'}] \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_{\mu'}] \\ &= 8 \frac{g_s^4}{N^2} \delta_{ij} \delta_{i'j'} \delta_{ii'} \delta_{jj'} (T^a)_{ji} (T^a)_{kl} (T^{a'})_{j'i'} (T^{a'})_{k'l'} \frac{p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3}{(p_1 + p_2)^4} \end{aligned} \quad (3.212)$$

Le facteur de couleur,

$$\begin{aligned} \delta_{ij} \delta_{i'j'} \delta_{ii'} \delta_{jj'} (T^a)_{ji} (T^a)_{kl} (T^{a'})_{j'i'} (T^{a'})_{k'l'} &= (T^a)_{ji} (T^{a'})_{ij} (T^a)_{ji} (T^{a'})_{ij} \\ &= \text{Tr}[T^a T^{a'}] \text{Tr}[T^a T^{a'}] \\ &= \frac{\delta_{aa'} \delta_{aa'}}{4} \\ &= \frac{\delta_{aa}}{4} \\ &= \frac{N^2 - 1}{4} \end{aligned} \quad (3.213)$$

On ré-exprime l'amplitude en fonction des variables de Mandelstam, on a

$$p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = -\frac{t}{2} \quad p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = -\frac{u}{2} \quad (3.214)$$

donc,

$$\overline{\sum} |M|^2 = g_s^4 \frac{N^2 - 1}{2N^2} \frac{t^2 + u^2}{s^2} \quad (3.215)$$

Dans le référentiel du centre de masse ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$), on a,

$$t = -\frac{s}{2} [1 - \cos(\theta)] \quad u = -\frac{s}{2} [1 + \cos(\theta)] \quad (3.216)$$

et on remplace par la constante de couplage de la QCD,

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \quad (3.217)$$

alors,

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |M|^2 &= 4\pi^2 \alpha_s^2 \frac{N^2 - 1}{N^2} (1 + \cos^2(\theta)) \\ &= 8\pi^2 \alpha_s^2 \frac{C_F}{N} (1 + \cos^2(\theta)) \end{aligned} \quad (3.218)$$

avec

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (3.219)$$

On calcule maintenant la section efficace,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3} \frac{d^3 \vec{p}_4}{2E_4} \overline{\sum} |M|^2 \\ &= \frac{1}{2s} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3} \frac{d^3 \vec{p}_4}{2E_4} \overline{\sum} |M|^2 \end{aligned} \quad (3.220)$$

On a,

$$E_1 = E_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} \quad E_3 = E_4 = |\vec{p}_3| \quad (3.221)$$

alors,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{1}{2s} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(\sqrt{s} - 2|\vec{p}_3|) \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) \frac{d^3\vec{p}_3}{2|\vec{p}_3|} \frac{d^3\vec{p}_4}{2|\vec{p}_3|} \sum |M|^2 \\ &= \frac{1}{8s} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(\sqrt{s} - 2|\vec{p}_3|) \frac{d^3\vec{p}_3}{|\vec{p}_3|^2} \sum |M|^2 \Big|_{\vec{p}_4 = \vec{p}_3} \end{aligned} \quad (3.222)$$

Dans les coordonnées sphériques, on a

$$\frac{d^3\vec{p}_3}{|\vec{p}_3|^2} = d|\vec{p}_3| \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad (3.223)$$

et

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \quad \text{donc} \quad \delta(\sqrt{s} - 2|\vec{p}_3|) = \frac{\delta(|\vec{p}_3| - \sqrt{s}/2)}{2} \quad (3.224)$$

La section efficace devient,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{1}{16s} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} d|\vec{p}_3| \delta(|\vec{p}_3| - \sqrt{s}/2) \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sum |M|^2 \Big|_{\vec{p}_4 = \vec{p}_3} \\ &= \frac{\pi\alpha_s^2 C_F}{4s} \frac{C_F}{N} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta [1 + \cos^2(\theta)] \\ &= \frac{\pi\alpha_s^2 C_F}{4s} \frac{C_F}{N} \int_{-1}^{+1} dX (1 + X^2) \\ &= \frac{2\pi\alpha_s^2 C_F}{3s} \frac{C_F}{N} \\ &= \frac{8}{27} \frac{\pi\alpha_s^2}{s} \end{aligned} \quad (3.225)$$

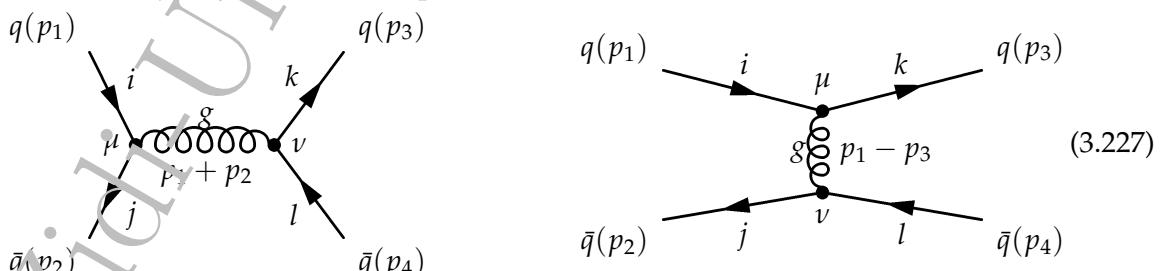
3.6.4 Processus : $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$

On considère la réaction suivante,

$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow q(p_3) + \bar{q}(p_4) \quad (3.226)$$

où les quarks de l'état initial et final sont identiques.

Les diagrammes de Feynman décrivant ce processus est,



Les amplitudes associées à ces deux diagramme sont, respectivement, données par, L'amplitude et son complexe conjugué sont donnés par,

$$M_1 = \frac{ig_s^2}{(p_1 + p_2)^2 + i\lambda} (T^a)_{ji} (T^a)_{kl} \bar{v}_j(p_2) \gamma^\mu u_i(p_1) \bar{u}_k(p_3) \gamma_\mu v_l(p_4) \quad (3.228)$$

$$M_2 = \frac{ig_s^2}{(p_1 - p_3)^2 + i\lambda} (T^a)_{ki} (T^a)_{jl} \bar{u}_k(p_3) \gamma^\mu u_i(p_1) \bar{v}_j(p_2) \gamma_\mu v_l(p_4) \quad (3.229)$$

Les complexes conjugués de ces amplitudes sont les suivants,

$$\overline{M}_1 = \frac{-ig_s^2}{(p_1 + p_2)^2 + i\lambda} (T^{a'})_{i'j'} (T^{a'})_{l'k'} \bar{u}_{i'}(p_1) \gamma^{\mu'} v_{j'}(p_2) \bar{v}_{l'}(p_4) \gamma_{\mu'} u_{k'}(p_3) \quad (3.230)$$

$$\overline{M}_2 = \frac{-ig_s^2}{(p_1 - p_3)^2 + i\lambda} (T^{a'})_{i'k'} (T^{a'})_{l'j'} \bar{u}_{i'}(p_1) \gamma^{\mu'} u_{k'}(p_3) \bar{v}_{l'}(p_4) \gamma_{\mu'} v_{j'}(p_2) \quad (3.231)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins et les couleurs s'écrit,

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |M|^2 &= \overline{\sum} |M_1 - M_2|^2 = \frac{1}{4N^2} \sum_{spin coul} (M_1 - M_2)(\overline{M}_1 - \overline{M}_2) \\ &= \frac{1}{4N^2} \sum_{spin coul} [M_1 \overline{M}_1 + M_2 \overline{M}_2 - 2\text{Re}(M_1 \overline{M}_2)] \end{aligned} \quad (3.232)$$

L'amplitude M_1 est égale à M de la section précédentes, alors,

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |M_1|^2 &= \frac{1}{4N^2} \frac{g_s^4}{[(p_1 + p_2)^2 + i\lambda]^2} \text{Tr}[T^a T^{a'}] \text{Tr}[T^a T^{a'}] \text{Tr}[\cancel{p}_2 \gamma^{\mu} \cancel{p}_1 \gamma^{\mu'}] \text{Tr}[\cancel{p}_3 \gamma_{\mu} \cancel{p}_4 \gamma_{\mu'}] \\ &= \frac{8g_s^2}{N^2} \text{Tr}[T^a T^{a'}] \text{Tr}[T^a T^{a'}] \frac{(p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3)}{(p_1 + p_2)^4} \\ &= \frac{g_s^4 C_F}{N} \frac{t^2 + u^2}{s^2} \end{aligned} \quad (3.233)$$

Dans le référentiel CM, il s'écrit,

$$\overline{\sum} |M_1|^2 = \frac{8\pi^2 \alpha_s^2 C_F}{N} (1 + \cos(\theta)) \quad (3.234)$$

Le carré de l'amplitude M_2 sommé et moyenné sur les spins et couleurs est,

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |M_2|^2 &= \frac{g_s^4}{4N^2} \text{Tr}[T^a T^{a'}] \text{Tr}[T^a T^{a'}] \frac{\text{Tr}[\cancel{p}_3 \gamma^{\mu} \cancel{p}_2 \gamma^{\mu'}] \text{Tr}[\cancel{p}_2 \gamma_{\mu} \cancel{p}_4 \gamma_{\mu'}]}{(p_1 - p_3)^2} \\ &= \frac{8g_s^4}{N^2} \text{Tr}[T^a T^{a'}] \text{Tr}[T^a T^{a'}] \frac{(p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4 + p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3)}{(p_1 - p_3)^2} \\ &= \frac{g_s^4 C_F}{N} \frac{s^2 + u^2}{t^2} \end{aligned} \quad (3.235)$$

Dans le référentiel CM, il s'écrit,

$$\overline{\sum} |M_2|^2 = \frac{16\pi^2 \alpha_s^2 C_F}{N} \frac{[4 + (1 + \cos(\theta))^2]}{(1 - \cos(\theta))^2} \quad (3.236)$$

On calcule, maintenant, le terme d'interférence,

$$\begin{aligned} 2\text{Re} \overline{\sum} M_1 \overline{M}_2 &= \frac{g_s^4}{2N^2 (p_1 + p_2)^2 (p_1 - p_3)^2} \sum_{spin coul} (T^a)_{ji} (T^a)_{kl} (T^{a'})_{i'k'} (T^{a'})_{l'j'} \\ &\quad \times \bar{v}_j(p_2) \gamma^{\mu} \underbrace{\bar{u}_i(p_1) \cancel{u}_{i'}(p_1)}_{=\cancel{p}_1} \gamma^{\mu'} \underbrace{\bar{u}_k(p_3) \cancel{u}_k(p_3)}_{=\cancel{p}_3} \gamma_{\mu} \underbrace{\bar{v}_l(p_4) \cancel{v}_{l'}(p_4)}_{=\cancel{p}_4} \gamma_{\mu'} v_{j'}(p_2) \\ &= \frac{g_s^4}{2N^2 (p_1 + p_2)^2 (p_1 - p_3)^2} \sum_{coul} (T^a T^{a'} T^a T^{a'})_{jj} \text{Tr}[\cancel{p}_2 \gamma^{\mu} \cancel{p}_1 \gamma^{\mu'} \cancel{p}_3 \gamma_{\mu} \cancel{p}_4 \gamma_{\mu'}] \\ &= \frac{g_s^4}{2N^2 (p_1 + p_2)^2 (p_1 - p_3)^2} \text{Tr}[T^a T^{a'} T^a T^{a'}] \text{Tr}[\cancel{p}_2 \gamma^{\mu} \cancel{p}_1 \gamma^{\mu'} \cancel{p}_3 \gamma_{\mu} \cancel{p}_4 \gamma_{\mu'}] \end{aligned} \quad (3.237)$$

on a,

$$\begin{aligned} \text{Tr}[T_a T^{a'} T_a T^{a'}] \text{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\mu'} \not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_{\mu'}] &= -32 p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 \\ &= -8u^2 \end{aligned} \quad (3.238)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Tr}[T^a T^{a'} T^a T^{a'}] &= -\frac{\delta_{a'a'}}{4N} \\ &= -\frac{N^2 - 1}{4N} \\ &= -\frac{C_F}{2} \end{aligned} \quad (3.239)$$

Donc,

$$\begin{aligned} 2\text{Re} \sum M_1 \overline{M_2} &= 2g_s^4 \frac{C_F}{N^2} \frac{u^2}{st} \\ &= -g_s^4 \frac{C_F}{N^2} \frac{(1 + \cos(\theta))^2}{(1 - \cos(\theta))} \end{aligned} \quad (3.240)$$

Alors, le carré de l'amplitude totale en fonction des variable de MandelStam est,

$$\sum |M|^2 = 16\pi^2 \alpha_s^2 \frac{C_F}{N} \left[\frac{t^2 + u^2}{s^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} - \frac{2}{N} \frac{u^2}{st} \right] \quad (3.241)$$

On ré-exprime le carré de l'amplitude totale en fonction de θ et pose $N = 3$, on obtient,

$$\sum |M|^2 = \frac{64}{9} \pi^2 \alpha_s^2 \left[\frac{1 + \cos^2(\theta)}{2} + \frac{4 + (1 + \cos(\theta))^2}{(1 - \cos(\theta))^2} + \frac{1}{3} \frac{(1 + \cos(\theta))^2}{(1 - \cos(\theta))} \right] \quad (3.242)$$

La section efficace partonique différentielle est,

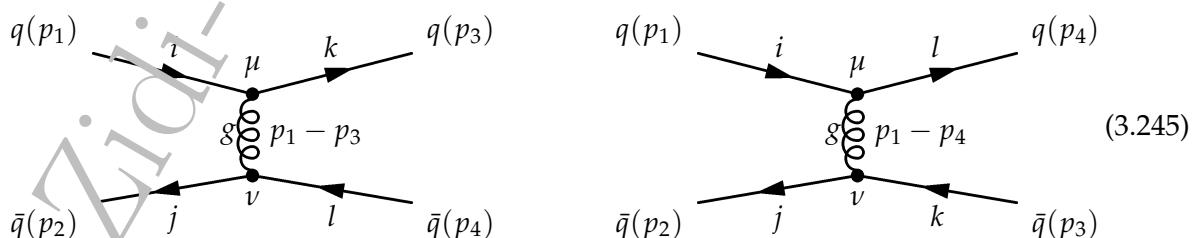
$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}}{d\cos(\theta)} &= \frac{1}{32\pi s} \sum |M|^2 \\ &= \frac{2\pi\alpha_s^2}{9s} a \left[\frac{1 + \cos^2(\theta)}{2} + \frac{4 + (1 + \cos(\theta))^2}{(1 - \cos(\theta))^2} + \frac{1}{3} \frac{(1 + \cos(\theta))^2}{(1 - \cos(\theta))} \right] \end{aligned} \quad (3.243)$$

3.6.5 Processus : $qq \rightarrow qq$

On considère le processus de la production de deux quarks identiques,

$$q(p_1) + q(p_2) \rightarrow q(p_3) + q(p_4) \quad (3.244)$$

Les diagrammes de Feynman décrivant cette réaction sont les suivants,



On peut déduire le carré de l'amplitude du cas précédent en échangeant $p_2 \leftrightarrow -p_4$, donc $s \leftrightarrow u$. Alors on obtient

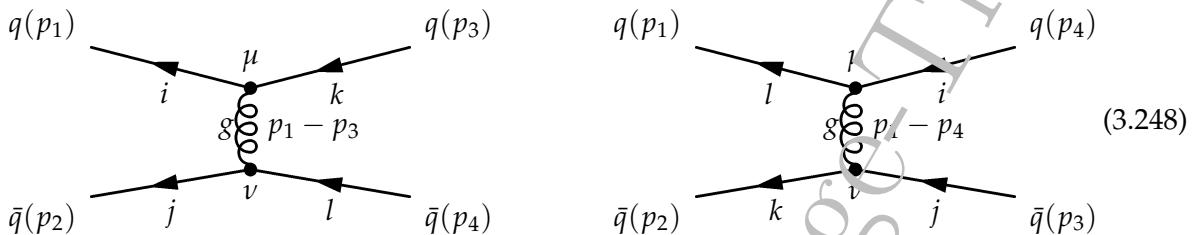
$$\sum |M|^2 = 16\pi^2 \alpha_s^2 \frac{C_F}{N} \left[\frac{t^2 + s^2}{u^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} - \frac{2}{N} \frac{s^2}{tu} \right] \quad (3.246)$$

3.6.6 Processus : $\bar{q}\bar{q} \rightarrow \bar{q}\bar{q}$

On considère le processus de la production de deux quarks identiques,

$$\bar{q}(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow \bar{q}(p_3) + \bar{q}(p_4) \quad (3.247)$$

Les diagrammes de Feynman décrivant cette réaction sont les suivants,



On obtient le même résultats du cas précédent,

$$\sum |M|^2 = 16\pi^2 \alpha_s^2 \frac{C_F}{N} \left[\frac{t^2 + s^2}{u^2} + \frac{s^2 + u^2}{t^2} - \frac{2s^2}{N tu} \right] \quad (3.249)$$

3.6.7 Processus : $qg \rightarrow qg$

Considérons la réaction suivante,

$$q(p_1) + g(p_2) \rightarrow q(p_3) + g(p_4) \quad (3.250)$$

Les diagrammes de Feynman décrivant cette réaction sont représentés dans la figure (3.6).

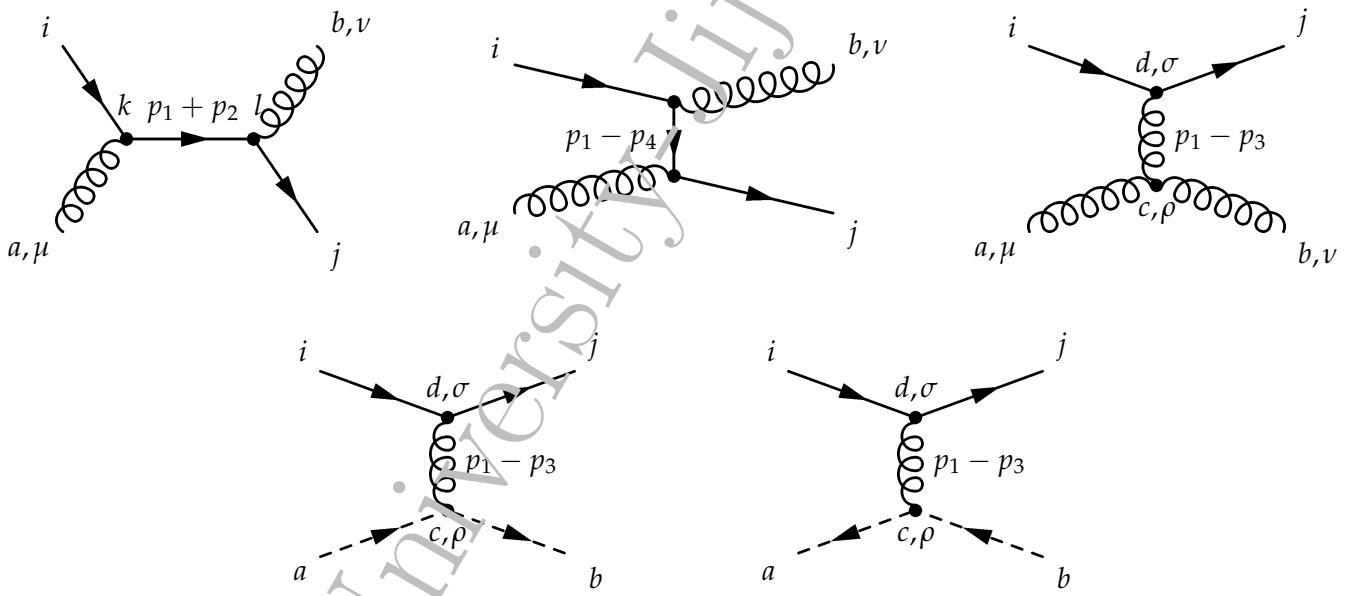


FIGURE 3.6 – Diagrammes de Feynman décrivant la réaction $qg \rightarrow qg$ dans les jauge covariantes et non-covariantes. Les deux derniers diagrammes (fantômes) sont nécessaires que dans la jauge covariante.

Les amplitudes associées à ces diagrammes sont données par :

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{-i g_s^2}{[q_1^2 + i\lambda]} (T^a)_{ki} (T^b)_{jl} \delta_{kl} \bar{u}_j(p_3) \gamma^\nu q_1 \gamma^\mu u_i(p_1) \epsilon_\mu^a(p_2) \epsilon_\nu^{*b}(p_4) \\ &= \frac{-i \delta_{ij}^2}{[q_1^2 + i\lambda]} (\Gamma^b T^a)_{ji} \bar{u}_j(p_3) \gamma^\nu q_1 \gamma^\mu u_i(p_1) \epsilon_\mu^a(p_2) \epsilon_\nu^{*b}(p_4) \end{aligned} \quad (3.251)$$

$$M_2 = \frac{-i g_s^2}{[q_2^2 + i\lambda]} (T^a T^b)_{ji} \bar{u}_j(p_3) \gamma^\mu q_2 \gamma^\nu u_i(p_1) \epsilon_\mu^a(p_2) \epsilon_\nu^{*b}(p_4) \quad (3.252)$$

$$M_3 = \frac{-g_s^2}{[q_3^2 + i\lambda]} (T^d)_{ji} f_{dab} \bar{u}_j(p_3) \gamma^\sigma u_i(p_1) [g_{\sigma\rho} - G_{\mu\nu}(q_3, n_3)] V^{\rho\mu\nu}(q_3, p_2, -p_4) \epsilon_\mu^a(p_2) \epsilon_\nu^{*b}(p_4) \quad (3.253)$$

avec

$$q_1 = p_1 + p_2, \quad q_2 = p_1 - p_4, \quad q_3 = p_1 - p_3. \quad (3.254)$$

et

$$V^{\rho\mu\nu}(q_3, p_2, -p_4) = g^{\rho\mu}(q_3 - p_2)^\nu + g^{\mu\nu}(p_2 + p_4)^\rho - g^{\nu\rho}(p_4 + q_3)^\mu \quad (3.255)$$

On rappelle que la somme sur les polarisations du gluon dépend du la jauge, on a :

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{\mu}^a(k) \varepsilon_{\nu}^b(k) = -\delta_{ab} [g_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}(k, n)] \quad (3.256)$$

avec

$$G_{\mu\nu}(k, n) = \begin{cases} 0 & \text{jauge de Feynman (covariante)} \\ \frac{k_{\mu}n_{\nu} + k_{\nu}n_{\mu}}{k \cdot n} & \text{jauge axiale (non-covariante)} \end{cases} \quad (3.257)$$

Si on emploie la jauge covariante (jauge de Feynman par exemple), on doit prendre en compte la contribution des diagrammes des ghosts (M_4 et M_5 , voir Figure. 3.6). Les amplitudes associées à ces deux derniers sont les suivantes :

$$M_4 = \frac{-g_s^2}{[q_3^2 + i\lambda]} (T^d)_{ji} f_{dab} \bar{u}_j(p_3) \gamma^{\sigma} u_i(p_1) P_{\sigma\rho}(q_3, n_3) p_4^{\rho} 1_a 1_b \quad (3.258)$$

$$M_5 = \frac{-g_s^2}{[q_3^2 + i\lambda]} (T^d)_{ji} f_{dab} \bar{u}_j(p_3) \gamma^{\sigma} u_i(p_1) P_{\sigma\rho}(q_3, n_3) p_4^{\rho} 1_a^* 1_b^* \quad (3.259)$$

On a noté le ghost (anti-ghost) par 1_a (1_a^*) car le charnp les ghosts sont traités comme des champs scalaires porteurs d'une charge de couleur comme le gluon. On a donc,

$$\sum_{b \in \mathcal{L}} 1_a 1_b^* = \delta_{ab}. \quad (3.260)$$

Les complexes conjugués de ces amplitudes sont donnés par :

$$\overline{M}_1 = \frac{i g_s^2}{[q_1^2 + i\lambda]} (T^{d'} T^{b'})_{i'j'} \bar{u}_{i'}(p_1) \gamma^{l'} q_1 \gamma^{\nu'} u_{j'}(p_3) \varepsilon_{\mu'}^{*a'}(p_2) \varepsilon_{\nu'}^{b'}(p_4) \quad (3.261)$$

$$\overline{M}_2 = \frac{i g_s^2}{[q_2^2 + i\lambda]} (T^{b'} T^{d'})_{i'j'} \bar{u}_{i'}(p_1) \gamma^{\nu'} q_2 \gamma^{\mu'} u_{j'}(p_3) \varepsilon_{\mu'}^{*a'}(p_2) \varepsilon_{\nu'}^{b'}(p_4) \quad (3.262)$$

$$\overline{M}_3 = \frac{g_s^2}{[q_3^2 + i\lambda]} (T^{d'})_{i'j'} f_{d'a'b'} \bar{u}_{i'}(p_1) \gamma^{\sigma'} u_{j'}(p_3) P_{\sigma'\rho'}(q_3, n_3) V^{\rho'\mu'\nu'}(q_3, p_2, -p_4) \varepsilon_{\mu'}^{*a'}(p_2) \varepsilon_{\nu'}^{b'}(p_4) \quad (3.263)$$

$$\overline{M}_4 = \frac{-g_s^2}{[q_3^2 + i\lambda]} (T^{d'})_{i'j'} f_{d'a'b'} \bar{u}_{i'}(p_1) \gamma^{\sigma'} u_{j'}(p_3) P_{\sigma'\rho'}(q_3) p_4^{\rho'} 1_a^* 1_b^* \quad (3.264)$$

$$\overline{M}_5 = \frac{-g_s^2}{[q_3^2 + i\lambda]} (T^{d'})_{i'j'} f_{d'a'b'} \bar{u}_{i'}(p_1) \gamma^{\sigma'} u_{j'}(p_3) P_{\sigma'\rho'}(q_3) p_4^{\rho'} 1_{a'} 1_{b'} \quad (3.265)$$

Dans la jauge non-covariante (axiale ou plus précisément cône de lumière), l'amplitude totale est donné par la somme des 3 amplitudes M_1 , M_2 et M_3 . Le carré de l'amplitude totale sommée et moyennée sur les spins, les polarisations et les couleurs est donné par :

$$\sum |M|^2 \equiv \sum |M_1 + M_2 + M_3|^2 = \frac{1}{4N_c(N_c^2 - 1)} \sum_s \sum_{\lambda} (M_1 \overline{M}_1 + M_2 \overline{M}_2 + M_3 \overline{M}_3 + 2\text{Re}[M_1 \overline{M}_2] + 2\text{Re}[M_1 \overline{M}_3] + 2\text{Re}[M_2 \overline{M}_3]) \quad (3.266)$$

Par contre, dans la jauge covariante on doit soustraire le carré de chaque amplitude associée aux ghosts. Le carré de l'amplitude totale s'écrit donc :

$$\sum |M| \equiv \sum |M_1 + M_2 + M_3|^2 - \sum |M_4|^2 - \sum |M_5|^2 \quad (3.267)$$

Les carrés des différentes amplitudes sont donnés par,

$$\begin{aligned} \sum |M_1|^2 &= \frac{g_s^4}{s^2} \text{Tr}[T^b T^a T^a T^b] \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{q}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\mu'} \not{q}_1 \gamma^{\nu'}] [g_{\mu\mu'} - G_{\mu\mu'}(p_2, n_2)] [g_{\nu\nu'} - G_{\nu\nu'}(p_4, n_4)] \\ \sum |M_2|^2 &= \frac{g_s^4}{u^2} \text{Tr}[T^a T^b T^b T^a] \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^{\nu'} \not{q}_2 \gamma^{\mu'}] [g_{\mu\mu'} - G_{\mu\mu'}(p_2, n_2)] [g_{\nu\nu'} - G_{\nu\nu'}(p_4, n_4)] \\ \sum |M_3|^2 &= \frac{g_s^4}{t^2} \text{Tr}[T^d T^{d'}] f_{dab} f_{d'ab} \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\sigma \not{p}_1 \gamma^{\sigma'}] V^{\rho\mu\nu}(q_3, p_2, -p_4) V^{\rho'\mu'\nu'}(q_3, p_2, -p_4) \\ &\quad \times [g_{\sigma\rho} - G_{\sigma\rho}(q_3, n_3)] [g_{\sigma'\rho'} - G_{\sigma'\rho'}(q_3, n_3)] [g_{\mu\mu'} - G_{\mu\mu'}(p_2, n_2)] [g_{\nu\nu'} - G_{\nu\nu'}(p_4, n_4)] \end{aligned} \quad (3.268)$$

Les termes d'interférence des différentes amplitudes sont donnés par,

$$\begin{aligned} 2 \sum \text{Re}[M_1 \bar{M}_2] &= \frac{2g_s^4}{su} \text{Tr}[T^b T^a T^b T^a] \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{q}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\nu'} \not{q}_2 \gamma^{\mu'}] [g_{\mu\mu'} - G_{\mu\mu'}(p_2, n_2)] [g_{\nu\nu'} - G_{\nu\nu'}(p_4, n_4)] \\ 2 \sum \text{Re}[M_1 \bar{M}_3] &= (-i) \frac{2g_s^4}{st} \text{Tr}[T^b T^a T^{d'}] f_{d'ab} \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\nu \not{q}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\sigma'}] V^{\rho'\mu'\nu'}(q_3, p_2, -p_4) [g_{\sigma'\rho'} - G_{\sigma'\rho'}(q_3, n_3)] \\ &\quad \times [g_{\mu\mu'} - G_{\mu\mu'}(p_2, n_2)] [g_{\nu\nu'} - G_{\nu\nu'}(p_4, n_4)] \\ 2 \sum \text{Re}[M_2 \bar{M}_3] &= (-i) \frac{2g_s^4}{tu} \text{Tr}[T^a T^b T^{d'}] f_{d'ab} \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\mu \not{q}_2 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^{\sigma'}] V^{\rho'\mu'\nu'}(q_3, p_2, -p_4) [g_{\sigma'\rho'} - G_{\sigma'\rho'}(q_3, n_3)] \\ &\quad \times [g_{\mu\mu'} - G_{\mu\mu'}(p_2, n_2)] [g_{\nu\nu'} - G_{\nu\nu'}(p_4, n_4)] \end{aligned} \quad (3.269)$$

Les carrés des amplitudes de fantômes M_4 et M_5 sont donnés par,

$$\begin{aligned} \sum |M_4|^2 &= \frac{g_s^4}{t^2} \text{Tr}[T^d T^{d'}] f_{dab} f_{d'ab} \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma^\sigma \not{p}_1 \gamma^{\sigma'}] g_{\sigma\rho} g_{\sigma'\rho'} p_4^\rho p_4^{\rho'} \\ &= \frac{g_s^4}{t^2} \text{Tr}[T^d T^{d'}] f_{dab} f_{d'ab} \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_4 \not{p}_1 \not{p}_4] \\ \sum |M_5|^2 &= \frac{g_s^4}{t^2} \text{Tr}[T^d T^{d'}] f_{dab} f_{d'ab} \text{Tr}[\not{p}_3 \not{p}_4 \not{p}_1 \not{p}_4] \end{aligned} \quad (3.270)$$

Pour calculer les facteurs de couleur, on utilise les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (T^a T^a)_{ij} &= C_F \delta_{ij} \equiv \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \delta_{ij}, & f_{abc} f_{abd} &= C_A \delta_{cd} \equiv N_c \delta_{cd}, \\ \text{Tr}[T^a T^b T^c] &= \frac{1}{4} (d_{abc} + i f_{abc}), & \text{Tr}[T^a T^b T^a T^d] &= -\frac{1}{4N_c} \delta_{bd}. \end{aligned} \quad (3.271)$$

Donc, les facteurs de couleur pour chaque terme sont donnés par :

$$C_{|M_1|^2} = \text{Tr}[T^b T^a T^a T^b] = \text{Tr}[T^b T^b T^a T^a] = (T^b T^b)_{ij} (T^a T^a)_{ji} = C_F^2 \delta_{ij} \delta_{ji} = N_c C_F^2 = \frac{(N_c - 1)^2}{4 N_c}, \quad (3.272)$$

$$C_{|M_2|^2} = \frac{(N_c - 1)^2}{4 N_c}, \quad (3.273)$$

$$C_{|M_3|^2} = \text{Tr}[T^d T^{d'}] f_{dab} f_{d'ab} = \text{Tr}[T^d T^{d'}] N_c \delta_{dd'} = N_c \text{Tr}[T^d T^d] = N_c^2 C_F = \frac{N_c (N_c^2 - 1)}{2}, \quad (3.274)$$

$$C_{M_1 \bar{M}_2} = \text{Tr}[T^b T^a T^b T^a] = -\frac{1}{4 N_c} \delta_{aa} = -\frac{N_c^2 - 1}{4 N_c}, \quad (3.275)$$

$$C_{M_2 \bar{M}_3} = \text{Tr}[T^a T^b T^{d'}] f_{d'ab} = \frac{1}{4} (d_{abd'} + i f_{abd'}) f_{d'ab} = \overbrace{\frac{1}{4} d_{abd'} f_{d'ab}}^{\equiv 0} + \frac{i}{4} f_{abd'} f_{d'ab} = \frac{i}{4} N_c (N_c^2 - 1), \quad (3.276)$$

$$C_{M_1 \bar{M}_3} = \text{Tr}[T^b T^a T^{d'}] f_{d'ab} = -\frac{i}{4} N_c (N_c^2 - 1). \quad (3.277)$$

$$C_{|M_4|^2} = \frac{N_c (N_c^2 - 1)}{2}, \quad (3.278)$$

$$C_{|M_5|^2} = \frac{N_c (N_c^2 - 1)}{2}. \quad (3.279)$$

Dans la jauge du cône de lumière, on trouve

$$\sum |M_1|^2 = -g_s^4 \frac{(N_c - 1)^2}{4 N_c} \times \frac{8(s^2 + t^2)}{s u} \quad (3.280)$$

$$\sum |M_2|^2 = -g_s^4 \frac{(N_c - 1)^2}{4 N_c} \times \frac{8(t^2 + u^2)}{s u} \quad (3.281)$$

$$\sum |M_3|^2 = -g_s^4 \frac{N_c (N_c^2 - 1)}{2} \times \frac{16(s^2 + s u + u^2)^2}{s u t^2} \quad (3.282)$$

$$2 \sum \text{Re}[M_1 \bar{M}_2] = -g_s^4 \frac{N_c^2 - 1}{4 N_c} \times \frac{16t^2}{s u} \quad (3.283)$$

$$2 \sum \text{Re}[M_1 \bar{M}_3] = -g_s^4 \frac{1}{4} N_c (N_c^2 - 1) \times \frac{16(2s + u)(s^2 + s u + u^2)}{s t u} \quad (3.284)$$

$$2 \sum \text{Re}[M_2 \bar{M}_3] = -g_s^4 \frac{1}{4} N_c (N_c^2 - 1) \times \frac{16(s + 2u)(s^2 + s u + u^2)}{s t u} \quad (3.285)$$

où on a choisi $n_2 = n_3 = n_4 = p_1$.

Le carré de l'amplitude totale est,

$$\begin{aligned} \sum |M_1 + M_2 + M_3|^2 &= -\frac{g_s^4}{4 N_c (N_c^2 - 1)} \frac{2(N_c^2 - 1)(s^2 + u^2)}{N_c s u t^2} [(N_c^2 - 1)s^2 - 2s u + (N_c^2 - 1)u^2] \\ &= -\frac{g_s^4}{2 N_c^2} \frac{s^2 + u^2}{s u t^2} [(N_c^2 - 1)s^2 - 2s u + (N_c^2 - 1)u^2] \\ &= -\frac{g_s^4}{2 N_c^2} \frac{s^2 + u^2}{s u t^2} [(N_c^2 - 1)s^2 + 2(N_c^2 - 1)s u + (N_c^2 - 1)u^2 - 2N_c^2 s u] \\ &= -\frac{g_s^4}{2 N_c^2} \frac{s^2 + u^2}{s u t^2} [(N_c^2 - 1)(s + t)^2 - 2N_c^2 s u] \\ &= -\frac{g_s^4}{2 N_c^2} \frac{s^2 + u^2}{s u t^2} [(N_c^2 - 1)t^2 - 2N_c^2 s u] \end{aligned} \quad (3.286)$$

Alors,

$$\sum |M_1 + M_2 + M_3|^2 = g_s^4 \left[\frac{s^2 + t^2}{t^2} - \frac{N_c^2 - 1}{2 N_c^2} \frac{s^2 + u^2}{s u} \right] \quad (3.287)$$

$$= g_s^4 \left[\frac{s^2 + t^2}{t^2} - \frac{4}{9} \frac{s^2 + u^2}{s u} \right] \quad (3.288)$$

Dans la jauge de Feynman, on

$$\sum |M_1|^2 = -g_s^4 \frac{(N_c - 1)^2}{4N_c} \times \frac{8u}{s} \quad (3.289)$$

$$\sum |M_2|^2 = -g_s^4 \frac{(N_c - 1)^2}{4N_c} \times \frac{8s}{u} \quad (3.290)$$

$$\sum |M_3|^2 = g_s^4 \frac{N_c(N_c^2 - 1)}{2} \times \frac{4(4s^2 + 3su + 4u^2)}{t^2} \quad (3.291)$$

$$2 \sum \text{Re}[M_1 \bar{M}_2] = 0 \quad (3.292)$$

$$2 \sum \text{Re}[M_1 \bar{M}_3] = g_s^4 \frac{1}{4} N_c(N_c^2 - 1) \times \frac{16s}{t} \quad (3.293)$$

$$2 \sum \text{Re}[M_2 \bar{M}_3] = g_s^4 \frac{1}{4} N_c(N_c^2 - 1) \times \frac{16u}{t} \quad (3.294)$$

$$\sum |M_4|^2 = -g_s^4 \frac{N_c(N_c^2 - 1)}{2} \times \frac{2su}{t^2} \quad (3.295)$$

$$\sum |M_5|^2 = -g_s^4 \frac{N_c(N_c^2 - 1)}{2} \times \frac{2su}{t^2} \quad (3.296)$$

On trouve le même résultat (3.288) pour le carré de l'amplitude totale,

$$\sum |M_1 + M_2 + M_3|^2 - \sum |M_4|^2 - \sum |M_5|^2 = g_s^4 \left[\frac{s^2 + t^2}{s^2} - \frac{N_c^2 - 1}{2N_c^2} \frac{s^2 + u^2}{su} \right] \quad (3.297)$$

3.7 Exercices et Problèmes

3.7.1 Questions de cours

(1) Quels sont les termes invariants sous la transformation de jauge non-abélienne locale :

$$\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a. \quad (3.298)$$

$$\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3.299)$$

$$(\partial^\mu A_\mu^a)^2. \quad (3.300)$$

(2) Montrer la relation suivante :

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig T_a F_{\mu\nu}^a, \quad \text{avec} \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (3.301)$$

(3) Comparer la QED et la QCD.

(4) **Algèbre de Grassmann.** Montrer que :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial_i \partial_j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial_j \partial_i}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial_j^2} = 0. \quad (3.302)$$

$$\int d\psi_i = 0, \quad \int d\psi_i \psi_j = \delta_{ij}. \quad (3.303)$$

$$\{d\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad \{d\psi_i, d\psi_j\} = 0. \quad (3.304)$$

(5) **Intégrale fonctionnelle de Feynman :**

(a) Montrer que

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \cdots \hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle = \frac{\int [d\phi] \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]}{\int [d\phi] \exp[i \int d^4x \mathcal{L}]} \quad (3.305)$$

où ϕ est un champ scalaire neutre et la densité lagrangienne \mathcal{L} est donnée par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) - V(\phi). \quad (3.306)$$

(b) Montrer que :

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{(-i)^n}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad \text{où} \quad Z[J] = \int [d\phi] \exp[i \int d^4x (\mathcal{L} + \phi J)]. \quad (3.307)$$

(c) Montrer que :

$$\frac{Z[J]}{Z[0]} = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n G_n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n). \quad (3.308)$$

(d) Montrer que la fonctionnelle génératrice pour le champ A_μ^a n'est pas invariant sous la transformation de jauge locale :

$$Z[J] = \int [dA] \exp[i \int d^4x (\mathcal{L} + A_\mu^a J^{a\mu})], \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (3.309)$$

(e) Montrer que le propagateur fermionique est donné par :

$$\langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \frac{(-i)^2}{Z[0,0,0]} \frac{\delta^2 Z[J, \eta, \bar{\eta}]}{\delta \bar{\eta}_\alpha(x) \delta (-\eta_\beta(y))} \Big|_{J=0}. \quad (3.310)$$

(f) La fonction de Green connexe est :

$$G_n^c(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{n-1} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (3.311)$$

Calculer les fonctions de Green :

$$G_1^c(x), \quad G_2^c(x_1, x_2), \quad G_3^c(x_1, x_2, x_3), \quad G_4^c(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad G_5^c(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5). \quad (3.312)$$

3.7.2 Exercices

Exercice 1 : QCD

Considérons la densité lagrangienne d'un quark

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \partial_\mu \gamma^\mu - m) \psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_v \end{pmatrix} \quad (3.313)$$

(1) Montrer que \mathcal{L} est invariant sous la transformation de jauge globale

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = e^{i g_s \alpha_a T_a}. \quad (3.314)$$

(3) Calculer le courant de Noether correspondant.

(4) Montrer que pour que la densité lagrangienne suivante soit invariante sous la transformation de jauge locale ($\vec{\alpha} \equiv \vec{\alpha}(x)$)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i D_\mu \gamma^\mu - m) \psi. \quad (3.315)$$

il faut que

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_s \mathbb{G}_\mu, \quad \mathbb{G}'_\mu = U(x) \mathbb{G}_\mu U^{-1}(x) + \frac{i}{g_s} (\partial_\mu U(x)) U^{-1}(x). \quad (3.316)$$

(5) Utiliser la transformation infinitésimale pour montrer que

$$G_\mu^{a'} = G_\mu^a + \partial_\mu \alpha^a(x) - g_s f_{abc} \alpha^b(x) G_\mu^c.$$

où $\mathbb{G}_\mu = \frac{1}{2} \vec{T} \cdot \vec{G}_\mu = \frac{1}{2} T^a G_\mu^a$

$$(3.317)$$

(6) Montrer que la densité lagrangienne des champs de jauge est invariante sous la transformation de jauge locale

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4} \vec{\mathbf{G}}_{\mu\nu} \vec{\mathbf{G}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}^{\mu\nu}]. \quad (3.318)$$

où

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \vec{\mathbf{G}}_{\mu\nu} \cdot \vec{T} = \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a T^a. \quad (3.319)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c. \quad (3.320)$$

Exercice 2 : Processus de base en QCD

Considérons les processus de base de la chromodynamique quantique :

- (a) $q\bar{q}' \rightarrow q\bar{q}'$
- (b) $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$
- (c) $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$
- (d) $qq \rightarrow qq$
- (e) $q\bar{q} \rightarrow gg$
- (f) $gg \rightarrow q\bar{q}$
- (g) $gq \rightarrow gq$

- (1) Tracer les diagrammes de Feynman de chaque réactions.
- (2) Écrire l'amplitude correspondante de chaque diagramme de Feynman.
- (3) Écrire le complexe conjugué de chaque amplitude.
- (4) Calculer les sections efficaces différentielles

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \frac{d\sigma}{d\cos(\theta)} \quad \frac{d\sigma}{dt} \quad (3.321)$$

Exercice 3 : la réaction $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$

Considérons la réaction suivante :

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow q(p_3)\bar{q}(p_4).$$

- (1) Tracer les diagrammes de Feynman correspondants.
- (2) Écrire l'amplitude de chaque diagramme.
- (3) Écrire le complexe conjugué de chaque amplitude.
- (4) Écrire cette amplitude en terme des variables de MandelStam.
- (5) Calculer la section efficace totale et différentielles.

Exercice 4 : la réaction $e^- + p \rightarrow e^- + p$

Considérons la réaction suivante :

$$e^-(p) + p(k) \rightarrow e^-(p') + p(k')$$

- (1) On suppose que le proton p est constitué que de quarks de valence u et d . Donner tous les sous-processus possibles (au niveau partonique).
- (1) Tracer les diagrammes de Feynman correspondants.
- (2) Écrire l'amplitude de chaque diagramme.
- (3) Écrire le complexe conjugué de chaque amplitude.
- (4) Écrire cette amplitude en terme des variables de MandelStam.
- (5) Calculer la section efficace différentielle.

Exercice 5 : Diffusion gluon-gluon

Considérons la réaction :

$$g(p_1) + g(p_2) \rightarrow q(p_3) + \bar{q}(p_4).$$

- (1) Tracer les diagrammes de Feynman correspondants.
- (2) Écrire l'amplitude de chaque diagramme.
- (3) Écrire le complexe conjugué de chaque amplitude.
- (4) Choisir un seul diagramme de Feynman et calculer le carré de son amplitude.
- (5) Écrire cette amplitude en terme des variables de MandelStam.
- (6) Calculer la section efficace différentielle.

Exercice 6 : Réaction en QED et QCD

Calculer le carre de l'amplitude et les section efficaces différentielles des réactions suivantes :

$$q(p_1) + q'(p_2) \rightarrow q(p_3) + q'(p_4) \quad (3.322)$$

$$q(p_1) + q(p_2) \rightarrow q(p_3) + \bar{q}(p_4) \quad (3.323)$$

$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \rightarrow q(p_3) + \bar{q}(p_4). \quad (3.324)$$

q et q' sont des quarks différents de masses nulles. Si les médiateurs de réactions sont à la fois le photon γ et le gluon G .

4. Modèle Standard

Sommaire

4.1	Particules et interactions	118
4.1.1	Particules du SM	118
4.1.2	Porté des interactions fondamentales	118
4.1.3	Types d'interactions faible	119
4.2	Modèle de Fermi	120
4.2.1	Modèle de Fermi avant amélioration	120
4.2.2	Violation de parité et interaction vectoriel-axiale ($V-A$)	121
4.2.3	Problèmes du modèle de Fermi	126
4.2.4	Modèle de Fermi avec un boson de jauge intermédiaire	129
4.3	Modèle de Glashow-Weinberg-Salam	130
4.3.1	Courants & Isospin & Hypercharge	130
4.3.2	Lagrangien de la théorie	133
4.3.3	Brisure spontanée de la symétrie	136
4.3.4	Inclusion des quarks dans SM (<i>voir T. Morii et al [11]</i>)	147
4.3.5	Règles de Feynman de SM	150
4.4	Calcul des processus à l'ordre de Born	153
4.4.1	Désintégration du boson W en leptons	153
4.4.2	Désintégration du muon en leptons	156
4.4.3	Processus : $\gamma \rightarrow f + \bar{f}$	157
4.4.4	Processus : $\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow Z + Z$	158
4.4.5	Diffusion de bosons de jauge $VV \rightarrow VV$ est le rôle du boson Higgs	160
4.4.6	Modèle de Fermi comme limite du modèle standard	163
4.5	Exercices et problèmes	164

Le modèle standard (SM) est une théorie qui décrit les particules élémentaires et les forces fondamentales qui les lient. Il s'agit d'une théorie quantique des champs basée sur le groupe de jauge $SU_L(?) \otimes U_Y(1)$, où $SU_L(2)$ est le groupe d'isospin faible et $U_Y(1)$ est le groupe d'hypercharge. Il unifie les deux interactions fondamentales : l'électromagnétisme et l'interaction faible (on l'appelle

aussi la théorie électrofaible). Souvent on inclut l'interaction forte dans le modèle Standard, dans ce cas, la théorie est basée sur le groupe $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ où $SU_C(3)$ est le groupe de couleur. On note que l'interaction forte dans le dernier modèle n'est pas unifiée avec les autres forces mais on l'inclut ad-hoc [11, 12, 13]. En se basant sur l'ouvrage de T. Morii et al. [11], ce chapitre suit de près leur approche et utilise leur notation.

4.1 Particules et interactions

4.1.1 Particules du SM

Le SM décrit les interactions de toutes les particules élémentaires observées expérimentalement. Les fermions sont organisés sous forme de doublets du groupe $SU_L(2)$,

Quark :	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$
Leptons :	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$

les bosons de jauge,

$$\text{Bosons de jauge} = \begin{cases} \gamma & \text{sans masse} \rightarrow \text{EM} \\ W^\pm, Z & \text{massifs} \rightarrow W \\ g & \text{sans masse} \rightarrow S \end{cases} \quad (4.1)$$

et le boson de Higgs H (responsable de la génération des masses des particules).

4.1.2 Porté des interactions fondamentales

La porté des interactions diffère l'une de l'autre. Par exemple, l'interaction électromagnétique est une interaction à longue portée tandis que l'interaction faible est une interaction à courte portée. La masse des bosons de jauge, les porteurs des forces, détermine si la porté d'une interaction est longue ou courte. D'après, le principe d'incertitude d'Heisenberg, un processus est indétectable s'il se produit (particule virtuelle par exemple) à l'intérieur de l'intervalle,

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{1}{m} \quad \text{pour} \quad \hbar = c = 1 \quad (4.2)$$

On définit la porté maximale d'une réaction par :

$$R = c\Delta t \approx \frac{1}{m} \quad (4.3)$$

où m est la masse du boson de Jauge.

Considérons les quatre interactions fondamentales,

▷ Interaction électromagnétique :

$$R_{\text{EM}} = \frac{1}{m_\gamma} = \frac{1}{0} \rightarrow \infty \quad \text{portée infinie}$$

▷ Interaction gravitationnelle :

$$R_{\text{Grav}} = \frac{1}{m_G} = \frac{1}{0} \rightarrow \infty \quad \text{portée infinie}$$

▷ Interaction faible :

$$R_W = \frac{1}{m_{W,Z}} \approx 10^{-18} m \equiv \text{fini} \quad \text{portée finie}$$

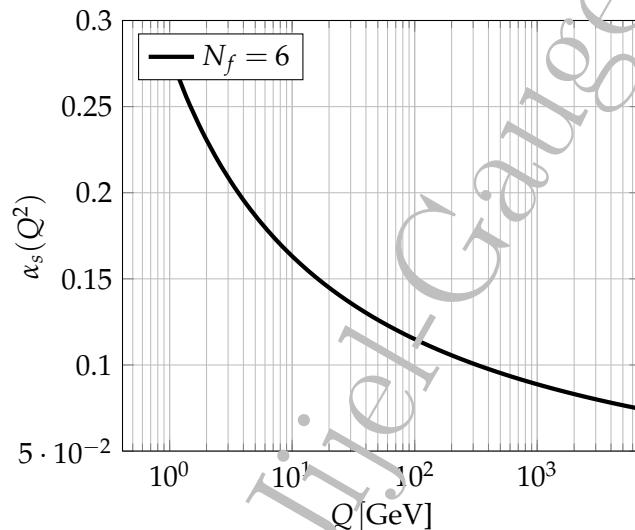
- ▷ Interaction forte :

$$R_S \approx 10^{-15} m \equiv \text{fini} \quad \text{portée finie}$$

La portée de l'interaction forte est finie en raison du phénomène de la liberté asymptotique. Rappelons que la constante de couplage mobile de l'interaction forte est donnée par,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(M^2)}{1 + \alpha_s(M^2)[33 - 2N_f]\ln(\frac{Q^2}{M^2})/(12\pi)} \quad (4.4)$$

La figure suivante décrit la variation de la constante de couplage en fonction de l'énergie.



On voit que à basse énergie (c.à.d. à longue distance) la constante de couplage devient très grande, par contre, à haute énergie (c.à.d. à courte distance) elle devient très petite. Ce qui montre que la portée de l'interaction forte est finie.

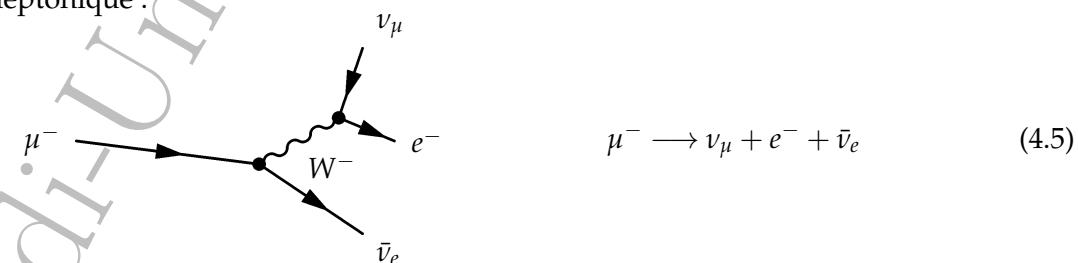
4.1.3 Types d'interactions faible

On peut classifier l'interaction faible selon les médiateurs de l'interaction en :

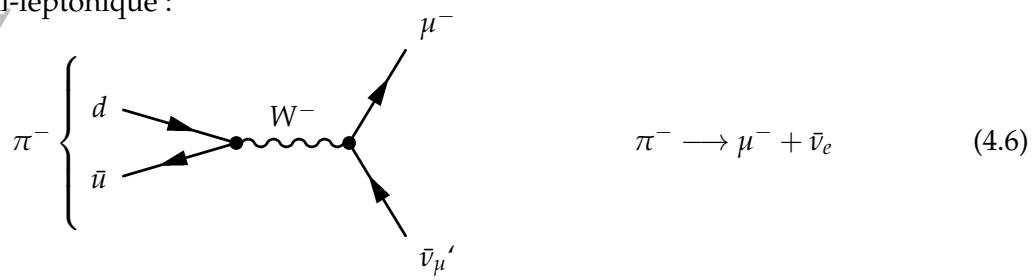
$$\left\{ \begin{array}{l} \triangleright \text{Interaction par courant chargé } (W^\pm) \\ \triangleright \text{Interaction par courant neutre } (Z) \end{array} \right.$$

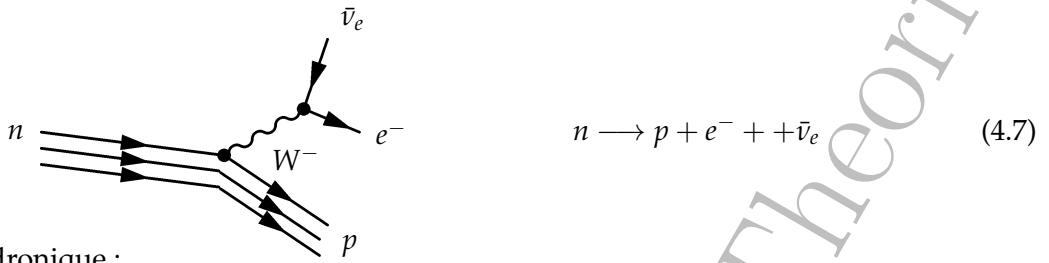
où selon les fermions de l'état initial et final d'un processus en

- ▷ Processus leptonique :

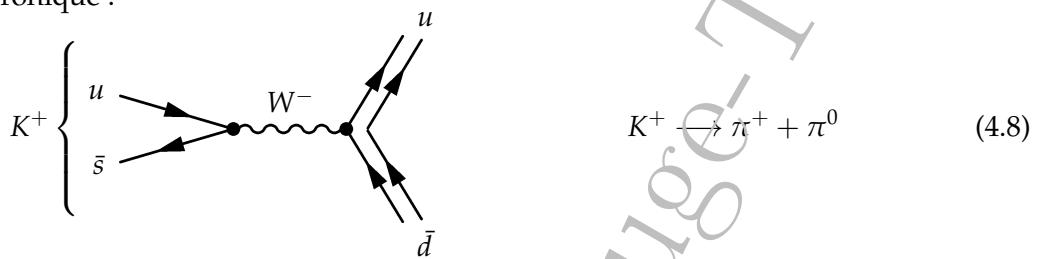


- ▷ Processus semi-leptonique :





▷ Processus hadronique :

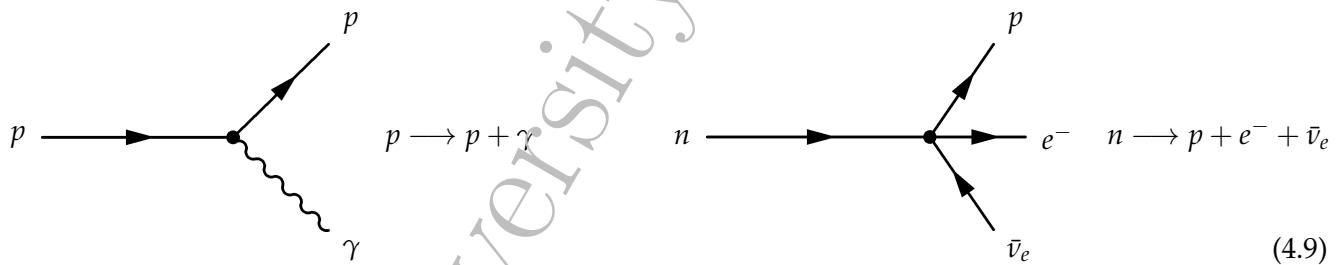


4.2 Modèle de Fermi

La théorie de Fermi (où le modèle de Fermi) est la première tentative sérieuse de construire un modèle décrivant l’interaction faible. Ce modèle donne des prédictions théoriques très précises à basse énergie mais il s’effondre à haute énergie. Il souffre de plusieurs problèmes notamment la violation de l’unitarité et la non-renormalisabilité. Dans cette section on présente le modèle original de Fermi et les améliorations qu’il a subi pour résoudre ses problèmes.

4.2.1 Modèle de Fermi avant amélioration

En 1933, Fermi a proposé son modèle, appelé modèle de Fermi. Dans ce modèle, il suppose que l’électron et le neutrino dans la désintégration β sont émis comme le photon dans les noyaux radiatifs, voir les graphes ci-dessous. Cette théorie se base sur l’hypothèse que l’interaction faible est une interaction ponctuelle, c.à.d. interaction courant-courant. D’après ce modèle, la désintégration β est illustrée par le diagramme suivant,



La densité lagrangienne d’interaction de ce modèle est donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu) + h.c. \right] \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [J_B^\mu J_\mu^L + h.c.] \end{aligned} \quad (4.10)$$

où G_F est la constante de couplage de Fermi et

$$\begin{cases} J_B^\mu = (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) & \text{courant baryonique} \\ J_\mu^L = (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu) & \text{courant leptonique} \end{cases}$$

La dimension en terme de masse de la constante de couplage de Fermi est,

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_I] &= 4 \\ &= [G_F] + 4[\psi] \end{aligned} \quad (4.11)$$

mais les ψ (ψ_p , ψ_n , ψ_e et ψ_ν) sont des spineurs de Dirac, donc $[\psi] = 3/2$. Alors,

$$[G_F] = -2 \quad (4.12)$$

4.2.2 Violation de parité et interaction vectoriel-axiale ($V-A$)

L'interaction dans la version originale du modèle de Fermi est de nature vectorielle, c.à.d. le courant ne contient que des matrices de Dirac γ^μ . Mais après la découverte de la violation de parité, les physiciens ont compris que la nature de l'interaction doit être de nature vectoriel-axiale ($V-A$), c.à.d. il faut remplacer les matrices de Dirac, dans le courant, par le terme $V-A$ suivant : $\gamma^\mu(1 - g_A \gamma_5)$. Avant d'implémenter ce mode d'interaction dans le modèle de Fermi, on doit tout d'abord donner quelques rappels sur la chiralité et l'hélicité des particules.

Chiralité et hélicité

On définit les chiralités gauche (ψ_L) et droite (ψ_R) d'un spinor de Dirac par,

$$\begin{cases} \psi_L = P_L \psi \\ \psi_R = P_R \psi \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{\psi}_L = \bar{\psi} P_R \\ \bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L \end{cases} \quad (4.13)$$

où $P_{L,R}$ sont les projecteurs de chiralité gauches et droites, ils sont définis par,

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Les projecteurs $P_{L,R}$ vérifient les propriétés suivantes,

$$\begin{aligned} (P_L)^2 &= P_L & (P_R)^2 &= P_R & P_L^\dagger &= P_R & P_R^\dagger &= P_L \\ P_L P_R &= 0 & P_R P_L &= 0 & P_L + P_R &= 1 & & \end{aligned} \quad (4.15)$$

On peut voir ψ_L et ψ_R (res. $\bar{\psi}_L$ et $\bar{\psi}_R$) comme deux degrés de liberté indépendante du spinor ψ (res. $\bar{\psi}$), on écrit,

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R \quad (4.16)$$

ψ_L et ψ_R annihilent, respectivement, un fermion d'hélicité $h = \mp 1/2$ et créent un anti-fermion d'hélicité $h = \pm 1/2$.

Les spineurs ψ_L et ψ_R sont des vecteurs propres de l'opérateur chiralité γ_5 avec les valeurs propres ± 1 , respectivement. On écrit donc,

$$\gamma_5 \psi_R = \psi_R \quad \gamma_5 \psi_L = -\psi_L \quad (4.17)$$

avec,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

On dit que ψ_R est de chiralité positive où de chiralité droite (*right-handed*) et ψ_L est de chiralité négative où chiralité gauche (*left-handed*).

Exercice : montrer que :

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R \quad (4.19)$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R - \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \quad (4.20)$$

$$\bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R \quad (4.21)$$

On dit qu'une particule est d'hélicité droite (ou R) si son spin et quantité du mouvement sont dans la même direction, et d'hélicité gauche (L) si le spin et la quantité du mouvement sont anti-parallèles. On définit l'opérateur hélicité d'une particule par,

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \end{aligned} \quad (4.22)$$

où \vec{p} est l'impulsion de la particule, \vec{S} est le spin de la particule et $\sigma \equiv (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)$ (les σ_i sont les matrices de Pauli).

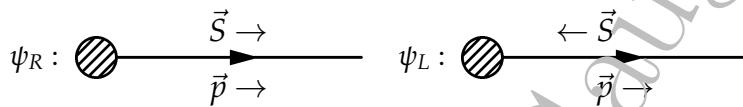
Pour des fermions de masse nulle, on a

$$\hat{h}\psi_R = +\frac{1}{2}\psi_R \quad \hat{h}\psi_L = -\frac{1}{2}\psi_L \quad (4.23)$$

Pour des fermions avec masse (et pour $E \gg m$), on a

$$\hat{h}\psi_R = +\frac{1}{2}\psi_R + \frac{m}{2E}\psi_L \quad \hat{h}\psi_L = -\frac{1}{2}\psi_L - \frac{m}{2E}\psi_R \quad (4.24)$$

On voit que l'hélicité correspond à la chiralité pour des fermions de masse nulle, et à l'inverse de la chiralité pour des anti-fermions de masse nulle. Schématiquement, on peut les représenter par :



Pour la chiralité droite \vec{p} et \vec{S} sont parallèles et pour la chiralité gauche \vec{p} et \vec{S} sont anti-parallèles.

Exercice :

(1) Montrer que l'équation de Dirac dans la représentation γ_5 diagonale s'écrit sous la forme,

$$\begin{cases} (-i\partial/\partial t - i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\chi - m\eta = 0 \\ (-i\partial/\partial t + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})\eta - m\chi = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

avec

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \quad \psi = \psi_R + \psi_L \quad (4.26)$$

où χ et η sont les spineurs de Weyl.

(2) Utiliser l'éq.(4.25) pour montrer les équations (4.23) et (4.24).

Spineurs et transformation de Lorentz

Pour les spineurs de Dirac, la transformation de Lorentz est implémentée de la manière suivante :

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(x) = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\psi(\Lambda x) \quad (4.27)$$

où $U(\Lambda)$ est transformation unitaire et

$$\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}\right), \quad \text{avec} \quad S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (4.28)$$

On rappelle que les matrices de Dirac se transforment sous la transformation de Lorentz comme :

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda_\nu^\mu\gamma^\nu. \quad (4.29)$$

On peut montrer qu'on peut construire que 5 formes bilinéaires qu'ils ont la bonne structure de Lorentz, les voici :

Scalaire (spin 0) :	$\bar{\psi}\psi$
Pseudo-scalaire (spin 0) :	$\bar{\psi}\gamma^5\psi$
Vecteur (spin 1) :	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$
Axial (spin 1) :	$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$
Tenseur (spin 2) :	$\bar{\psi}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\psi$

(4.30)

Spineurs et parité

L'opérateur parité P ($P : \vec{x} \rightarrow -\vec{x}$) transforme l'état $\hat{a}^\kappa(\vec{k})|0\rangle$ en $\hat{a}^\kappa(-\vec{k})|0\rangle$, donc :

$$\begin{aligned} P \hat{a}^\kappa(\vec{k}) P &= \eta_a \hat{a}^\kappa(-\vec{k}), & \text{avec} & \eta_a = \pm, \\ P \hat{b}^\kappa(\vec{k}) P &= \eta_b \hat{b}^\kappa(-\vec{k}), & \text{avec} & \eta_b = \pm. \end{aligned} \quad (4.31)$$

On peut montrer que le spinor de Dirac et son adjoint se transforment comme suit :

$$P \psi(t, \vec{x}) P = \eta_a \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}), \quad P \bar{\psi}(t, \vec{x}) P = \eta_a^* \bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^0 \quad (4.32)$$

où $\eta_b^* = -\eta_a$.

Exercice : formes bilinéaires et parité

Comment les formes bilinéaires, suivantes, se transforment sous la parité :

$$\bar{\psi} \psi, \quad \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad i \bar{\psi} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi, \quad \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi, \quad i \bar{\psi} \gamma^5 \psi. \quad (4.33)$$

- Scalaire : $\bar{\psi} \psi$

$$\begin{aligned} P \bar{\psi}(t, \vec{x}) \psi(t, \vec{x}) P &= |\eta_a|^2 (\gamma^0)^2 \bar{\psi}(t, -\vec{x}) \psi(t, -\vec{x}) \\ &= +\bar{\psi}(t, -\vec{x}) \psi(t, -\vec{x}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

- Pseudo-scalaire : $i \bar{\psi} \gamma^5 \psi$

$$\begin{aligned} P i \bar{\psi}(t, \vec{x}) \gamma^5 \psi(t, \vec{x}) P &= |\eta_a|^2 i \bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}) \\ &= -i \bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^5 \psi(t, -\vec{x}). \end{aligned} \quad (4.35)$$

- Vecteur : $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$

$$\begin{aligned} P \bar{\psi}(t, \vec{x}) \gamma^\mu \psi(t, \vec{x}) P &= |\eta_a|^2 \bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}) \\ &= \begin{cases} +\bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^\mu \psi(t, -\vec{x}) & \text{pour } \mu = 0, \\ -\bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^\mu \psi(t, -\vec{x}) & \text{pour } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.36)$$

- Pseudo-vecteur : $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$

$$\begin{aligned} P \bar{\psi}(t, \vec{x}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(t, \vec{x}) P &= |\eta_a|^2 \bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 \psi(t, -\vec{x}) \\ &= \begin{cases} -\bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(t, -\vec{x}) & \text{pour } \mu = 0, \\ +\bar{\psi}(t, -\vec{x}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(t, -\vec{x}) & \text{pour } \mu = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.37)$$

La parité intrinsèque (voir le cours de physique des particules de M1) des fermions, anti-fermion et bosons de jauge est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{fermion :} & \quad P(f) = +1 & f = l^-, q. \\ \text{anti-fermion :} & \quad P(\bar{f}) = -1 & \bar{f} = l^+, \bar{q}. \\ \text{boson de jauge :} & \quad P(V) = -1 & V = \gamma, g, W^\pm, Z. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Exercice : conservation de la parité en QED

Montrer que la parité est conservé dans le processus : $e^- q \rightarrow e^- q$.

Solution : Considérons la réaction $e^- q \rightarrow e^- q$. L'amplitude associé s'écrit

$$M \propto J_\mu^e J^{q\mu}, \quad J_\mu^e = \bar{u}_e \gamma^\mu u_e, \quad J^{q\mu} = \bar{u}_q \gamma^\mu u_q. \quad (4.39)$$

On a

$$J_\mu^{e'} = P J_\mu^e P = \begin{cases} +\bar{u}_e \gamma_0 u_e \\ -\bar{u}_e \gamma_i u_e \end{cases} \text{ (pour } i = 1, 2, 3 \text{)} \quad J^{e\mu'} = P J^{q\mu} P = \begin{cases} +\bar{u}_q \gamma^0 u_q \\ -\bar{u}_q \gamma^i u_q \end{cases} \text{ (pour } i = 1, 2, 3 \text{)} \quad (4.40)$$

Car la composante temporelle des courants est inchangée, alors le produit scalaire des 4-courants reste invariant, c.à.d.

$$J_\mu^{e'} J^{q\mu'} = J_\mu^e J^{q\mu} \quad (4.41)$$

d'où l'invariance par transformation de parité.

Spineurs et conjugaison de charge

L'opérateur conjugaison de charge transforme l'opérateur d'annihilation d'un fermion en opérateur de création d'un anti-fermion et vice-versa :

$$C \hat{a}^\kappa(\vec{k}) C = \hat{b}^\kappa(\vec{k}), \quad C \hat{b}^\kappa(\vec{k}) C = \hat{a}^\kappa(\vec{k}). \quad (4.42)$$

On peut montrer que le spinor de Dirac et son adjoint se transforment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} C \psi(x) C &= -i \gamma^2 (\psi^\dagger)^t = -i (\bar{\psi} \gamma^0 \gamma^2)^t, \\ C \bar{\psi}(x) C &= (-i \gamma^2 \psi)^t \gamma^0 = (-i \gamma^0 \gamma^2 \psi)^t. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Exercice : formes bilinéaires et conjugaison de charge

Montrer que les formes bilinéaires se transforment de la manière suivante :

$$C(\bar{\psi} \psi) C = +\bar{\psi} \psi \quad (4.44)$$

$$C(i\bar{\psi} \gamma^5 \psi) C = +i\bar{\psi} \gamma^5 \psi \quad (4.45)$$

$$C(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) C = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (4.46)$$

$$C(\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) C = -\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (4.47)$$

Généralisation de Gamow et Teller

La conservation du moment cinétique dans la désintégration β requiert,

$$\vec{J}_n = \vec{J}_p + \vec{J}_{ev} \quad (4.48)$$

où \vec{J}_n , \vec{J}_p et $\vec{J}_{ev} = \vec{L} + \vec{S}$ sont les moments cinétiques total du neutron, du proton et du système $e - \nu$.
On distingue deux cas :

$$\begin{cases} S_{e-\nu} = 0 & \Delta J = 0 \quad \text{électron et neutrino sont anti-parallèles} \\ S_{e-\nu} = 1 & \Delta J = 0, 1 \quad \text{électron et neutrino sont parallèles} \end{cases}$$

La première transition (J est inchangé) est expliquée par la nature vectorielle de l'interaction donc le modèle de Fermi (on l'appelle transition de Fermi). La deuxième transition (J est changé) ne peut être pas expliquer par le modèle de Fermi, elle est expliquée par la nature axiale de l'interaction (on l'appelle transition de Gamow-Teller).

George Gamow et Edward Teller ont généralisé (entre 1934-1936) le modèle de Fermi en remplaçant la nature vectoriel de l'interaction (la matrice γ dans le courant) par une combinaison d'interaction de type scalaire, pseudo-scalaire, vectorielle, axiale et tensorielle. Ils ont proposé la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L}_I = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [(\bar{\psi}_n \hat{O}_B \psi_p)(\bar{\psi}_e \hat{O}_L \psi_\nu) + h.c] \quad (4.49)$$

La forme la plus générale de \hat{O} est,

$$\hat{O} = \sum_{j=S,P,V,A,T} \hat{O}_j \quad (4.50)$$

avec

\hat{O}_j	nature	notation
\mathbb{I}	scalaire	S
γ_5	pseudo-scalaire	P
γ^μ	vectorielle	V
$\gamma^\mu \gamma_5$	axiale	A
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	tensorielle	T
$\sigma^{\mu\nu} \gamma_5$	pseudo-tensorielle	PT

Exercice :

- (1)- Montrer que dans le mode de désintégration de Fermi, la nature de l'interaction doit être vectoriel (V) et dans le mode de désintégration de Gamow-Teller, la nature de l'interaction doit être axiale (A).
 (2)- Est ce que la transition de Fermi peut être scalaire (S) ?
 (3)- Est ce que la transition de Gamow-Teller peut être tensorielle (T) ?

Violation de parité

Les physiciens Lee et Yang ont proposé, en 1956, la violation de parité pour résoudre le problème connu à l'époque par θ - τ puzzle. Les hadrons θ et τ ont les mêmes masses, charges électrique, spins et demi-vies moyennes, mais ils désintègrent différemment avec des parité différentes,

$$\begin{cases} \theta \rightarrow \pi^+ + \pi^0 & \eta_P = +1 \\ \tau \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- & \eta_P = -1 \end{cases} \quad (4.51)$$

Mais pourquoi les parités sont différentes ? Lee et Yang ont proposé l'hypothèse suivante (en 1956) : *les hadrons θ et τ sont la même particule (appelé plus tard K^+) et que la parité est violée par l'interaction faible.*

$$\begin{cases} K^+(\eta_P = +1) \rightarrow \pi^+ + \pi^0(\eta_P = +1) & 21.1\% \\ K^+(\eta_P = -1) \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-(\eta_P = -1) & 5.6\% \end{cases} \quad (4.52)$$

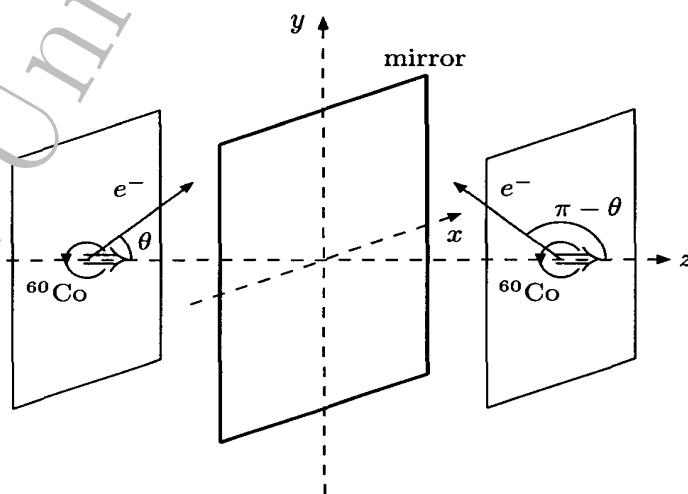
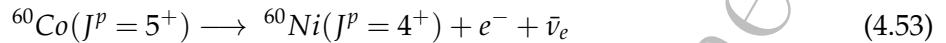


FIGURE 4.1 – Expérience de Wu (figure taken from ref. [11]).

La violation de parité a été prouvée expérimentalement dans la même année en étudiant la désintégration β par l'expérience de Wu et al. Dans cette expérience, ils ont observé la désintégration des atomes du Cobalt-60 (atome instable), aligné par un champ magnétique uniforme, en Nickel-60 (atome stable) via la désintégration β , voici la réaction



où un neutron n du noyau du Cobalt ${}^{60}\text{Co}$ se désintègre pour donner un proton p , un électron e^- et un neutrino $\bar{\nu}_e$ et un atome de Nickel-60.

Les électrons émis font un angle θ avec le spin des atomes ${}^{60}\text{Co}$. Si la parité est conservée, il faut que la probabilité de trouver des électrons produits avec un angle $\theta = 0$ est égale à la probabilité des électrons émis par un angle $\theta = \pi$. Mais Wu et al ont observé le contraire, il ont trouvé que la probabilité de trouver des électrons émis par un angle $\theta = \pi$ est plus grande que la probabilité de trouver un électrons par un angle $\theta = 0$. Ce résultat implique que la parité n'est pas conservée dans l'interaction faible.

Les résultats de Wu et al impliquent que l'interaction faible est un mélange entre interaction vectorielle et axiale (où interaction vectorielle-axiale $V-A$).

Modèle de Fermi et interaction $V-A$

La violation de parité a conduit les physiciens Feynman, Gell-Mann, Sudershan et Marshak à suggérer la généralisation suivante du modèle de Fermi,

$$\mathcal{L}_I = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[(\bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - g_A \gamma_5) \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_e) + h.c. \right] \quad (4.54)$$

où les courants leptonique et hadronique sont donnés par :

$$J_l^\mu \propto \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_e \quad (4.55)$$

$$J_B^\mu \propto \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - g_A \gamma_5) \psi_n \quad (4.56)$$

Exercice : Violation de parité dans l'interaction $V - A$

Montrer que la parité est violée par les interactions de type $V - A$.

Solution : Considérons un processus $2 \rightarrow 2$. L'amplitude associée est

$$M \propto J_\mu J^\mu, \quad J_\mu = \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u \equiv J_\mu^V - J_\mu^A \quad (4.57)$$

où J_μ^V et J_μ^A sont, respectivement, les parties vectorielle et axiale du courant. On montrera ci-dessus que :

$$J_\mu^V = P J_\mu^V P = \begin{cases} +J_0^V \\ -J_i^V \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad J_\mu^A = P J_\mu^A P = \begin{cases} -J_0^A \\ +J_i^A \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (4.58)$$

On voit que le produit scalaire des courants de la même nature est invariant sous parité, c.à.d.

$$J_\mu^V J'^V \mu = J_\mu^V J^{V \mu}, \quad J_\mu^A J'^A \mu = J_\mu^A J^{A \mu}. \quad (4.59)$$

mais l'interférence entre J_μ^V et J_μ^A n'est pas invariant, c.à.d.

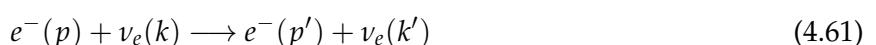
$$J_\mu^V J'^A \mu = -J_\mu^V J^{A \mu} \neq J_\mu^A J^{V \mu}. \quad (4.60)$$

Donc, l'interaction $V - A$ viole la parité.

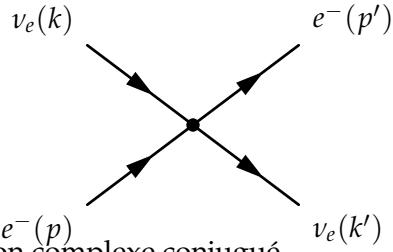
4.2.3 Problèmes du modèle de Fermi

Violation de l'unitarité

Considérons la réaction suivante,



Le diagramme de Feynman décrivant cette réaction est,



L'amplitude correspondante et son complexe conjugué,

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(p') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(k)] [\bar{u}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p)] \quad (4.62)$$

$$\bar{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(k) (1 + \gamma_5) \gamma_\mu u(p')] [\bar{u}(p) (1 + \gamma_5) \gamma^\mu u(k')] \quad (4.63)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins,

$$\begin{aligned} \overline{|M|^2} &= \frac{G_F^2}{8} \text{Tr}[\not{p}' \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \not{k} (1 + \gamma_5) \gamma_\mu'] \text{Tr}[\not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{p} (1 + \gamma_5) \gamma^\mu'] \\ &= \frac{G_F^2}{2} \text{Tr}[\not{p}' \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \not{k} \gamma_\mu'] \text{Tr}[\not{k}' \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{p} \gamma^\mu'] \\ &= \frac{G_F^2}{2} (\text{Tr}[\not{p}' \gamma_\mu \not{k} \gamma_\mu'] - \text{Tr}[\gamma_5 \not{k} \gamma_\mu' \not{p}' \gamma_\mu]) (\text{Tr}[\not{k}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\mu'] - \text{Tr}[\gamma_5 \not{p} \gamma^\mu' \not{k}' \gamma^\mu]) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Dans l'équation (4.64), on a négligé les masses des fermions et on utilise

$$\not{p}(1 + \gamma_5) = (1 - \gamma_5) \not{p} \quad (1 - \gamma_5)^2 = 2(1 - \gamma_5) \quad (4.65)$$

Voici quelques propriétés des matrice γ ,

$$\gamma_5^2 = 1 \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (4.66)$$

$$\text{Tr}[\gamma_5] = 0 \quad (4.67)$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu] = 0 \quad (4.68)$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu] = 0 \quad (4.69)$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha] = 0 \quad (4.70)$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta] = 4i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (4.71)$$

$$(4.72)$$

Propriétés du tenseur ϵ :

- Le tenseur ϵ est antisymétrique par l'échange de deux indices :

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = -\epsilon^{\beta\alpha\mu\nu} = \epsilon^{\beta\mu\alpha\nu} = -\epsilon^{\beta\mu\nu\alpha} \quad (4.73)$$

- Contraction ϵ .

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = -2(g_\rho^\mu g_\sigma^\nu - g_\sigma^\mu g_\rho^\nu) \quad (4.74)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\mu\sigma} = -6g_\sigma^\nu \quad (4.75)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -24 \quad (4.76)$$

Alors,

$$\overline{|M|^2} = \frac{G_F^2}{2} (T_{\mu\mu'}^{(1)} - T_{\mu\mu'}^{(2)}) (T_{\mu\mu'}^{(3)} - T_{\mu\mu'}^{(4)}) \quad (4.77)$$

avec,

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\mu'}^{(1)} &= \text{Tr}[\not{p}'\gamma_\mu \not{k}\gamma_{\mu'}] \\
 T^{(2)\mu\mu'} &= 4i\varepsilon_{\not{k}\mu'\not{p}'\mu} \\
 T^{(3)\mu\mu'} &= \text{Tr}[\not{k}'\gamma^\mu \not{p}\gamma^{\mu'}] \\
 T_{\mu\mu'}^{(4)} &= 4i\varepsilon^{\not{p}\mu'\not{k}'\mu}
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

où

$$\varepsilon_{\not{k}\mu'\not{p}'\mu} = k^\alpha p'^\beta \varepsilon_{\alpha\mu'\beta\mu} \quad \varepsilon^{\not{p}\mu'\not{k}'\mu} = p_\alpha k'_\beta \varepsilon^{\alpha\mu'\beta\mu} \tag{4.79}$$

Les tenseurs $T^{(1)}$ et $T^{(3)}$ sont symétrique (par l'échange de μ et μ') et les tenseurs $T^{(2)}$ et $T^{(4)}$ sont anti-symétrique (par l'échange de μ et μ'), alors,

$$T_{\mu\mu'}^{(1)} T_{\mu\mu'}^{(4)} = 0 \quad T_{\mu\mu'}^{(2)} T_{\mu\mu'}^{(3)} = 0 \tag{4.80}$$

Donc, $\sum |M|^2$ devient,

$$\sum |M|^2 = \frac{G_F^2}{2} (T_{\mu\mu'}^{(1)} T^{(3)\mu\mu'} + T_{\mu\mu'}^{(2)} T^{(4)\mu\mu'}) \tag{4.81}$$

on a,

$$T_{\mu\mu'}^{(1)} T^{(3)\mu\mu'} = 32[k \cdot p k' \cdot p' - k \cdot k' p \cdot p'] \tag{4.82}$$

$$T_{\mu\mu'}^{(2)} T^{(4)\mu\mu'} = 32[k \cdot p k' \cdot p' - k \cdot k' p \cdot p'] \tag{4.83}$$

on obtient,

$$\sum |M|^2 = 32G_F^2 k \cdot p k' \cdot p' \tag{4.84}$$

$$= 8G_F^2 s^2 \tag{4.85}$$

La section efficace est,

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma} &= \frac{1}{16s} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} d|\vec{p}_3| \delta(\vec{p}_3 - \sqrt{s}/2) \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sum |M|^2 \Big|_{\vec{p}_4=\vec{p}_3} \\
 \hat{\sigma} &= \frac{1}{32\pi s} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \sum |M|^2 \\
 &= \frac{G_F^2}{2\pi} s
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

On voit que la section efficace est proportionnelle au carré de l'énergie du centre de masse, donc elle augmente rapidement avec l'énergie. Pour $\sqrt{s} \gg$ la probabilité peut dépasser le 1 ce qui implique la violation de l'unitarité. Donc, à haute énergie le modèle de Fermi viole l'unitarité. En général, la section efficace doit satisfaire la condition de Froissart :

A haute énergie, le comportement de la section efficace totale est proportionnelle au $\ln^2(s)$ ($\sigma \propto \ln^2(s)$).

En plus, la théorie de Fermi n'est pas renormalisable car la constante de couplage a une dimension $[G_F] = [m]^{-2} = -2$ (on ne peut pas éliminer les divergences par redéfinition des paramètres).

Non-renormalisabilité

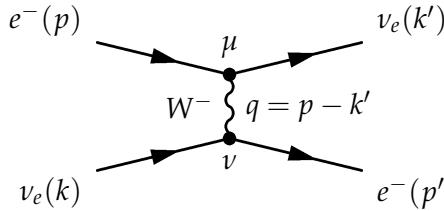
Les théories de jauge sont des théories quantiques des champs renormalisables, c.à.d. les divergences ultraviolettes qui apparaissent dans les diagrammes de Feynman avec boucles peuvent être éliminer par la procédure de renormalisation à condition que la constante de couplage soit sans dimension. En QED par exemple, on peut toujours éliminer ces divergences par la redéfinition des champs et des couplages de manière que la densité lagrangienne devient $\mathcal{L} \longleftrightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, où $\delta\mathcal{L}$ est le lagrangien des contretermes.

4.2.4 Modèle de Fermi avec un boson de jauge intermédiaire

On peut améliorer la théorie de Fermi en supposant que l'interaction se fait via l'échange d'un boson de jauge massifs (comme en QED mais avec un boson de jauge massifs). On recalcule la section efficace pour la réaction,

$$e^-(p) + \nu_e(k) \longrightarrow e^-(p') + \nu_e(k') \quad (4.87)$$

Le diagramme de Feynman décrivant cette réaction est,



L'amplitude correspondante et son complexe conjugué sont,

$$M = \frac{g^2}{8} [\bar{u}(p') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(k)] \frac{(-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} [\bar{u}(k') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p)] \quad (4.88)$$

$$\bar{M} = \frac{g^2}{8} [\bar{u}(k) (1 + \gamma_5) \gamma^\nu u(p')] \frac{(-g_{\mu'\nu'} + q_{\mu'} q_{\nu'} / M_W^2)}{q^2 - M_W^2} [\bar{u}(p) (1 + \gamma_5) \gamma^{\mu'} u(k')] \quad (4.89)$$

avec

$$q = p - k' \quad \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (4.90)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins est,

$$\sum |M|^2 = g^4 \frac{\kappa \cdot p \cdot k' \cdot p'}{(p - k')^2 - M_W^2} \quad (4.91)$$

$$= \frac{g^4}{4} \frac{s^2}{(u - M_W^2)^2} \quad (4.92)$$

$$= \frac{g^4}{[1 + \cos(\theta) + 2M_W^2/s]^2} \quad (4.93)$$

A haute énergie ($s \gg 2M_W^2$), le carré de l'amplitude devient,

$$\sum |M|^2 \approx \frac{g^4}{[1 + \cos(\theta)]^2} \quad (4.94)$$

La section efficace différentielle est,

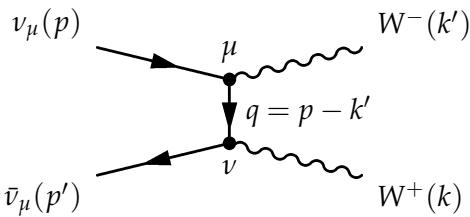
$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}}{d\cos(\theta)} &= \frac{1}{32\pi s} \sum |M|^2 \\ &= \frac{g^4}{32\pi s} \frac{1}{[1 + \cos(\theta)]^2} \propto \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (4.95)$$

On voit que la section efficace est finie pour $s \rightarrow \infty$, donc l'unitarité n'est pas violée dans ce processus grâce au bosons de jauge.

L'introduction d'un boson de jauge intermédiaire résout le problème de violation de l'unitarité pour certains processus mais cette procédure ne résout pas ce problème dans tous les cas. On peut montrer ça par l'exemple suivant. Considérons la réaction,

$$\nu_\mu(p) + \bar{\nu}_\mu(p') \longleftrightarrow W^+(k) + W^-(k') \quad (4.96)$$

Le diagramme de Feynman décrivant cette réaction est,



L'amplitude associée à ce diagramme est,

$$\begin{aligned} M &= \frac{g^2}{8q^2} \bar{v}(p') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) q \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p) \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu^*(k) \\ &= \frac{g^2}{4q^2} \bar{v}(p') \gamma^\nu (1 - \gamma_5) q \gamma^\mu u(p) \epsilon_\mu^*(k') \epsilon_\nu^*(k) \end{aligned} \quad (4.97)$$

Son complexe conjugué est,

$$\bar{M} = \frac{g^2}{4q^2} \bar{u}(p) \gamma^{\mu'} q (1 + \gamma_5) \gamma^{\nu'} v(p') \epsilon_{\mu'}(k) \epsilon_{\nu'}(k) \quad (4.98)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné les spins,

$$\sum |M|^2 = \frac{g^4 (tu - M_W^2)}{4q^2} \quad (4.99)$$

On montre que la section efficace totale,

$$\sigma = \frac{G_F^2}{12\pi} s \quad (4.100)$$

La section efficace est proportionnelle à s , donc *l'unitarité est violée*.

4.3 Modèle de Glashow-Weinberg-Salam

Le modèle de Modèle de Glashow-Weinberg-Salam (GWS) est une théorie de jauge non-abélienne basée sur le groupe de symétrie $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$. Elle unifie les deux interactions fondamentales : l'électromagnétisme et l'interaction faible. Les masses des bosons de jauge et des fermions sont générées par le mécanisme de Higgs [11].

4.3.1 Courants & Isospin & Hypercharge

Dans cette théorie, on suppose que tous les fermions sont massifs sauf les neutrinos¹. On suppose que seuls les chiralités gauches des leptons et les chiralités droites des anti-leptons sont sensibles à l'interaction faible (à cause de la violation de parité, voir le modèle Fermi amélioré).

D'après le modèle de Fermi amélioré, les courants chargés sont donnés par :

$$J_\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_e \equiv J_\mu^+ \quad (4.101)$$

$$J_\mu^\dagger = \frac{1}{2} \bar{\psi}_e (1 + \gamma_5) \gamma_\mu \psi_{\nu_e} \equiv J_\mu^- \quad (4.102)$$

1. Le SM prédit l'existence des neutrinos de masses nulles mais des expériences récentes (Super-Kamiokande) montrent le contraire, les neutrinos possèdent des masses très petites ($m_{\nu_e} \sim 17 - 40$ eV, ...)

Exercice : montrer que les courants s'écrivent sous la forme :

$$J_\mu^+ = \bar{\psi}_{\nu_e L} \gamma_\mu \psi_{e L} \quad (4.103)$$

$$J_\mu^- = \bar{\psi}_{e L} \gamma_\mu \psi_{\nu_e L} \quad (4.104)$$

avec

$$\psi_{e L} = \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \psi_e \quad \psi_{\nu_e L} = \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \psi_{\nu_e} \quad (4.105)$$

On réarrange les leptons de chiralité gauche sous forme de doublets de $SU_L(2)$,

$$L = \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{e L} \\ e_{L} \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

Par analogie avec la théorie de l'isospin du nucléon présenté dans le chapitre 2. Le courant de Noether d'une théorie basé sur le groupe $SU(2)$ est

$$\vec{J}_\mu = \begin{pmatrix} J_\mu^{(1)} \\ J_\mu^{(2)} \\ J_\mu^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad J_\mu^{(i)} = \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\sigma_i}{2} \psi \quad (4.107)$$

où σ_i (pour $i = 1, 2, 3$) sont les matrices de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

Dans notre cas, le courant s'écrit sous la forme :

$$J_\mu^{(i)} = \bar{L} \gamma_\mu \frac{\sigma_i}{2} L = \bar{L} \gamma_\mu I_i L \quad (4.109)$$

où $I_i = \sigma_i/2$ sont les 3 composantes de l'isospin.

Exercice : montrer que les courants chargés s'expriment en fonction des courants $J_\mu^{(1)}$ et $J_\mu^{(2)}$,

$$J_\mu^+ = J_\mu^{(1)} + i J_\mu^{(2)} \quad (4.110)$$

$$J_\mu^- = J_\mu^{(1)} - i J_\mu^{(2)} \quad (4.111)$$

Le courant neutre est,

$$\begin{aligned} J_\mu^{(3)} &= \bar{L} \gamma_\mu I_3 L \\ &= \frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma_\mu \nu_e - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu e_L \end{aligned} \quad (4.112)$$

on suppose que les neutrinos ne possèdent que des chiralités gauches (car on a supposé qu'ils sont de masse nulle), donc $\nu_e \equiv \nu_{e L}$.

L'isospin (courant de Noether, générateurs de $SU(2)$) est défini par,

$$\hat{I}_i = \int d^3 x J_0^{(i)} \quad (4.113)$$

avec

$$[\hat{I}_i, \hat{I}_j] = i \epsilon_{ijk} \hat{I}_k \quad (4.114)$$

donc, la 3^{ème} composante de l'isospin est,

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma_0 \nu_e - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma_0 e_L \right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \nu_e^\dagger \nu_e - \frac{1}{2} e_L^\dagger e_L \right]\end{aligned}\quad (4.115)$$

La chiralités gauches des champs n'interagissent pas faiblement, donc ils sont des singlets de $SU(2)$, alors,

$$R = \frac{(1 + \gamma_5)}{2} e_R \quad (4.116)$$

En fonction des chiralités gauches et droites, le courant électromagnétique (de la QED) s'exprime sous la forme,

$$J_\mu^{\text{em}} = -\bar{e}_L \gamma_\mu e_L - \bar{e}_R \gamma_\mu e_R \quad (4.117)$$

Alors, la charge électrique est

$$\hat{Q} = \int d^3x \left[-e_L^\dagger e_L - e_R^\dagger e_R \right] \quad (4.118)$$

A l'aide de la formule de Gellman-Nijishima, on définit l'hypercharge par,

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= 2(\hat{Q} - \hat{I}_3) = 2 \int d^3x \hat{J}_0^{\text{em}} - 2 \int d^3x J_0^{(3)} \\ &= \int d^3x \left[-\bar{\nu}_e^\dagger \nu_e - \bar{e}_L^\dagger e_L - 2 \bar{e}_R^\dagger e_R \right]\end{aligned}\quad (4.119)$$

Les opérateurs isospin, charge électrique et hypercharge sont donnés par,

$$\begin{cases} \hat{I}_3 = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \bar{\nu}_e^\dagger \nu_e - \frac{1}{2} \bar{e}_L^\dagger e_L \right] \\ \hat{Q} = \int d^3x \left[-\bar{e}_L^\dagger e_L - \bar{e}_R^\dagger e_R \right] \\ \hat{Y} = \int d^3x \left[-\bar{\nu}_e^\dagger \nu_e - \bar{e}_L^\dagger e_L - 2 \bar{e}_R^\dagger e_R \right] \end{cases} \quad (4.120)$$

Dans le tableau suivant on donne les valeurs de ces 3 nombres quantiques pour chaque chiralité,

	Q	(I, I_3)	Y
ν_e, ν_μ, ν_τ	0	$(1/2, +1/2)$	-1
e_L, μ_L, τ_L	-1	$(1/2, -1/2)$	-1
e_R, μ_R, τ_R	-1	$(0, 0)$	-2

(4.121)

On voit que les générateurs \hat{Y} et \hat{I}_i commutent,

$$[\hat{Y}, \hat{I}_i] = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.122)$$

Donc, le modèle dont les courants sont définis ci-dessus est invariant sous l'action des éléments du groupes générés par \hat{Y} ($U_Y(1)$) et \hat{I}_i ($SU_L(2)$). Le modèle est invariant sous les transformations,

$$SU_L(2): \begin{cases} L \rightarrow L' = e^{-i\alpha_i(x)I_i} & \text{doublet} \\ R \rightarrow R' = R & \text{singlet} \end{cases} \quad (4.123)$$

$$U_Y(1): \begin{cases} L \rightarrow L' = e^{(-iY/2)\beta(x)L} \equiv e^{(i/2)\beta(x)L} & \text{doublet} \\ R \rightarrow R' = e^{(-iY/2)\beta(x)R} = e^{i\beta(x)R} & \text{singlet} \end{cases} \quad (4.124)$$

4.3.2 Lagrangien de la théorie

On considère qu'une seule génération de leptons, la première génération par exemple (la généralisation pour les autres générations est très simple).

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad R = e_R \quad (4.125)$$

La densité lagrangienne des fermion est

$$\mathcal{L}_F = \bar{L}i\gamma^\mu D_\mu L + \bar{R}i\gamma^\mu D_\mu R \quad (4.126)$$

La forme générale de la dérivé covariante est donnée par,

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - ig \mathbb{W}_\mu - i \frac{Y}{2} g' B_\mu \right) \psi \quad (4.127)$$

où la matrice des champs de jauge $\mathbb{W}_\mu = I_i W_\mu^i$ et Y l'hypercharge du champ ψ . On a,

$$Y = \begin{cases} -1 & \text{pour } L \\ -2 & \text{pour } R \end{cases} \quad \hat{I} = \begin{cases} 1/2 & \text{pour } L \\ 0 & \text{pour } R \end{cases} \quad (4.128)$$

Alors,

$$\begin{cases} D_\mu L = \left(\partial_\mu - ig I_i W_\mu^i + \frac{i}{2} g' B_\mu \right) L \\ D_\mu R = (\partial_\mu + ig' B_\mu) R \end{cases} \quad (4.129)$$

avec

- ▷ W_μ^i : sont les champs de jauge associés aux groupe $SU_L(2)$
- ▷ B_μ : est le champ de jauge associée au groupe $U_Y(1)$
- ▷ g : est la constante de couplage associée au groupe $SU_L(2)$
- ▷ g' : est la constante de couplage associé au groupe $U_Y(1)$

Exercice :

(1) Montrer que \mathcal{L}_F est invariant sous les transformations de jauge locales :

$$\begin{cases} SU_L(2) : & U_2 = e^{-i\alpha_i(x)I_i} \\ U_Y(1) : & U_1 = e^{-i\beta(x)\frac{Y}{2}} \end{cases} \quad (4.130)$$

(2) Montrer que les courants de Noether associé aux groupe $SU_L(2)$ et $U_Y(1)$, respectivement, sont donnés par,

$$J_\mu^{(i)} = \bar{L} \gamma_\mu I_i L \quad (\text{pour } SU_L(2)) \quad (4.131)$$

$$J_\mu = \bar{R} \gamma_\mu \frac{Y}{2} R \quad (\text{pour } U_Y(1)) \quad (4.132)$$

(3) Donner la forme matricielle des opérateurs \hat{I} , \hat{Q} et \hat{Y} et calculer les nombres quantiques associés aux fermions et aux champs \mathbb{W}_μ , W_μ^\pm et W_μ^3 .

Solution de l'exercice :

(1) et (2). Voir le chapitre (2). Dans ce dernier, on a étudié les théories de jauge basées sur le groupe $SU(2)$ et $U(1)$, on a montré l'invariance de jauge locale et on a calculé les courants.

(3). Isospin, charge électrique et hypercharge des bosons de jauge.

Les trois composantes $(\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3)$ de l'opérateur isospin sont identifiés aux générateurs du groupe $SU_L(2)$. Alors,

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{I}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{I}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.133)$$

et

$$\hat{I}^2 = \underbrace{\frac{3}{4}}_{= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.134)$$

On a,

$$\begin{cases} \hat{I}^2 \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ \hat{I}_3 \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} (+1/2)\nu_e \\ (-1/2)e \end{pmatrix}_L \end{cases} \quad (4.135)$$

Donc, dans l'espace d'isospin, les parties gauches des fermions sont représentés par les vecteurs d'états $|I, I_3\rangle$ suivants :

$$\nu_e L = |1/2, +1/2\rangle \quad e_L = |1/2, -1/2\rangle \quad (4.136)$$

L'opérateur charge électrique doit prendre la forme matricielle suivante

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.137)$$

Car

$$\hat{Q} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} (0)\nu_e \\ (-1)e \end{pmatrix}_L \quad (4.138)$$

Donc, l'opérateur hypercharge est

$$\hat{Y} = 2(\hat{Q} - \hat{I}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.139)$$

donc

$$\hat{Y} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} (-1)\nu_e \\ (-1)e \end{pmatrix}_L \quad (4.140)$$

Concernant le singlet e_R . Ce dernier est un singlet de $SU_L(2)$, donc son isospin est nul ($\hat{I} = 0$). Alors,

$$\hat{Q} = \frac{\hat{Y}}{2} \quad (4.141)$$

avec

$$\hat{Q}(e_R) = (-1)(e_R) \quad \hat{Y}(e_R) = (-2)(e_R) \quad (4.142)$$

La densité lagrangienne des bosons de jauge s'écrit,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^i W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (4.143)$$

avec

$$\begin{cases} W'_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g\varepsilon_{ijk}W_\mu^i W_\nu^j \\ B'_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{cases} \quad (4.144)$$

Exercice : Montrer que \mathcal{L}_G est invariant sous les transformations de jauge

$$\begin{cases} W_\mu^{i\prime} = W_\mu^i - \varepsilon_{ijk}\alpha_j(x)W_\mu^k - \partial_\mu\alpha_i(x) \\ B_\mu' = B_\mu - \partial_\mu\beta(x) \end{cases} \quad (4.145)$$

Exercice : On définit les bosons de jauge chargés W_μ^\pm par :

$$W^\pm = \frac{W_\mu^i \pm iW_\mu^i}{\sqrt{2}} \quad (4.146)$$

(1) Calculer les courants de Noether associés aux bosons W_μ^3 et B_μ .

(2) Calculer les charges de Noether.

Remarque :

- ▷ On note qu'on ne peut pas rajouter le terme de masse pour les fermions dans \mathcal{L}_F et le terme des masses des bosons de jauge dans \mathcal{L}_G , car ces derniers brisent l'invariance de jauge.
- ▷ Dans ce modèle, pour générer la masse des bosons de jauge, on doit briser spontanément la symétrie par le mécanisme de Higgs. La brisure spontanée de la symétrie par le mécanisme de Higgs (où mécanisme de Brout-Englert-Higgs) est schématisée par :

$$SU_L(2) \otimes U_Y(1) \xrightarrow{v \sim 246 \text{ GeV}} U_{em}(1)$$

Pour briser la symétrie, on introduit un doublet de champs scalaire complexe appartenant à la représentation fondamentale du groupe $SU(2)$,

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} \quad (4.147)$$

où φ est un champ scalaire complexe chargé positivement et φ^0 est un champ scalaire complexe neutre. L'isospin et l'hypercharge de ces nouveaux champs sont donnés par :

$$(I, I_3) : \begin{cases} \varphi^+ : (1/2, +1/2) \\ \varphi^0 : (1/2, -1/2) \end{cases} \quad (4.148)$$

$$Y = 2(Q - I_3) : \begin{cases} \varphi^+ : +1 \\ \varphi^0 : +1 \end{cases} \quad (4.149)$$

La densité lagrangienne du champ ϕ (doublet de Higgs) est,

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)(D^\mu\phi) - V(|\phi|^2) \quad (4.150)$$

avec

$$\begin{cases} D_\mu\phi = \left(\partial_\mu - igI_iW_\mu^i - \frac{i}{2}g'B_\mu \right)\phi \\ V(|\phi|^2) = -\mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \end{cases} \quad (4.151)$$

où μ^2 et λ sont des paramètres réels, $\lambda > 0$ et $|\phi|^2 = \phi\phi^\dagger$.

Dans la suite, on va discuter la brisure spontanée de la symétrie (SSB) en détail pour une théorie basée sur le groupe $U(1)$ (car c'est plus simple) puis pour le modèle standard. Mais avant de discuter SSB, on explique d'abord comment les fermions interagissent avec le doublet de Higgs.

Interaction de Yukawa

L'interaction des fermions avec le champ scalaire ϕ est donné par le lagrangien de Yukawa,

$$\mathcal{L}_Y = -G_e(\bar{L}\phi R + \bar{R}\tilde{\phi}L + \text{h.c}) \quad (4.152)$$

où G_e est le couplage de Yukawa et le champ $\tilde{\phi}$ est défini par,

$$\tilde{\phi} = i\sigma_2\phi^* = \begin{pmatrix} \phi^0* \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (4.153)$$

Exercice :

- (1) Montrer que \mathcal{L}_ϕ est invariant sous la transformation de jauge du groupe $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$.
- (2) Montrer que la charge électrique, l'hypercharge et I_3 sont conservés dans \mathcal{L}_ϕ .

Finalement, la densité lagrangienne du modèle de GWS avant SSB s'écrit,

$$\mathcal{L}_{GWS} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_Y \quad (4.154)$$

Pour compléter la théorie, il reste de briser spontanément la symétrie et quantifier le modèle.

Remarques :

- ▷ Tous les champs introduits jusqu'à maintenant sont des champs de masses nulles, ils sont non-physiques car ils sont définis dans la base électrosible. Les champs physiques vont être définis dans la base de masse, ils acquièrent des masses après SSB.
- ▷ On peut inclure *ad-hoc* l'interaction forte dans le SM, dans ce cas la théorie est basée sur le groupe de jauge,

$$SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$$

où $SU_C(3)$ est le groupe de couleur. Dans ce cas, la densité lagrangienne du modèle est,

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{GWS} + \mathcal{L}_{QCD} \quad (4.155)$$

Dans ce modèle, l'interaction forte n'est pas unifiée avec les autres forces mais on l'inclut à la main.

- ▷ Jusqu'à maintenant, on a pas étudié l'interaction faible des quarks. Dans la suite, on va montrer comment inclure les quarks dans le modèle standard.

4.3.3 Brisure spontanée de la symétrie

Théorème de Goldstone (groupe $U(1)$)

Considérons la densité lagrangienne d'un champs scalaire complexe ϕ ,

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - V(|\phi|^2) \quad \phi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \quad (4.156)$$

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2 - V(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \quad \phi^* = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}} \quad (4.157)$$

où le potentiel V s'écrit,

$$\begin{aligned} V(\phi^*\phi) &= -\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \\ &= -\frac{\mu^2}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2 \end{aligned} \quad (4.158)$$

Exercice : montrer que \mathcal{L}_ϕ est invariant sous la transformation du groupe $O(2)$ (où $U(1)$),

$$\phi' = e^{i\theta}\phi \iff \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (4.159)$$

On suppose que $\lambda > 0$. On définit la valeur moyenne dans le vide de ϕ (*vev* où *vaccum expectation value*) par,

$$\phi_0 = \langle 0 | \phi | 0 \rangle \quad (4.160)$$

où ϕ_0 correspond à l'énergie la plus basse de ϕ .

Pour dire qu'une théorie est invariante sous une transformation, il faut que les conditions suivantes soient satisfaites,

$$\begin{cases} \mathcal{L}' = \mathcal{L} & \text{soit invariant} \\ \phi'_0 = \phi_0 & \text{soit invariant} \end{cases} \quad (4.161)$$

L'état d'énergie la plus basse est appelée *vev*. Il correspond au minimum du potentiel V :

$$\begin{cases} \partial V / \partial \varphi_1 = 0 = -\mu^2 \varphi_1 + \lambda \varphi_1 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \\ \partial V / \partial \varphi_2 = 0 = -\mu^2 \varphi_2 + \lambda \varphi_2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{cases} \quad (4.162)$$

On distingue deux cas :

▷ (1) $-\mu^2 > 0$ et $\lambda > 0$: dans ce cas, la solution est unique,

$$\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0 \quad \phi_0 = 0 \quad \text{Phase de Wigner} \quad (4.163)$$

Le développement limité du potentiel autour de $\phi_0 = (\varphi_{01}, \varphi_{02})$ est donné par,

$$\begin{aligned} V(\varphi_1 \varphi_2) &= V(\varphi_{01} \varphi_{02}) + \overbrace{\sum_{a=1,2} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi_a} \right)_{\phi_0=\phi} (\varphi_a - \varphi_{0a})}^{\bullet} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{a,b=1,2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} \right)_{\phi_0=\phi} (\varphi_a - \varphi_{0a})(\varphi_b - \varphi_{0b}) + \dots \end{aligned} \quad (4.164)$$

On définit la matrice de masse (coefficients du terme quadratique en φ_i) par,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_a \partial \varphi_b} = m_{ab}^2 \quad (4.165)$$

Pour ce cas,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} = m^2 = -\mu^2 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} = m^2 = -\mu^2 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = 0 \end{cases} \quad (m_{ab}^2) = \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix} \quad (4.166)$$

Donc le potentiel s'écrit,

$$V(\varphi_1 \varphi_2) = V(0) + \frac{1}{2} m^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \quad (4.167)$$

où m est la masse des bosons φ_1 et φ_2 . On appelle cette phase ($|\phi_0|^2 = \varphi_{01}^2 + \varphi_{02}^2 = 0$) *phase de Wigner*, voir Fig. (4.2).

▷ (2) $-\mu^2 < 0$ et $\lambda > 0$: dans ce cas ϕ_0 n'est pas unique, le minimum du potentiel correspond à

$$\begin{cases} \partial V / \partial \varphi_1 = 0 \iff \mu^2 = \lambda (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \\ \partial V / \partial \varphi_2 = 0 \iff \mu^2 = +\lambda (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{cases} \quad (4.168)$$

Donc,

$$\varphi_{01}^2 + \varphi_{02}^2 = v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad |\phi_0|^2 = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (4.169)$$

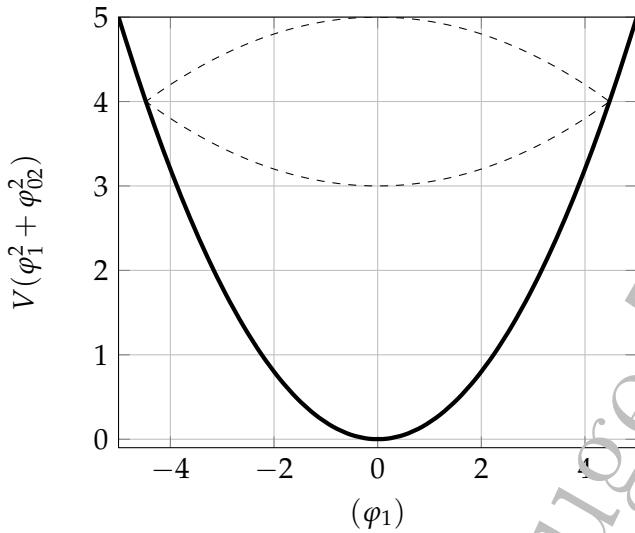


FIGURE 4.2 – Potentiel V pour $-\mu^2 > 0$ et $\lambda > 0$, ici on a fixé $\varphi_2 = \varphi_{02}$ et tracé V en fonction de φ_1 .

On appelle cette phase *phase de Nambu-Goldstone*. Le potentiel dans ce cas prend la forme du chapeau mexicain, voir Fig. (4.3). On voit que tous les points définis par le cercle $|\phi_0|^2 = \varphi_{01}^2 + \varphi_{02}^2 = v^2$ de rayon v minimisent le potentiel V . Alors, on peut choisir ϕ_0 comme suit,

$$\varphi_{01} = v \quad \varphi_{02} = 0 \quad (4.170)$$

On développe le potentiel V autour de $(\varphi_{01} = v, \varphi_{02} = 0)$. On obtient donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} = -\mu^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 2\lambda\varphi_1^2 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} = -\mu^2 + \lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + 2\lambda\varphi_2^2 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = 2\lambda\varphi_1\varphi_2 \end{array} \right. \quad (m_{ab}^2) = \begin{pmatrix} 2\lambda v^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.171)$$

Remarque : Une fois ϕ_0 (où φ_{01} et φ_{02}) est fixé, la symétrie originale de la théorie n'est plus respectée mais elle est brisée car ϕ_0 n'est pas invariant sous la transformation de jauge définie dans l'éq. (4.159), c.à.d.

$$\phi'_0 = e^{i\theta(x)}\phi_0 \neq \phi_0. \quad (4.172)$$

On fait le shift suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'_1 = \varphi_1 - v \\ \varphi'_2 = \varphi_2 \end{array} \right. \quad (4.173)$$

Alors, la densité lagrangienne devient,

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi'_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi'_2)^2 - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\varphi'^2_1 + \lambda v \varphi'_1(\varphi'^2_1 + \varphi'^2_2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi'^2_1 + \varphi'^2_2)^2 \quad (4.174)$$

Le champ φ'_1 correspond à une particule de masse $2\lambda v^2$ appelée bosons de Higgs, et φ'_2 correspond à une particule de masse nulle appelée boson de Goldstone. On peut montrer que la nouvelle densité lagrangienne \mathcal{L}_ϕ n'est pas invariante sous la transformation $O(2)$. Donc, la symétrie est brisée d'après le théorème de Goldstone.

Résumé du théorème de Goldstone :

- On part pas un lagrangien $\mathcal{L}_\phi(\varphi_1, \varphi_2)$ invariant sous $O(2)$
- On impose la contrainte $-\mu^2 < 0$
- On choisit $\varphi_{01} = v, \varphi_{02} = 0$

- On fait le shift $\varphi'_1 = \varphi_1 - v$ et $\varphi'_2 = \varphi_2$
- On obtient un nouveau lagrangien $\mathcal{L}_\phi(\varphi'_1, \varphi'_2)$ n'est pas invariant sous $O(2)$.
- Le boson de Higgs φ'_1 est de masse $2\lambda v^2$ et le boson de Goldstone φ'_2 est de masse nulle.

Paramétrisation utile :

On peut paramétriser le champ complexe ϕ comme suit,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho(x) e^{i\theta(x)/v} \quad (4.175)$$

Alors, la densité lagrangienne devient

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2v^2} \rho(x) (\partial_\mu \theta)^2 - V(\rho^2) \quad (4.176)$$

On shift ρ par $\rho = v + \eta$, alors, la densité lagrangienne devient

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \theta)^2 + \frac{1}{v} \eta(x) (\partial_\mu \theta)^2 + \frac{1}{2v^2} \eta^2(x) (\partial_\mu \theta)^2 - V(\eta^2) \quad (4.177)$$

avec

$$V(\eta^2) = \frac{1}{2} (2\mu^2) \eta^2 + \lambda v \eta^3 + \frac{\lambda}{4} \eta^4 - \frac{1}{4} \mu^2 v^2 \quad (4.178)$$

Dans cette paramétrisation, le boson de Goldstone est θ , il est de masse nulle et le boson de Higgs est η , il est de masse $\sqrt{2\mu^2}$.

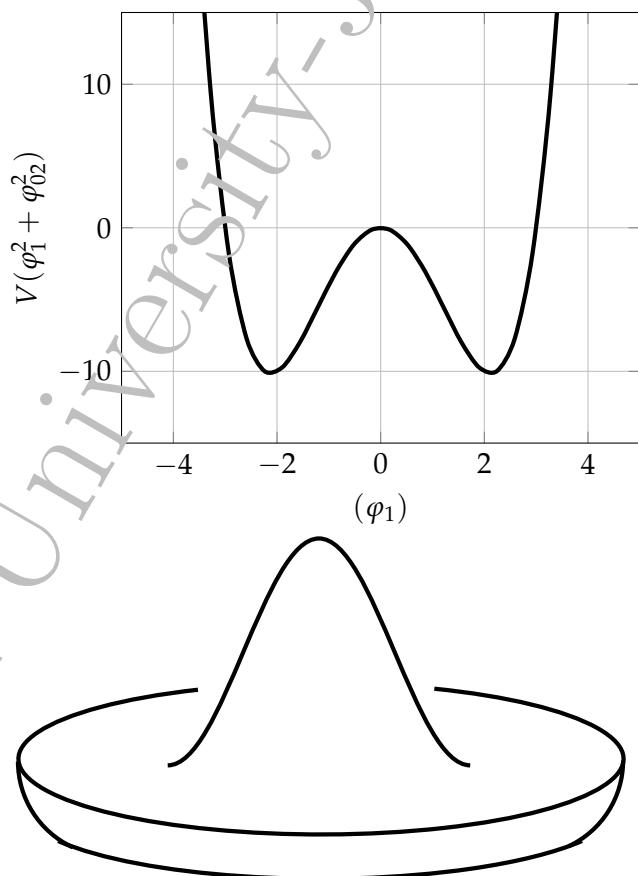


FIGURE 4.3 – Potentiel V pour $-\mu^2 < 0$ et $\lambda > 0$, ici on a fixé $\varphi_2 = \varphi_{02}$ et tracé V en fonction de φ_1 .

Mécanisme de Higgs (groupe $U(1)$)

On considère un modèle basé sur le groupe $U(1)$. La densité lagrangienne de ce dernier est donnée par,

$$\begin{cases} \mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi^\dagger\phi) \\ V(\phi^\dagger\phi) = -\mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \end{cases} \quad (4.179)$$

avec

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \end{cases} \quad (4.180)$$

\mathcal{L} est invariant sous les transformation de jauge,

$$\begin{cases} \phi' = e^{-i\alpha(x)}\phi \\ A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \end{cases} \quad (4.181)$$

Le minimum du potentiel correspond à

$$|\phi_0|^2 = \frac{v^2}{2} = \frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (4.182)$$

On paramétrise le champ ϕ comme suit,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x))e^{i\alpha(x)/v} \quad (4.183)$$

On choisit une transformation de jauge particulière appelée jauge unitaire en imposant $\alpha(x) \equiv \theta(x)/v$, alors

$$\phi' = e^{-i\theta(x)/v}\phi \quad (4.184)$$

Donc, les champs de la théorie deviennent,

$$\begin{cases} \phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x)) \\ A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu\theta(x) \end{cases} \quad (4.185)$$

Dans la jauge unitaire, le lagrangien devient,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \mu^2\eta^2 - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(ev)^2A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}e^2A'_\mu A'^\mu\eta(x)(\eta(x) + 2v) - \lambda v\eta^3(x) - \frac{\lambda}{4}\eta^4 \quad (4.186)$$

Ce nouveau lagrangien décrit l'interaction d'un boson de jauge A'_μ de masse ev est d'un boson de Higgs η de masse $\sqrt{2\mu^2}$. Donc, on voit bien que le boson de jauge acquiert une masse après la brisure spontanée de symétrie via le mécanisme de Higgs. On voit aussi que le boson de Goldstone θ est disparu. En fait, il est absorbé par le boson de jauge A'_μ pour compenser ces degrés de libertés superficiels.

SSB dans le modèle $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$

On a montré que le potentiel de Higgs possède un minimum différent de zéro pour $-\mu^2 < 0$, on a

$$|\phi_0| = \sqrt{\frac{v}{\sqrt{2}}} \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (4.187)$$

La brisure spontanée de symétrie se produit quand on choisit une valeur moyenne de ϕ_0 . On prend

$$\phi_0 = \langle 0|\phi|0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.188)$$

On voit que les opérateurs I_3 et Y n'annihilent pas le vide ϕ_0 , c.à.d.

$$\begin{cases} I_3\phi_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\phi_0 \\ Y\phi_0 = \phi_0 \end{cases} \quad (4.189)$$

Donc, ϕ_0 n'est pas invariant sous ces transformations car :

$$\begin{cases} e^{-i\alpha_3 I_3} \phi_0 \neq \phi_0 \\ e^{-i\frac{Y}{2}\beta} \phi_0 \neq \phi_0 \end{cases} \quad (4.190)$$

(rappelons que $e^{-i\alpha_3 I_3} = \mathbb{I} - i\alpha_3 I_3 + \dots$).

Donc, les générateurs I_3 et Y sont brisés. Par contre, l'opérateur de la charge électrique n'est pas brisé.

$$\begin{aligned} Q\phi_0 &= (I_3 + Y/2)\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0 \\ e^{-i\alpha Q} \phi_0 &= \phi_0 \end{aligned} \quad (4.191)$$

On dit que la symétrie $SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ est brisée à la symétrie $U_{em}(1)$.

Maintenant, il est plus pratique d'écrire le doublet scalaire sous la forme

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = e^{i\alpha_i \xi_i / (2v)} \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (4.192)$$

Les champs ξ_i (pour $i = 1, 2, 3$) sont des bosons de Goldstone et H est le boson de Higgs physique, v est le *vev* ($v = 246$ GeV). Les valeurs moyennes sur le vide des champs ξ_i et H sont nulles,

$$\begin{cases} \langle 0 | \xi_i | 0 \rangle = 0 \\ \langle 0 | H | 0 \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.193)$$

On voit que les bosons de Goldstone ξ_i vont absorber les composantes longitudinales des bosons de jauge W^\pm et Z_0 .

Exercice. Considérons la densité lagrangienne suivante,

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - V(|\phi|^2) \quad (4.194)$$

avec

$$V(\phi^\dagger \phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad \phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (4.195)$$

où $\lambda > 0$.

(1) Montrer que \mathcal{L}_ϕ est invariante sous $SU(2)$.

(2) Montrer que pour $-\mu^2 > 0$ le *vev* est nul et pour $-\mu^2 < 0$ le *vev* correspond à un hyper-cercle à 4-dimensions.

Solution.

(2) Calcul du *vev*. Le doublet ϕ est un champ complexe, donc on peut l'écrire sous la forme :

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix} \quad (4.196)$$

où φ_i (pour $i = 1, 2, 3, 4$) sont des champs réels. Alors, le potentiel V s'écrit,

$$V(|\phi|) = -\mu^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2) + \lambda (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2)^2 \quad (4.197)$$

Les extrema de V (maximum ou minimum) correspondent aux racines de sa dérivé première. Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = -2\mu^2\varphi_1 + 4\lambda\varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2) \equiv 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} = -2\mu^2\varphi_2 + 4\lambda\varphi_2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2) \equiv 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_3} = -2\mu^2\varphi_3 + 4\lambda\varphi_3(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2) \equiv 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_4} = -2\mu^2\varphi_4 + 4\lambda\varphi_4(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2) \equiv 0 \end{array} \right. \quad (4.198)$$

D'après (4.198), on doit distinguer deux cas :

- $\lambda > 0$ et $-\mu^2 > 0$: dans ce cas la solution est unique, elle est donnée par $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0$ et $\varphi_4 = 0$. Donc,

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.199)$$

- $\lambda > 0$ et $-\mu^2 < 0$: dans ce cas est

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2} \quad (4.200)$$

L'éq. (4.200) est une équation d'un hyper-cercle à 4-dimensions. On peut choisir la solution suivante : $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_4 = 0$ et $\varphi_3 = v/\sqrt{2}$. Donc,

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.201)$$

Pour aller au monde réel (base de masse), on introduit la transformation de jauge unitaire suivante

$$U(\xi) = e^{-i\sigma_i \xi_i / (2v)} \quad (4.202)$$

Alors, les champs dans la base de masse sont donnés par,

$$\phi' = U(\xi)\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (4.203)$$

$$L' = U(\xi)L \quad (4.204)$$

$$\frac{\sigma_i}{2} W_\mu'^i = U(\xi) \frac{\sigma_i}{2} W_\mu^i U^{-1}(\xi) - \frac{i}{g} (\partial_\mu U(\xi)) U^{-1}(\xi) \quad (4.205)$$

Les champs R et B_μ restent inchangé par la transformation $U(\xi)$.

$$R' = R \quad (4.206)$$

$$B'_\mu = B_\mu \quad (4.207)$$

Alors, les membres de la densité lagrangienne du modèle GWS s'écrivent,

$$\mathcal{L}_F = \bar{L}' i\gamma^\mu D'_\mu L' + \bar{R}' i\gamma^\mu D'_\mu R' \quad (4.208)$$

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} W'^i_{\mu\nu} W'^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} B'_{\mu\nu} B'^{\mu\nu} \quad (4.209)$$

$$\mathcal{L}_\phi = (D'_\mu \phi')(D'^\mu \phi') - V(|\phi'|^2) \quad (4.210)$$

$$\mathcal{L}_Y = -G_e (\bar{L}' \phi' R' + \bar{R}' \tilde{\phi}' L' + \text{h.c}) \quad (4.211)$$

Dans la suite, on montre comment le mécanisme de Higgs génère les masses des particules.

Masses des bosons de jauge

Le premier terme de \mathcal{L}_ϕ , celui qui contenant la dérivé covariante donne les termes de masse des bosons de jauge, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{masse}} &= (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) \\ &= \frac{1}{2} (0 v) \left[\frac{g}{2} \sigma_i W_\mu^i + \frac{g'}{2} B_\mu \right]^2 \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \text{termes en fonction de } H + \dots \\ &= \frac{v^2}{8} [g^2 (W_\mu^{11} W^{11\mu} + W_\mu^{12} W^{12\mu}) + (g W_\mu^{11} W_\mu^{13} - g' B_\mu')^2] + \text{termes en fonction de } H + \dots \end{aligned} \quad (4.212)$$

On définit les bosons de jauge chargé par,

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^{11} \pm i W_\mu^{12}}{\sqrt{2}} \quad (4.213)$$

Le premier terme de la dernière ligne de (4.212) donne le terme de masse des bosons de jauge chargé, il s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{masse}}^{W^\pm} = \frac{1}{4} g^2 v^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \quad (4.214)$$

Donc, la masse des bosons W^\pm est $M_W = \frac{1}{2} g v$.

Le terme qui reste dans (4.212) on peut l'exprimer comme suit,

$$\mathcal{L}_{\text{masse}}^{Z,A} = \frac{v^2}{8} (W_\mu^{13} B_\mu') \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^{13} \\ B_\mu' \end{pmatrix} \quad (4.215)$$

On peut diagonaliser ce terme par la transformation unitaire suivante,

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_W) & -\sin(\theta_W) \\ \sin(\theta_W) & \cos(\theta_W) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^{13} \\ B_\mu' \end{pmatrix} \quad (4.216)$$

où θ_W est l'angle de Weinberg (ou angle de mélange).

Alors, $\mathcal{L}_{\text{masse}}^{Z,A}$ devient,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{masse}}^{Z,A} &= \frac{v^2}{8} (Z_\mu A_\mu) \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{8} (g^2 + g'^2) Z_\mu Z^\mu + (0) \times A_\mu A^\mu \end{aligned} \quad (4.217)$$

avec

$$\sin(\theta_W) = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \cos(\theta_W) = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \tan(\theta_W) = \frac{g'}{g} \quad (4.218)$$

Donc, la masse du phoron (A_μ) reste nulle et la masse du boson Z est

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g'^2} \quad (4.219)$$

On note que la masse des bosons Z et W sont liées par la relation suivante,

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos(\theta_W)} \quad (4.220)$$

Remarque : La relation (4.220) est vérifiée expérimentalement à très grande précision. Souvent on définit le paramètre ρ par :

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos(\theta_W)^2} \equiv 1 \quad (4.221)$$

A l'échelle électrofaible ($\mu^2 \sim m_Z^2$), on a : $\sin(\theta_W)^2 = 0.23120$ donc $\cos(\theta_W)^2 = 0.7688$, et $m_Z = 91.1876 \text{ GeV}/c^2$ et $m_W = 80.377 \text{ GeV}/c^2$, donc $\rho^{\text{exp}} = 1.0105$.

Exercice : Diagonalisation de la matrice des masses

La matrice de masse associée au boson de jauge neutre est symétrique ($M_{NC} = M_{NC}^t$)

$$M_{NC} = \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \quad (4.222)$$

Donc, on peut la diagonaliser par une transformation unitaire. Cette dernière est construite par les vecteurs propres (normalisés) de M_{NC} , c.à.d.

$$U = (v_1 \ v_2) \quad (4.223)$$

où v_1 et v_2 sont les vecteurs propres associés, respectivement, aux valeurs propres $\lambda_1 = \frac{1}{8}v^2(g^2 + g'^2)$ et $\lambda_2 = 0$ de la matrice M_{NC} . On a :

$$\cdot \begin{cases} M_{NC} \cdot v_1 = \lambda_1 v_1 \\ M_{NC} \cdot v_2 = \lambda_2 v_2 \end{cases} \quad (4.224)$$

avec

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g \\ -g' \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g' \\ g \end{pmatrix} \quad (4.225)$$

Donc,

$$U = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ g & g \end{pmatrix} \quad UU^t = U^tU = 1 \quad (4.226)$$

Remarque : la transformation U est vu comme une rotation dans le plan (W_μ^3, B_μ) par l'angle θ , avec :

$$\theta = \arccos \left(\frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \right) \equiv \theta_w \quad (4.227)$$

Exercice : Relation entre e et les couplages g et g' (unification électrofaible)

Montrer que la charge électrique e et les couplages g et g' sont liés par :

$$\frac{1}{e^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2} \quad (4.228)$$

Solution :

Les champs de jauge physiques électriquement neutres (boson Z et le photon) sont obtenu par la rotation dans le plan $W^3 - B$,

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (4.229)$$

Donc,

$$W_\mu^3 = \frac{g Z_\mu + g' A_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad B_\mu = \frac{-g' Z_\mu + g A_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (4.230)$$

Considérons le terme d'interaction des fermions L avec W_μ^3 et B_μ , on a :

$$\mathcal{L}_I^F \sim g \bar{L} \gamma^\mu \frac{\sigma_3}{2} L W_\mu^3 - g' \bar{L} \gamma^\mu \frac{1}{2} L B_\mu \quad (4.231)$$

On remplace l'éq. (4.230) dans l'éq. (4.231) et on garde que les termes d'interaction avec le photon. On obtient :

$$\mathcal{L}_I^F \sim \underbrace{\frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{L} \gamma^\mu \frac{\sigma_3}{2} L A_\mu}_{\stackrel{\equiv e}{\longrightarrow}} - \underbrace{\frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \bar{L} \gamma^\mu \frac{1}{2} L A_\mu}_{\stackrel{\equiv e}{\longrightarrow}} + \dots \quad (4.232)$$

Donc,

$$e^2 = \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{e^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2} \quad (4.233)$$

Masse du boson de Higgs

Le potentiel de Higgs V devient après la brisure spontané de la symétrie,

$$V(\phi^\dagger \phi) = -\frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{1}{2}(2\mu^2)H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4} H^4 \quad (4.234)$$

On déduit que la masse du Higgs est,

$$M_H = \sqrt{2\mu^2} \quad (4.235)$$

Le lagrangien de Higgs après SSB s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi = & \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{1}{2} M_H^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 \\ & + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \\ & + \frac{g^2}{8} (H^2 + 2vH) \left[\frac{1}{\cos^2(\theta_W)} Z_\mu Z^\mu + 2W_\mu^+ W^{-\mu} \right] \end{aligned} \quad (4.236)$$

le dernier terme de (4.236) décrit l'interaction du boson de Higgs avec les bosons de jauge.

Masses des fermions

Le lagrangien de Yukawa après SSB devient,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_Y &= -G_e(\bar{L}'\phi'R' + \bar{R}'\tilde{\phi}'L' + \text{h.c}) \\
 &= -G_e\left[\bar{e}'_L\frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)e'_R + \bar{e}'_R\frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)e'_L\right] + \text{h.c} \\
 &= -\frac{G_e v}{\sqrt{2}}\bar{e}'e' - \frac{G_e}{\sqrt{2}}H\bar{e}'e'
 \end{aligned} \tag{4.237}$$

Le premier terme donne la masse de l'électron, on a donc

$$m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}} \tag{4.238}$$

et le deuxième terme décrit l'interaction entre l'électron et le Higgs, le couplage $e\text{-}e\text{-}H$ est donné par,

$$\frac{G_e}{\sqrt{2}} = \frac{m_e}{v} \tag{4.239}$$

Dans le cas général, le couplage du Higgs avec les fermions est très petit car il proportionnel à la masse du fermion m_f/v ($m_f \ll v$ sauf pour le top quark).

Équation du mouvement et vecteurs de polarisation des bosons de jauge massifs :

La densité lagrangienne classique (de Stueckelberg) d'un champ de spin 1 est

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}\zeta(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{4.240}$$

où le dernier terme est le terme de fixation de jauge (jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ dans ce cas). Pour simplifier la discussion, on considère que le cas Abélien donc : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Appliquant les équation d'Euler-Lagrange, on obtient l'équation de mouvement d'un champ massif de spin 1,

$$(\square + m^2)A_\mu - (1 - \zeta)\partial_\mu(\partial^\nu A_\nu) = 0 \tag{4.241}$$

Pour $\zeta = 1$ (jauge de Feynman), on obtient la fameuse équation de Proca : $(\square + m^2)A_\mu = 0$. On note que le champ A_μ possède 3 degrés de liberté car la quatrième est éliminé par la contrainte $\partial_\mu A^\mu = 0$. Pour résoudre l'équation (4.241), on prend son 4-gradient on obtient alors,

$$\zeta\left[\square + \frac{m^2}{\zeta}\right](\partial_\mu A^\mu) = 0 \tag{4.242}$$

L'équation (4.242) est vue comme l'équation de Klein-Gordon pour un champ scalaire ($\partial_\mu A^\mu$) de masse $m/\zeta^{1/2}$. On peut montrer que le champ A_μ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 A_\mu(x) &= \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2k_0)} \left[a^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) e^{ik \cdot x} \right] \\
 &\quad + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3(2k_0)} \left[a^{(0)}(k) \varepsilon_\mu^{(0)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(0)\dagger}(k) \varepsilon_\mu^{(0)*}(k) e^{ik \cdot x} \right]
 \end{aligned} \tag{4.243}$$

où $\varepsilon_\mu^{(0)}(k)$ est le vecteur de polarisation longitudinale, il est donné par :

$$\varepsilon_\mu^{(0)}(k) = \frac{k_\mu}{m} \quad (4.244)$$

Les vecteurs de polarisations $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}$ (pour $\lambda = 1, 2, 3$) sont orthogonalisés et orthogonaux au 4-vecteur k_μ , ils vérifient :

$$\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon^\mu(\lambda')(k) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) k^\mu = 0 \quad (4.245)$$

On suppose, maintenant, que le boson se déplace selon l'axe z . Alors, 3 les vecteurs de polarisation de ce dernier sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} & \text{transverse} & s_z = -1 \quad |s, s_z \rangle \equiv |1, -1 \rangle \\ \varepsilon_\mu^L = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix} & \text{longitudinale} & s_z = 0 \quad |s, s_z \rangle \equiv |1, 0 \rangle \\ \varepsilon_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} & \text{transverse} & s_z = +1 \quad |s, s_z \rangle \equiv |1, +1 \rangle \end{array} \right. \quad (4.246)$$

4.3.4 Inclusion des quarks dans SM (voir T. Morii et al [11])

Comme dans le cas des leptons, les champs de quarks de chiralités gauches sont représentés par des doublets de $SU_L(2)$ et les champs de quarks de chiralités droites sont des singlets de $SU_L(2)$, alors

$$\begin{array}{lll} \text{1ère génération :} & \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L & u_R \quad d_R \\ \text{2ème génération :} & \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L & c_R \quad s_R \\ \text{3ème génération :} & \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L & t_R \quad b_R \end{array}$$

La charge électrique, l'isospin et l'hypercharge de ces champs sont donnés dans le tableau suivant :

quarks	Q	(I, I_3)	Y
u_L, c_L, t_L	$+\frac{2}{3}$	$(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$
d_L, s_L, b_L	$-\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$+\frac{1}{3}$
u_R, c_R, t_R	$+\frac{2}{3}$	0	$+\frac{4}{3}$
d_R, s_R, b_R	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$

La densité lagrangienne de Dirac associés aux quarks s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F = & \sum_{i=1}^3 \bar{Q}_{L_i} i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig \frac{\sigma_i}{2} W_\mu^i - \frac{i}{6} g' B_\mu \right) Q_{L_i} \\ & + \sum_{i=1}^3 \bar{U}_{R_i} i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{2i}{3} g' B_\mu \right) U_{R_i} + \sum_{i=1}^3 \bar{D}_{R_i} i \gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{i}{3} g' B_\mu \right) D_{R_i} \end{aligned} \quad (4.247)$$

où Q_{L_i} est un doublet gauche de la génération i (pour $i = 1, 2, 3$), U_{R_i} est la chiralité droite d'un quarks up (singlet) et D_{R_i} est la chiralité droite d'un quark down (singlet).

On mentionne que les densité lagrangienne de jauge \mathcal{L}_G et scalaire \mathcal{L}_s restent les mêmes (ç.à.d. comme dans le cas des leptons). Par contre le terme de Yukawa associé aux quarks prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^{(D)} \bar{Q}_{L_i} \phi D_{R_j} + \Gamma_{ij}^{(U)} \bar{Q}_{L_i} \tilde{\phi} U_{R_j} + h.c.) \quad (4.248)$$

où $\Gamma_{ij}^{(D)}$ et $\Gamma_{ij}^{(U)}$ sont les couplages de Yukawa. Dans le cas le plus général possible, les matrices $\Gamma^{(D)}$ et $\Gamma^{(U)}$ ne sont pas hermitiennes mais ce sont des matrices 3×3 d'éléments complexes.

On remplace les doublets de Higgs dans l'éq. (4.248) par leurs forme dans la jauge unitaire, ç.à.d.

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.249)$$

alors, le lagrangien de Yukawa devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^{(D)} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{D}_{L_i} D_{R_j} + \frac{H}{\sqrt{2}} \bar{D}_{L_i} D_{R_j} \right) + h.c. \\ & - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^{(U)} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{U}_{L_i} U_{R_j} + \frac{H}{\sqrt{2}} \bar{U}_{L_i} U_{R_j} \right) + h.c. \end{aligned} \quad (4.250)$$

On définit les matrices de masse des quarks dans la base faible, respectivement pour les quarks down et up, par,

$$\mathcal{M}_{ij}^{(D)} = \frac{v}{\sqrt{2}} \Gamma_{ij}^{(D)} \quad \mathcal{M}_{ij}^{(U)} = \frac{v}{\sqrt{2}} \Gamma_{ij}^{(U)} \quad (4.251)$$

on note que ces matrices sont en général des matrices complexes.

Le terme de masse, ç.à.d. le terme sans le bosons H dans le lagrangian (4.250), s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}_Y^{m_Q} = - \sum_{i,j} \bar{D}_{L_i} \mathcal{M}_{ij}^{(D)} D_{R_j} - \bar{U}_{L_i} \mathcal{M}_{ij}^{(U)} U_{R_j} + h.c. \quad (4.252)$$

Car les matrices de masse $\mathcal{M}^{(D)}$ et $\mathcal{M}^{(U)}$ ne sont pas forcément hermitiennes, alors elles peuvent être diagonaliser par des transformations bi-unitaire de la manière suivante :

$$\mathcal{U}_D^\dagger \mathcal{M}^{(D)} \mathcal{V}_D = M^{(D)} \quad \mathcal{U}_U^\dagger \mathcal{M}^{(U)} \mathcal{V}_U = M^{(U)} \quad (4.253)$$

où les les matrices $M^{(D)}$ et $M^{(U)}$ sont des matrices diagonales et les matrices \mathcal{V} et \mathcal{U} sont unitaire, ç.à.d

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_U^\dagger \mathcal{U}_U &= 1 & \mathcal{U}_D^\dagger \mathcal{U}_D &= 1 \\ \mathcal{V}_U^\dagger \mathcal{V}_U &= 1 & \mathcal{V}_D^\dagger \mathcal{V}_D &= 1 \end{aligned} \quad (4.254)$$

Ces transformations nous amènent de la base faible à la base de masse, ç.à.d.

$$D'_L = \mathcal{U}_D^\dagger D_L \quad D'_R = \mathcal{V}_D^\dagger D_R \quad (4.255)$$

$$U'_L = \mathcal{U}_U^\dagger U_L \quad U'_R = \mathcal{V}_U^\dagger U_R \quad (4.256)$$

Donc, dans la base des masses le terme de masse des quarks est donné par,

$$\mathcal{L}_Y^{m_Q} = - \bar{D}'_L M^{(D)} D'_R - \bar{D}'_R M^{(D)\dagger} D'_L - \bar{U}'_L M^{(U)} U'_R - \bar{U}'_R M^{(U)\dagger} U'_L \quad (4.257)$$

Dans le cas général, les matrices $M^{(D,U)}$ sont diagonales et complexes, alors on peut écrire les éléments diagonaux sous la forme,

$$M_i^{(D)} = m_i^{(D)} e^{i\alpha_i^{(D)}} \quad M_i^{(U)} = m_i^{(U)} e^{i\alpha_i^{(U)}} \quad (4.258)$$

pour $i = 1, 2, 3$. Les phases $\alpha_i^{(D,U)}$ peuvent être absorbées dans les champs de quarks par une transformation chirale $U(1)$. Donc, $\mathcal{L}_Y^{m_Q}$ devient

$$\mathcal{L}_Y^{m_Q} = -\bar{D}' m^{(D)} D - \bar{U}' m^{(U)} U \quad (4.259)$$

Les matrices $m^{(D,U)}$ donnent les masses physiques des quarks, on a

$$m^{(D)} = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \quad m^{(U)} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \quad (4.260)$$

et D' et U' sont les quarks de type down et up dans la base de masse,

$$D' = \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \quad U' = \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix} \quad (4.261)$$

Exercice : montrer que les phases dans eq. (4.257) peuvent être absorbées par les transformations suivantes pour obtenir l'éq. (4.259)

$$\begin{aligned} D'_{L_i} &= e^{i\alpha_i^{(D)}/2} D_{L_i} \\ D'_{R_i} &= e^{-i\alpha_i^{(D)}/2} D_{R_i} \\ U'_{L_i} &= e^{i\alpha_i^{(U)}/2} U_{L_i} \\ U'_{R_i} &= e^{-i\alpha_i^{(U)}/2} U_{R_i} \end{aligned} \quad (4.262)$$

Interaction à courant chargé des quarks

Le lagrangien à courant chargé est obtenu de l'éq. (4.247) en gardant que les termes contenant les W_μ^\pm , alors ce terme s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L}_{CC}^Q = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}_L \gamma^\mu D_L W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{D}_L \gamma^\mu U_L W_\mu^- \quad (4.263)$$

où les champs $U_{L,R}$ et $D_{L,R}$ sont vus comme des vecteurs à 3-dimension (chaque composante est identifiée à un quark d'une génération). On remplace les champs dans la base faible par les champs de quarks dans la base de masse, c.à.d.

$$D_L = \mathcal{U}_D D'_L \quad \bar{D}_L = \bar{D}'_L \mathcal{U}_D^\dagger \quad (4.264)$$

$$U_L = \mathcal{U}_U U'_L \quad \bar{U}_L = \bar{U}'_L \mathcal{U}_U^\dagger \quad (4.265)$$

alors, \mathcal{L}_{CC}^Q devient

$$\mathcal{L}_{CC}^Q = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}'_L \gamma^\mu (\mathcal{U}_U^\dagger \mathcal{U}_D) D'_L W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{D}'_L (\mathcal{U}_D^\dagger \mathcal{U}_U) \gamma^\mu U'_L W_\mu^- \quad (4.266)$$

On définit la matrice de mélange par

$$V = \mathcal{U}_U^\dagger \mathcal{U}_D \quad V^\dagger = \mathcal{U}_D^\dagger \mathcal{U}_U \quad (4.267)$$

Il est clair que cette matrice est unitaire car on a

$$V^\dagger V = (\mathcal{U}_D^\dagger \mathcal{U}_U) (\mathcal{U}_U^\dagger \mathcal{U}_D) \equiv 1 \quad (4.268)$$

En terme des champs de quarks dans la base de masse, on omet les primes sur les champs de quarks dans l'eq. (4.261), le lagrangien décrivant l'interaction à courant chargé des quarks est donnée par,

$$\mathcal{L}_{CC}^Q = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u} \bar{c} \bar{t}) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} W_\mu^+ + h.c. \quad (4.269)$$

La matrice V est la fameuse matrice CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa), elle décrit le mélange entre les quarks de différentes génération dans l'interaction courant chargé. Il existe plusieurs paramétrisations de cette matrice. Dans la suite on donne deux paramétrisations très connu.

- **Paramétrisation standard :**

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (4.270)$$

où $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$ et $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$ (pour $i = 1, 2, 3$). Cette paramétrisation est caractériser par trois angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et une phase δ_{13} .

- **Paramétrisation de Wolfenstein :**

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & 1\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.271)$$

avec $\lambda \approx 0.22$ et les paramètres A, ρ et η sont d'ordre 1.

Exercice :

- (1) Dévirer la paramétrisation standard de la matrice CKM.
- (2) Dévirer la paramétrisation de Wolfenstein de la matrice CKM.

Interaction à courant neutre

L'interaction à courant neutre est décrite par,

$$\mathcal{L}_{NC}^Q = e J_\mu^{em} A^\mu + \frac{g}{\cos(\theta_W)} (J_\mu^3 - \sin^2 \theta_W J_\mu^{em}) Z^\mu \quad (4.272)$$

avec

$$J_\mu^{em} = \frac{2}{3} \bar{U} \gamma_\mu U - \frac{1}{3} \bar{D} \gamma_\mu D \quad J_\mu^3 = \frac{1}{2} (\bar{U}_L \gamma_\mu U_L - \bar{D}_L \gamma_\mu D_L) \quad (4.273)$$

Finalement, le couplage du boson du Higgs avec les quarks est proportionnel à la masse de ces derniers, on a

$$\mathcal{L}_{Hqq} = -\frac{H}{v} (m_u \bar{u} u + m_d \bar{d} d + m_s \bar{s} s + m_b \bar{b} b + m_c \bar{c} c + m_t \bar{t} t) \quad (4.274)$$

On rappelle que

4.3.5 Règles de Feynman de SM

La généralisation de la théorie pour les autres leptons est très simple, il suffit juste de rajouter les termes \mathcal{L}_F et \mathcal{L}_Y pour chaque génération. On note les doublets et les singlets par

$$\begin{cases} L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L & R_e = e_R \\ L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L & R_\mu = \mu_R \\ L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L & R_\tau = \tau_R \end{cases} \quad (4.275)$$

alors,

$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_F^{(e)} + \mathcal{L}_F^{(\mu)} + \mathcal{L}_F^{(\tau)} \quad (4.276)$$

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^{(e)} + \mathcal{L}_Y^{(\mu)} + \mathcal{L}_Y^{(\tau)} \quad (4.277)$$

Finalement, la densité lagrangienne du modèle de Glashow-Weinberg-Salam s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GWS} = & \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi + \sum_k \bar{\psi}_k \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_k - \frac{m_k}{v} H \right) \psi_k - \frac{g}{2\sqrt{2}} (J_\mu^- W_\mu^+ + J_\mu^+ W_\mu^-) \\ & - e J_{em}^\mu A_\mu - \frac{g}{2\cos(\theta_W)} J_Z^\mu Z_\mu \end{aligned} \quad (4.278)$$

La densité lagrangienne \mathcal{L}_G après la brisure spontané de symétrie et après la diagonalisation de la matrice des masses (ç.à.d. dans la base de masse) est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} + \frac{g^2}{4} \left[W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+ \right]^2 \\ & - \frac{1}{2} \frac{g^2 g'^2}{g^2 + g'^2} \left[2A_\mu A^\mu W_\nu^+ W_\nu^- - A^\mu A^\nu W_{\mu+} W_{\nu-} - A^\mu A^\nu W_{\mu-} W_{\nu+} \right] \\ & - \frac{i}{2} \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left[W^{\mu\nu} \left(A_\nu (W_\mu^- - W_\mu^+) - A_\mu (W_\nu^- - W_\nu^+) \right) + A^{\mu\nu} \left(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+ \right) \right] \\ & - \frac{i}{2} \frac{g^2}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \left[W^{\mu\nu} \left(Z_\nu (W_\mu^- - W_\mu^+) - Z_\mu (W_\nu^- - W_\nu^+) \right) + Z^{\mu\nu} \left(W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+ \right) \right] \\ & - \frac{1}{2} \frac{g^4}{g^2 + g'^2} \left[2Z_\mu Z^\mu W_\nu^+ W_\nu^- - Z^\mu Z^\nu W_{\mu+} W_\nu^- - Z^\mu Z^\nu W_{\mu-} W_\nu^+ \right] \\ & - \frac{g^3 g'^2}{g^2 + g'^2} \left[2A_\mu Z^\mu W_\nu^+ W_\nu^- - A_\mu Z^\nu W^{\mu+} W_\nu^- - A_\mu Z^\nu W^{-\mu} W_\nu^+ \right] \end{aligned} \quad (4.279)$$

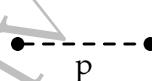
avec

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.280)$$

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \quad (4.281)$$

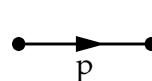
$$W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm \quad (4.282)$$

▷ Propagateur du Higgs :



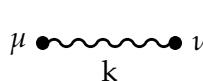
$$\frac{1}{p^2 - M_H^2 + i\lambda} \quad (4.283)$$

▷ Propagateur du fermion :



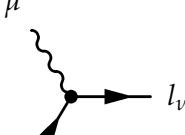
$$\frac{i}{p - m + i\lambda} \quad (4.284)$$

▷ Propagateur des bosons $V = W, Z$:



$$\frac{-i}{k^2 - M_V^2 + i\lambda} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{M_V^2} \right) \quad (4.285)$$

▷ Vertex lepton-neutrino-W :



$$-i \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (4.286)$$

▷ Vertex quark-up-quark-down-W (même génération) :

$$-i \frac{g}{\sqrt{2}} \cos(\theta_C) \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (4.287)$$

où θ_C est l'angle de Cabibo.

▷ Vertex quark-up-quark-down-W (différentes générations) :

$$\mp i \frac{g}{\sqrt{2}} \sin(\theta_C) \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (4.288)$$

▷ Vertex fermion-fermion-Z :

$$\frac{-ie}{\sin(\theta_W) \cos(\theta_W)} \gamma_\mu \left[a_L^f \frac{1 - \gamma_5}{2} + a_R^f \frac{1 + \gamma_5}{2} \right] \quad (4.289)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_L^f = -\frac{1}{2} + \sin^2(\theta_W) & a_R^f = \sin^2(\theta_W) \\ a_L^f = \frac{1}{2} & a_R^f = 0 \\ a_L^f = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2(\theta_W) & a_R^f = -\frac{2}{3} \sin^2(\theta_W) \\ a_L^f = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2(\theta_W) & a_R^f = \frac{1}{3} \sin^2(\theta_W) \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} \text{pour } f = e, \mu, \tau \\ \text{pour } f = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \\ \text{pour } f = u, c, t \\ \text{pour } f = d, s, b \end{array}$$

▷ Vertex fermion-fermion-Higgs :

$$- \frac{ie}{2 \sin(\theta_W)} \frac{m_f}{M_W} \quad (4.290)$$

▷ Vertex $W - W - A$:

$$ie [g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3 - k_1)_\nu] \quad (4.291)$$

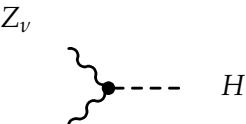
▷ Vertex $W - W - A - A$:

$$-ie^2 [g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}] \quad (4.292)$$

▷ Vertex $H - W - W$:

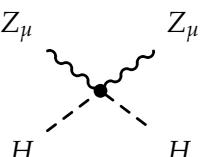
$$\frac{ie}{s_W} M_W g_{\mu\nu} \quad (4.293)$$

▷ Vertex $H - Z - Z$:



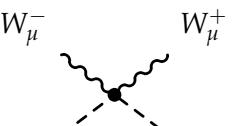
$$\frac{2ie}{\sin(2\theta_W)} M_Z g_{\mu\nu} \quad (4.294)$$

▷ Vertex $H - H - Z - Z$:



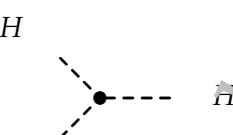
$$\frac{2ie^2}{\sin^2(2\theta_W)} g_{\mu\nu} \quad (4.295)$$

▷ Vertex $H - H - W - W$:



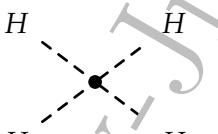
$$\frac{ie^2}{2s_W} g_{\mu\nu} \quad (4.296)$$

▷ Vertex $H - H - H$:



$$\frac{-3i\mu^2 e}{2M_W^2 c_W^2} \quad (4.297)$$

▷ Vertex $H - H - H - H$:



$$\frac{-3i\mu^2 e^2}{4M_W^2 s_W^2} \quad (4.298)$$

▷ Boson $V = W, Z$ entrant :



$$\epsilon_{\mu}^a(k) \quad (4.299)$$

▷ Boson $V = W, Z$ sortant :



$$\epsilon_{\mu}^{*a}(k) \quad (4.300)$$

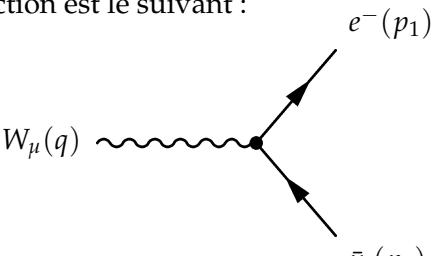
4.4 Calcul des processus à l'ordre de Born

4.4.1 Désintégration du boson W en leptons

Considérons la désintégration suivante :

$$W^-(q) \rightarrow e^-(p_1) + \bar{\nu}_e(p_2) \quad \text{avec} \quad q = p_1 + p_2 \quad (4.301)$$

Le diagramme décrivant cette réaction est le suivant :



$$(4.302)$$

L'amplitude associée à ce diagramme est,

$$M = -i \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{u}(p_1) \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) v(p_2) \epsilon_{\mu}(q) \quad (4.303)$$

Son complexe conjugué est,

$$\bar{M} = i \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{v}(p_2)(1 + \gamma_5) \gamma^{\mu'} u(p_1) \epsilon_{\mu'}^*(q) \quad (4.304)$$

Rappelons que,

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(q) \epsilon_{\nu}^{*(\lambda)}(q) = -g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{M_W^2} \quad (4.305)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins et polarisations est,

$$\begin{aligned} \sum |M|^2 &= \frac{1}{3} \frac{g^2}{8} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \not{p}_2 (1 + \gamma_5) \gamma^{\mu'}] \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{M_W^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{g^2}{8} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5)^2 \not{p}_2 \gamma^{\mu'}] \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{M_W^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{g^2}{4} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \not{p}_2 \gamma^{\mu'}] \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{M_W^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{g^2}{4} (\text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\mu} \not{p}_2 \gamma^{\mu'}] - \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\mu} \gamma_5 \not{p}_2 \gamma^{\mu'}]) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{M_W^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{g^2}{4} (\text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^{\mu} \not{p}_2 \gamma^{\mu'}] - \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^{\mu} \gamma_5 \not{p}_2 \gamma^{\mu'}]) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{M_W^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{g^2}{4} (\text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^{\mu} \not{p}_2 \gamma^{\mu'}] - \text{Tr}[\gamma_5 \not{p}_2 \gamma^{\mu'} \not{p}_1 \gamma^{\mu}]) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{M_W^2} \right) \end{aligned} \quad (4.306)$$

on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_5 \not{p}_2 \gamma^{\mu'} \not{p}_1 \gamma^{\mu}] \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{M_W^2} \right) &= 4i \epsilon^{\not{p}_2 \gamma^{\mu'} \not{p}_1 \gamma^{\mu}} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{M_W^2} \right) \\ &= 0 \text{ (tenseur symétrique fois tenseur anti-symétrique)} \end{aligned} \quad (4.307)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum |M|^2 &= \frac{1}{3} \frac{g^2}{4} \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^{\mu} \not{p}_2 \gamma^{\mu'}] \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{M_W^2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{g^2}{4} \left\{ -\text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^{\mu} \not{p}_2 \gamma^{\mu}] + \text{Tr}[\not{p}_1 \not{q} \not{p}_2 \not{q}] / M_W^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.308)$$

Les traces sont données par :

$$\text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^{\mu} \not{p}_2 \gamma^{\mu}] = -8 \not{p}_1 \cdot \not{p}_2 \quad (4.309)$$

$$\text{Tr}[\not{p}_1 \not{q} \not{p}_2 \not{q}] = 4m_e^2 \not{p}_1 \cdot \not{p}_2 \quad (4.310)$$

mais

$$\begin{aligned} \not{p}_1 \cdot \not{p}_2 &= [(p_1 + p_2)^2 - m_e^2] / 2 \\ &= [q^2 - m_e^2] / 2 \\ &= [M_W^2 - m_e^2] / 2 \end{aligned} \quad (4.311)$$

Alors,

$$\sum |M|^2 = \frac{g^2}{3} \left[M_W^2 - \frac{1}{2} m_e^2 - \frac{1}{2} \frac{m_e^4}{M_W^2} \right] \quad (4.312)$$

On calcule, maintenant, le taux de désintégration, on a

$$\Gamma = \frac{1}{2M_W} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_1 - p_2) \sum |M|^2 \quad (4.313)$$

on utilise

$$\int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1} = \int d^4 p_1 \delta^+(p_1^2 - m_e^2) \quad (4.314)$$

alors,

$$\Gamma = \frac{1}{2M_W} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2} d^4 p_1 \delta^+(p_1^2 - m_e^2) \delta^4(q - p_1 - p_2) \sum |M|^2 \quad (4.315)$$

Grâce à la fonction $\delta^4(q - p_1 - p_2)$, on peut intégrer facilement sur le 4-vecteur p_1 , on obtient donc,

$$\Gamma = \frac{1}{2M_W} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2} \delta^+[(q - p_2)^2 - m_e^2] \sum |M|^2 \quad (4.316)$$

On se place dans le référentiel du W et on suppose que e et $\bar{\nu}_e$ se déplacent suivant l'axe \vec{z} , alors

$$q = \begin{pmatrix} M_W \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \\ 0 \\ -p_z \end{pmatrix} \quad (4.317)$$

$$q^2 = M_W^2 \quad p_1^2 = m_e^2 \quad p_2^2 = 0 \quad (4.318)$$

$$\begin{aligned} \delta^+[(q - p_2)^2 - m_e^2] &= \delta^+[(M_W^2 - m_e^2) - 2q \cdot p_2 - m_e^2] \\ &= \delta^+[(M_W^2 - m_e^2) - 2M_W E_2] \\ &= \delta^+[(M_W^2 - m_e^2) - 2M_W p_z] \\ &= \delta[p_z - (M_W^2 - m_e^2)/(2M_W)]/(2M_W) \end{aligned} \quad (4.319)$$

Dans les coordonnées sphériques, on a

$$\int \frac{d^2 \vec{p}_2}{2E_2} = \int_0^{+\infty} p_z dp_z \int_0^{+\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (4.320)$$

alors,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{16\pi M_W^2} \int p_z dp_z \int_0^{+\pi} \sin(\theta) d\theta \delta[p_z - (M_W^2 - m_e^2)/(2M_W)] \sum |M|^2 \\ &= \frac{1}{3\pi M_W^2} \int p_z dp_z \delta[p_z - (M_W^2 - m_e^2)/(2M_W)] \sum |M|^2 \\ &= \frac{1}{3\pi M_W^2} \frac{M_W^2 - m_e^2}{2M_W} \sum |M|^2 \\ &= \frac{g^2}{48\pi M_W} \frac{\sqrt{\lambda(M_W^2, m_e^2, 0)}}{M_W^2} \left[M_W^2 - \frac{1}{2} m_e^2 - \frac{1}{2} \frac{m_e^4}{M_W^2} \right] \end{aligned} \quad (4.321)$$

avec

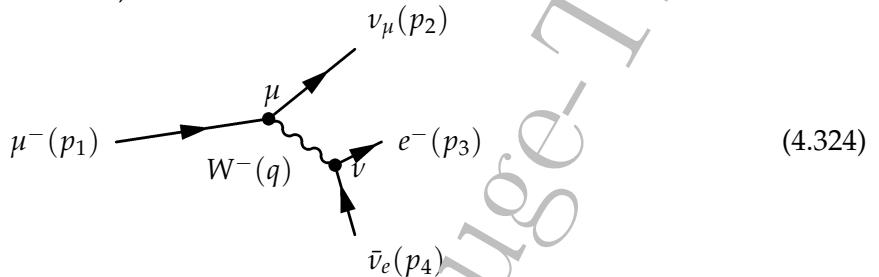
$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \quad (4.322)$$

4.4.2 Désintégration du muon en leptons

Considérons la réaction,

$$\mu^-(p_1) \rightarrow \nu_\mu(p_2) + e^-(p_3) + \bar{\nu}_e(p_4) \quad (4.323)$$

Le diagramme décrivant cette réaction est,



L'amplitude associé à ce diagramme est,

$$\begin{aligned} M &= \frac{ig^2}{8} \frac{1}{q^2 - M_W^2} \bar{u}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) v(p_4) \left[g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2} \right] \\ &= \frac{ig^2}{8} \frac{1}{q^2 - M_W^2} \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(p_4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{M_W^2} \bar{u}(p_2) \not{q} (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \not{q} (1 - \gamma_5) v(p_4) \right\} \end{aligned} \quad (4.325)$$

avec

$$q = p_1 - p_2 = p_3 + p_4 \quad (4.326)$$

on peut simplifier M en utilisant les relations suivantes (pour $p^2 = m^2$) :

$$\not{p} u(p) = m \quad (4.327)$$

$$\bar{u}(p) \not{p} = m \quad (4.328)$$

alors,

$$\bar{u}(p_2) (\not{p}_1 - \not{p}_2) (1 - \gamma_5) u(p_1) = m_\mu \bar{u}(p_2) (1 + \gamma_5) u(p_1) \quad (4.329)$$

$$\bar{u}(p_3) (\not{p}_3 + \not{p}_4) (1 - \gamma_5) v(p_4) = m_e \bar{u}(p_3) (1 - \gamma_5) v(p_4) \quad (4.330)$$

Donc, l'amplitude devient

$$\begin{aligned} M &= \frac{ig^2}{8} \frac{1}{q^2 - M_W^2} \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(p_4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_\mu m_e}{M_W^2} \bar{u}(p_2) (1 + \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) (1 - \gamma_5) v(p_4) \right\} \end{aligned} \quad (4.331)$$

Le complexe conjugué est,

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{-ig^2}{8} \frac{1}{q^2 - M_W^2} \left\{ \bar{u}(p_1) (1 + \gamma_5) \gamma^\mu u(p_2) \bar{v}(p_4) (1 + \gamma_5) \gamma_\mu v(p_3) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_\mu m_e}{M_W^2} \bar{u}(p_1) (1 - \gamma_5) u(p_2) \bar{v}(p_4) (1 + \gamma_5) u(p_3) \right\} \end{aligned} \quad (4.332)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spin est,

$$\begin{aligned} \sum|M|^2 = & \frac{g^4}{64} \frac{1}{2} \frac{1}{(q^2 - M_W^2)^2} \left\{ \text{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\not{p}_1 + m_\mu) (1 + \gamma_5) \gamma^{\mu'}] \right. \\ & \times \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_4 (1 + \gamma_5) \gamma_{\mu'}] \\ & - \frac{m_\mu m_e}{M_W^2} \text{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (\not{p}_1 + m_\mu) (1 - \gamma_5)] \\ & - \frac{m_\mu m_e}{M_W^2} \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_4 (1 + \gamma_5)] \\ & + \frac{m_\mu^2 m_e^2}{M_W^4} \text{Tr}[\not{p}_2 (1 + \gamma_5) (\not{p}_1 + m_\mu) (1 - \gamma_5)] \\ & \left. + \frac{m_\mu^2 m_e^2}{M_W^4} \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e) (1 - \gamma_5) \not{p}_4 (1 + \gamma_5)] \right\} \end{aligned} \quad (4.333)$$

Montrer que

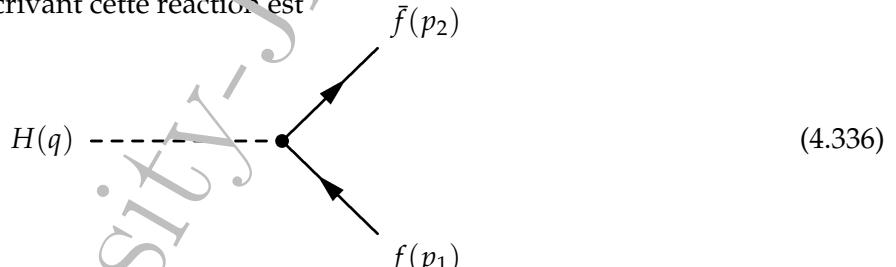
$$\sum|M|^2 = \frac{g^4}{2} \frac{1}{(q^2 - M_W^2)^2} \left[4p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 + \frac{m_\mu^2 m_e^2}{M_W^4} (p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4 - 2M_W^2 p_2 \cdot p_4) \right] \quad (4.334)$$

4.4.3 Processus : $h \rightarrow f + \bar{f}$

Considérons la réaction suivante :

$$H(q) \rightarrow f(p_1) + \bar{f}(p_2) \quad (4.335)$$

Le diagramme de Feynman décrivant cette réaction est



L'amplitude et son complexe conjugué associés à ce diagramme :

$$M = -i \frac{g}{2} \frac{m_f}{M_W} \bar{u}(p_1) v(p_2) \quad (4.337)$$

$$\bar{M} = i \frac{g}{2} \frac{m_f}{M_W} \bar{v}(p_2) u(p_1) \quad (4.338)$$

$$(4.339)$$

Le carré de l'amplitude sommé sur les spins est,

$$\begin{aligned} \sum|M|^2 &= \frac{g^2}{4} \frac{m_f^2}{M_W^2} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_f)(\not{p}_2 - m_f)] \\ &= g^2 \frac{m_f^2}{M_W^2} (p_1 \cdot p_2 - m_f^2) \\ &= \frac{g^2}{2} \frac{m_f^2}{M_W^2} (m_H^2 - 4m_f^2) \end{aligned} \quad (4.340)$$

La forme générale du taux de désintégration pour la réaction $A(m_A) \rightarrow B(m_B) + C(m_C)$ est

$$\Gamma(A \rightarrow B + C) = \frac{\sqrt{\lambda(1, m_B^2/m_A^2, m_C^2/m_A^2)}}{16\pi m_A} \sum|M|^2 \quad (4.341)$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Gamma(H \rightarrow f + \bar{f}) &= \frac{\sqrt{\lambda \left(1, \frac{m_f^2}{m_H^2}, \frac{m_f^2}{m_H^2}\right)}}{16\pi m_H} \times \frac{g^2}{2} \frac{m_f^2}{M_W^2} \left(m_H^2 - 4m_f^2\right) \\ &= \frac{g^2}{32\pi} \frac{m_f^2 m_H}{M_W^2} \left(1 - 4 \frac{m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2} \equiv \frac{m_f^2 m_H}{8\pi v^2} \left(1 - 4 \frac{m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2}\end{aligned}\quad (4.342)$$

où $v = 2M_W/g$.

Remarque : si les fermions sont des quarks, alors

$$\begin{aligned}M &= -i \frac{g}{2} \frac{m_f}{M_W} \bar{u}_i(p_1) v_j(p_2) \delta_{ij} \\ &= -i \frac{g}{2} \frac{m_f}{M_W} \bar{u}_i(p_1) v_i(p_2)\end{aligned}\quad (4.343)$$

où i et j sont les indices de couleur des quarks et la fonction δ_{ij} assure la conservation de couleur. Le carré de l'amplitude s'écrit donc,

$$\begin{aligned}\sum |M|^2 &= \frac{g^2}{4} \frac{m_f^2}{M_W^2} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_f)(\not{p}_2 - m_f)] \delta_{ii'} \delta_{ii'} \\ &= \frac{g^2}{4} \frac{m_f^2}{M_W^2} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_f)(\not{p}_2 - m_f)] \delta_{ii} \\ &= \frac{g^2}{4} \frac{m_f^2}{M_W^2} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_f)(\not{p}_2 - m_f)] N_c\end{aligned}\quad (4.344)$$

Donc, on peut déduire la taux de désintégration de l'équation (4.342) juste en la multipliant par $N_c = 3$. On écrit,

$$\Gamma(H \rightarrow q + \bar{q}) = \frac{N_c}{8\pi} \frac{m_f^2 m_H}{v^2} \left(1 - 4 \frac{m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2}\quad (4.345)$$

4.4.4 Processus : $\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow Z + Z$

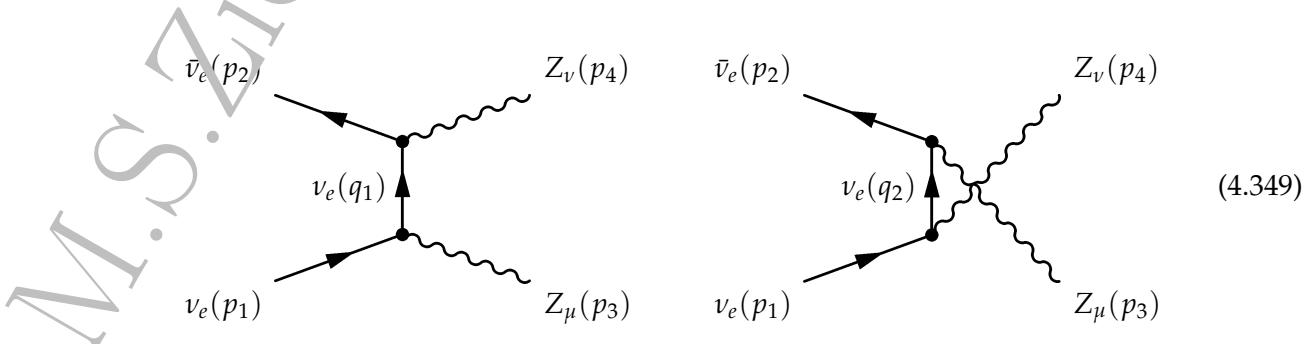
On calcule le carré de l'amplitude et la section efficace de la production d'une paire de bosons Z dans la diffusion neutrino-anti-neutrino dans les cas suivants : les bosons Z sont (i) transverses, (ii) longitudinaux et (iii) non-polarisés. Donc, on considère les 3 réactions suivantes :

$$\nu_e(p_1) + \bar{\nu}_e(p_2) \rightarrow Z_L(p_3) + Z_L(p_4). \quad (4.346)$$

$$\nu_e(p_1) + \bar{\nu}_e(p_2) \rightarrow Z_T(p_3) + Z_T(p_4). \quad (4.347)$$

$$\nu_e(p_1) + \bar{\nu}_e(p_2) \rightarrow Z(p_3) + Z(p_4). \quad (4.348)$$

où Z_L et Z_T désignent, respectivement, un boson Z polarisé longitudinalement et transversalement. Les diagrammes de Feynman dérivants ces réactions sont les suivants :



avec $q_1 = p_1 - p_3$ et $q_2 = p_1 - p_4$.

Les amplitudes associées à ces deux graphes sont les suivantes :

$$M_1 = -i \frac{g^2}{16c_W(q_1^2 - m_{\nu_e}^2)} \bar{v}(p_2) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) (q_1 + m_{\nu_e}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \varepsilon_\mu^*(p_3) \varepsilon_\nu^*(p_4) \quad (4.350)$$

$$M_2 = -i \frac{g^2}{16c_W(q_2^2 - m_{\nu_e}^2)} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (q_2 + m_{\nu_e}) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(p_1) \varepsilon_\mu^*(p_3) \varepsilon_\nu^*(p_4) \quad (4.351)$$

On utilise la relation de commutation $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ et $(\gamma_5)^2 = 1$ pour montrer que :

$$m_{\nu_e} (1 - \gamma_5) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) = m_{\nu_e} (1 - \gamma_5) (1 + \gamma_5) \gamma^\mu \equiv 0 \quad (4.352)$$

$$(1 - \gamma_5) q_1 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) = (1 - \gamma_5) q_1 (1 + \gamma_5) \gamma^\mu = (1 - \gamma_5)^2 q_1 \gamma^\mu = 2(1 - \gamma_5) q_1 \gamma^\mu \quad (4.353)$$

Donc, les amplitudes deviennent :

$$M_1 = -i \frac{g^2}{8c_W(q_1^2 - m_{\nu_e}^2)} \bar{v}(p_2) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) q_1 \gamma^\mu u(p_1) \varepsilon_\mu^*(p_3) \varepsilon_\nu^*(p_4) \quad (4.354)$$

$$M_2 = -i \frac{g^2}{8c_W(q_2^2 - m_{\nu_e}^2)} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) q_2 \gamma^\nu u(p_1) \varepsilon_\mu^*(p_3) \varepsilon_\nu^*(p_4) \quad (4.355)$$

Les complexes conjugués associés à ces amplitudes sont donnés par,

$$\bar{M}_1 = i \frac{g^2}{8c_W(q_1^2 - m_{\nu_e}^2)} \bar{u}(p_1) \gamma^{\mu'} q_1 (1 - \gamma_5) \gamma^{\nu'} v(p_2) \varepsilon_{\mu'}(p_3) \varepsilon_{\nu'}(p_4) \quad (4.356)$$

$$\bar{M}_2 = i \frac{g^2}{8c_W(q_2^2 - m_{\nu_e}^2)} \bar{u}(p_1) \gamma^{\nu'} q_2 (1 + \gamma_5) \gamma^{\mu'} v(p_2) \varepsilon_{\mu'}(p_3) \varepsilon_{\nu'}(p_4) \quad (4.357)$$

Le carré de l'amplitude sommé et moyenné sur les spins et polarisations est

$$\sum |M| = \sum |M_1 + M_2| \equiv \frac{1}{4} [\sum |M_1|^2 + \sum |M_2|^2 + 2\text{Re} \sum M_1 \bar{M}_2] \quad (4.358)$$

avec

$$\sum |M_1|^2 = \frac{g^4}{64c_W^2 (t - m_{\nu_e}^2)^2} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \not{q}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\mu'} \not{q}_1 (1 + \gamma_5) \gamma^{\nu'}] \\ \times \sum_{\lambda_3=1}^3 \varepsilon_\mu^{*(\lambda_3)}(p_3) \varepsilon_{\mu'}^{(\lambda_3)}(p_3) \sum_{\lambda_4=1}^3 \varepsilon_\nu^{*(\lambda_4)}(p_4) \varepsilon_{\nu'}^{(\lambda_4)}(p_4) \quad (4.359)$$

$$\sum |M_2|^2 = \frac{g^4}{64c_W^2 (u - m_{\nu_e}^2)^2} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{q}_2 \gamma^\nu \not{p}_1 \gamma^{\nu'} \not{q}_2 (1 + \gamma_5) \gamma^{\mu'}] \\ \times \sum_{\lambda_3=1}^3 \varepsilon_\mu^{*(\lambda_3)}(p_3) \varepsilon_{\mu'}^{(\lambda_3)}(p_3) \sum_{\lambda_4=1}^3 \varepsilon_\nu^{*(\lambda_4)}(p_4) \varepsilon_{\nu'}^{(\lambda_4)}(p_4) \quad (4.360)$$

$$2\text{Re} \sum M_1 \bar{M}_2 = \frac{g^4}{32c_W^2 (t - m_{\nu_e}^2) (u - m_{\nu_e}^2)} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \not{q}_1 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^{\nu'} \not{q}_2 (1 + \gamma_5) \gamma^{\mu'}] \\ \times \sum_{\lambda_3=1}^3 \varepsilon_\mu^{*(\lambda_3)}(p_3) \varepsilon_{\mu'}^{(\lambda_3)}(p_3) \sum_{\lambda_4=1}^3 \varepsilon_\nu^{*(\lambda_4)}(p_4) \varepsilon_{\nu'}^{(\lambda_4)}(p_4) \quad (4.361)$$

On rappelle que un boson de jauge massif ($V = W, Z$) possède 3 polarisations. Deux polarisations transverses dont le vecteur de polarisation vérifie

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\mu^{*(\lambda)}(k) = -g_{\mu\nu} \quad (4.362)$$

et une polarisation longitudinale correspond à $\lambda = 3$, avec

$$\varepsilon_\mu^{(3)}(k) = \frac{k_\mu}{m_V}, \quad \varepsilon_\mu^{(3)}(k) \varepsilon_\nu^{*(3)}(k) = \frac{k_\mu k_\nu}{m_V^2} \quad (4.363)$$

On suppose que $m_{\nu_e} = 0$, on obtient :

$$\sum |M_1|^2 = \begin{cases} \frac{g^4(tu - M_W^4)}{4c_W^2 t^2} & \text{pour } \nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow Z_T + Z_T \\ \frac{g^4(tu - M_W^4)}{16c_W^2 M_W^4} & \text{pour } \nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow Z_L + Z_L \\ \frac{g^4(-4M_W^8 + M_W^4 t(7t+4u) - 4M_W^2 t^2(t+u) + t^3 u)}{16c_W^2 M_W^4 t^2} & \text{pour } \nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow Z + Z \end{cases} \quad (4.364)$$

et

$$\sum |M_2|^2 = \begin{cases} \frac{g^4(tu - M_W^4)}{4c_W^2 u^2} & \text{pour } \nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow Z_T + Z_T \\ \frac{g^4(tu - M_W^4)}{16c_W^2 M_W^4} & \text{pour } \nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow Z_L + Z_L \\ \frac{g^4(-4M_W^8 + M_W^4 u(4t+7u) - 4M_W^2 u^2(t+u) + tu^3)}{16c_W^2 M_W^4 u^2} & \text{pour } \nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow Z + Z \end{cases} \quad (4.365)$$

et

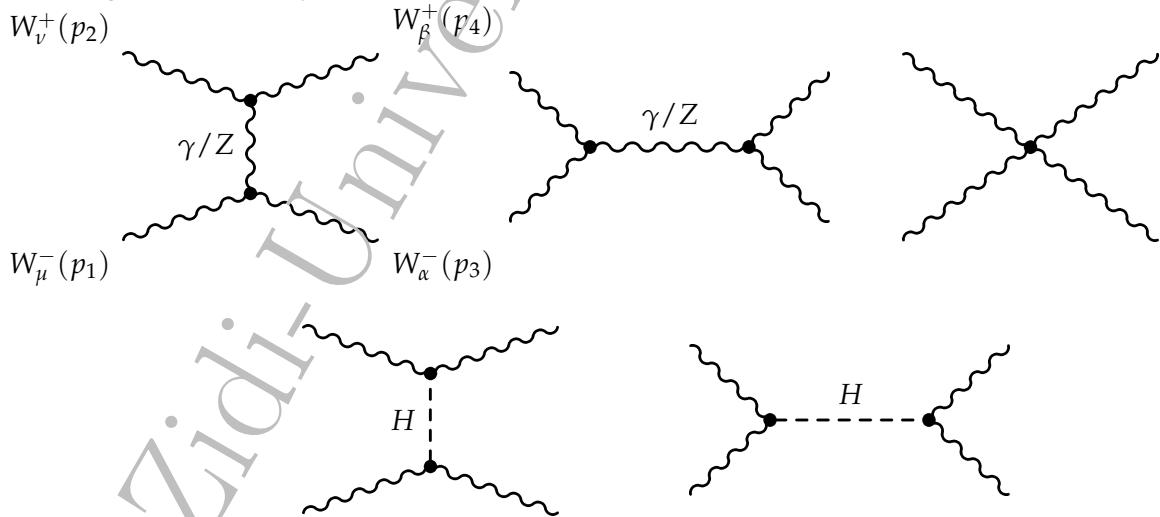
$$2\text{Re} \sum M_1 \bar{M}_2 = \begin{cases} \frac{-g^4 M_W^2 (t+u-2M_W^2)}{c_W^2 tu} & \text{pour } \nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow Z_T + Z_T \\ \frac{g^4 (M_W^4 - tu)}{8c_W^2 M_W^4} & \text{pour } \nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow Z_L + Z_L \\ \frac{g^4 (16M_W^8 - 8M_W^6 (t+u) - 7M_W^4 tu + 4M_W^2 u(t+u) - t^2 u^2)}{8c_W^2 M_W^4 tu} & \text{pour } \nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow Z + Z \end{cases} \quad (4.366)$$

4.4.5 Diffusion de bosons de jauge $VV \rightarrow VV$ est le rôle du boson Higgs

Le but de cette sous-section est de montrer le rôle du boson Higgs pour restaurer l'unitarité de l'amplitude de diffusion de deux bosons de jauge. Considérons la réaction suivante par exemple :

$$W^-(p_1) + W^+(p_2) \rightarrow W^-(p_3) + W^+(p_4). \quad (4.367)$$

Les 7 diagrammes de Feynman contribuant décrivant cette réaction sont les suivants :



La validité du développement perturbatif exige que l'amplitude d'onde partielle pour $J = 0$ soit plus petite que l'unité, c'est-à-dire $|a_0| < 1$. Cette dernière à haute énergie ($\sqrt{s} \gg m_i$) s'écrit :

$$a_0 = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{+1} d\cos(\theta), M(\sqrt{s}, \cos(\theta), \{m_i\})$$

où M est l'amplitude de diffusion pour une hélicité et une polarisation fixes à l'ordre de l'arbre, θ est l'angle polaire (entre \vec{p}_1 et \vec{p}_3) dans le référentiel de centre de masse et $\{m_i\}$ désigne les masses impliquées dans l'amplitude.

A très haute énergie ($\sqrt{s} \gg m_i$), on peut négliger les polarisations transverses des bosons de jauge et considérer que la polarisation longitudinale². Donc, le processus qu'on doit calculer est :

$$W_L^-(p_1) + W_L^+(p_2) \rightarrow W_L^-(p_3) + W_L^+(p_4). \quad (4.368)$$

où W_L désigne le boson W polarisé longitudinalement. On rappelle que $\epsilon_L^\mu(k) = k^\mu / m_V$.

On note que pour cette réaction, les contributions de $J = 0, 1, 2$ ne peuvent être différencier. Par conséquent, il est nécessaire de conserver la partie transverse (avec $g_{\mu\nu}$) des propagateurs des bosons de jauge. Par conséquent, dans ce calcul, le propagateur complet est conservé, y compris la contribution des diagrammes avec échange d'un photon. La compensation entre les différentes contributions se fait naturellement.

Le propagateur interne du boson Z est remplacé par

$$\frac{-ig_{\mu\nu} + ik_\mu k_\nu / m_Z^2}{(k^2 - m_Z^2 + i\lambda)}. \quad (4.369)$$

Les amplitudes des 2 diagrammes, obtenus par l'échange du boson Z , sont données par :

$$\begin{aligned} iM_1 &= e^2 \frac{c_W^2}{s_W^2} \frac{p_1^\mu p_2^\nu p_3^\alpha p_4^\beta}{m_W^4} \frac{-g_{\lambda\rho} + q_1^\lambda q_1^\rho / m_Z^2}{(t - m_Z^2)} V_{u\alpha\lambda}^{WWZ}(p_1, -p_3, -q_1) V_{v\beta\rho}^{WWZ}(p_2, -p_1, q_1) \\ &= -\frac{e^2 t(s-u)}{4 m_W^4} - \frac{e^2 m_Z^2 t(s-u)}{4 m_W^4 (t - m_Z^2)} + \frac{e^2 t(s-u)}{4 m_W^4 s_W^2} + \frac{e^2 m_Z^2 t(s-u)}{4 m_W^4 (t - m_Z^2) s_W^2} \end{aligned} \quad (4.370)$$

$$\begin{aligned} iM_2 &= e^2 \frac{c_W^2}{s_W^2} \frac{p_1^\mu p_2^\nu p_3^\alpha p_4^\beta}{m_W^4} \frac{-g_{\lambda\rho} + q_2^\lambda q_2^\rho / m_Z^2}{(s - m_Z^2)} V_{\mu\nu\lambda}^{WWZ}(p_1, p_2, -q_2) V_{\alpha\beta\rho}^{WWZ}(-p_3, -p_4, q_2) \\ &= -\frac{e^2 s(t-u)}{4 m_W^4} - \frac{e^2 m_Z^2 s(t-u)}{4 m_W^4 (s - m_Z^2)} + \frac{e^2 s(t-u)}{4 m_W^4 s_W^2} + \frac{e^2 m_Z^2 s(t-u)}{4 m_W^4 (s - m_Z^2) s_W^2} \end{aligned} \quad (4.371)$$

où $q_1 = p_1 - p_3$ et $q_2 = p_1 + p_2$ et

$$V_{\alpha\beta\rho}^{WWZ}(k_1, k_2, k_3) = g_{\alpha\beta}(k_{1\rho} - k_{2\rho}) + g_{\beta\rho}(k_{2\alpha} - k_{3\alpha}) + g_{\rho\alpha}(k_{3\beta} - k_{1\beta}) \quad (4.372)$$

Les amplitudes des 2 diagrammes, obtenus par l'échange du photon, sont données par :

$$\begin{aligned} iM_3 &= -e^2 \frac{p_1^\mu p_2^\nu p_3^\alpha p_4^\beta}{m_W^4} \frac{g_{\lambda\rho}}{(t - m_Z^2)} V_{u\alpha\lambda}^{WWZ}(p_1, -p_3, -q_1) V_{v\beta\rho}^{WWZ}(p_2, -p_1, q_1) \\ &= \frac{e^2 t(s-u)}{4 m_W^4} \end{aligned} \quad (4.373)$$

$$\begin{aligned} iM_4 &= -e^2 \frac{p_1^\mu p_2^\nu p_3^\alpha p_4^\beta}{m_W^4} \frac{g_{\lambda\rho}}{(s - m_Z^2)} V_{\mu\nu\lambda}^{WWZ}(p_1, p_2, -q_2) V_{\alpha\beta\rho}^{WWZ}(-p_3, -p_4, q_2) \\ &= \frac{e^2 s(t-u)}{4 m_W^4} \end{aligned} \quad (4.374)$$

2. D'après le théorème de Goldstone, les bosons de jauge se comportent comme les bosons de Goldstone à haute énergie (qui sont responsables de leurs composantes longitudinales).

L'amplitude associé au diagramme avec vertex quartique (4-W) est

$$\begin{aligned}
 iM_5 &= -\frac{e^2}{s_W^2} \frac{p_1^\mu p_2^\nu p_3^\alpha p_4^\beta}{m_W^4} (2g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}g_{\alpha\mu} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}) \\
 &\quad - \frac{e^2}{s_W^2 m_W^4} (2p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 - p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 - p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4) \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{e^2}{s_W^2 m_W^4} [2u^2 - s^2 - t^2 - 4m_W^2(2u - s - t)] \\
 &= -\frac{e^2}{4} \frac{(4m_W^2 - t - u)(t - u)}{m_W^4 s_W^2} - \frac{e^2}{4} \frac{(4m_W^2 - s - u)(s - u)}{m_W^4 s_W^2} \\
 &\equiv -\frac{e^2 s(t - u)}{4 m_W^4 s_W^2} - \frac{e^2 t(s - u)}{4 m_W^4 s_W^2}
 \end{aligned} \tag{4.375}$$

Les amplitudes M_3 , M_4 et M_5 se compensent avec les termes d'ordre $1/M_W^2$ de M_1 et M_2 , donc la somme de ces 5 amplitudes se réduit à :

$$iM_{12345} \equiv i(M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5) = \frac{1}{4} \frac{e^2}{s_W^2} \frac{t(s - u)}{m_W^2(t - m_Z^2)} + \frac{1}{4} \frac{e^2}{s_W^2} \frac{s(t - u)}{m_W^2(s - m_Z^2)} \tag{4.376}$$

On note que pour exprimer les amplitudes sous les formes précédentes, on a utilisé les relation suivante :

$$s_W^2 + c_W^2 = 1, \quad s + t + u = 4m_W^2, \quad m_W^2/m_Z^2 = c_W^2. \tag{4.377}$$

Les amplitudes associées aux diagrammes, obtenu par l'échange du Higgs, sont données par :

$$iM_6 = \frac{e^2}{s_W^2 m_H^2} \frac{p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4}{t - m_H^2} \equiv \frac{1}{4} \frac{e^2}{s_W^2} \frac{1}{m_H^2} \frac{(t - 2m_W^2)^2}{t - m_H^2} \tag{4.378}$$

$$iM_7 = \frac{e^2}{s_W^2 m_H^2} \frac{p_1 \cdot p_2 p_3 \cdot p_4}{s - m_H^2} \equiv \frac{1}{4} \frac{e^2}{s_W^2} \frac{1}{m_H^2} \frac{(s - 2m_W^2)^2}{s - m_H^2} \tag{4.379}$$

Dans le référentiel du centre de masse, les variables de MandelStam t et u sont données par :

$$\begin{aligned}
 t &= -\frac{s}{2} \beta_w^2 [1 - \cos(\theta)] \\
 u &= -\frac{s}{2} \beta_w^2 [1 + \cos(\theta)]
 \end{aligned} \tag{4.380}$$

où $\beta_w^2 = 1 - 4m_W^2/s$.

Exercice :

(1) Montrer qu'à haute énergie ($\sqrt{s} \gg m_H^2$), l'amplitude totale s'écrit :

$$M = \sqrt{2} G_F m_H^2 \left(\frac{s}{s - m_H^2} + \frac{t}{t - m_H^2} \right). \tag{4.381}$$

(2) Montrer que dans cette région, $|a_0|$ est donné par :

$$|a_0| \rightarrow \frac{e^2}{32 \pi s_W^2} \frac{m_H^2}{m_W^2} \equiv \frac{G_F m_H^2}{4 \pi \sqrt{2}} \leq 1 \tag{4.382}$$

où G_F est la constante de couplage de Fermi, qui vérifie :

$$\sqrt{2} G_F = v^{-2} = \frac{g^2}{4m_W^2} = \frac{e^2}{4m_W^2 s_W^2}, \quad \text{avec} \quad e = g s_W. \tag{4.383}$$

L'équation (4.382) impose la limite supérieure suivante sur la masse de Higgs,

$$m_H^2 \leq \frac{4\pi\sqrt{2}}{G_F} \equiv (1234.36 \text{ GeV})^2. \quad (4.384)$$

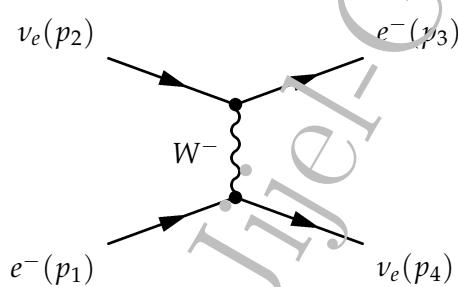
où $G_F = 1.16639 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.

4.4.6 Modèle de Fermi comme limite du modèle standard

Dans cette sous-section, on montre que le modèle standard et la théorie de Fermi donnent les mêmes résultats à basse énergie. Considérons la diffusion élastique suivante :

$$e^-(p_1) + \nu_e(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + \nu_e(p_4). \quad (4.385)$$

Le diagramme de Feynman décrivant cette réaction à courant chargé est le suivant :



L'amplitude associé à ce diagramme est :

$$\begin{aligned} M &= -\frac{g^2}{2} \overbrace{\left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_2) \right]}^{\equiv J^{-\mu}} \frac{i(-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m_W^2)}{k^2 - m_W^2 + i\lambda} \overbrace{\left[\bar{u}(p_4) \gamma^\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) \right]}^{\equiv J^{+\nu}} \\ &= -\frac{g^2}{2} J^{-\mu} \frac{i(-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m_W^2)}{k^2 - m_W^2 + i\lambda} J^{+\nu}. \end{aligned} \quad (4.386)$$

où $k = p_1 - p_4$. Dans la limite $k^2 / m_W^2 \rightarrow 0$ (basse énergie), le propagateur interne du boson W se réduit à $\frac{ig_{\mu\nu}}{m_W^2}$. Donc, cette amplitude s'écrit sous la forme :

$$M = -i \frac{g^2}{2m_W^2} J^{-\mu} J_\mu^+ \equiv -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} 4 J^{-\mu} J_\mu^+. \quad (4.387)$$

On peut obtenir le même amplitude (4.387) de la densité lagrangienne effective suivante :

$$\mathcal{L}_{CC}^{\text{Fermi}} = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} J^{-\mu} J_\mu^+. \quad (4.388)$$

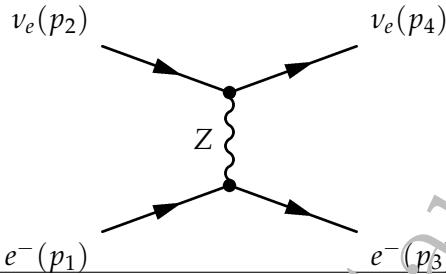
Cette densité lagrangienne est de type Fermi, elle est obtenue à partir du modèle standard après avoir intégré le boson de jauge.

Exercice : Densité lagrangienne effective à courant neutre

Utiliser l'amplitude à courant neutre (échange du boson Z) de la réaction $e^-(p_1) + \nu_e(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + \nu_e(p_4)$, voir le diagramme de Feynman ci-dessous, pour montrer qu'on peut obtenir cette amplitude à l'aide de la densité lagrangienne effective suivante :

$$\mathcal{L}_{NC}^{\text{eff}} = -\frac{4G_N}{\sqrt{2}} J^{0\mu} J_\mu^0. \quad (4.389)$$

avec $G_N/\sqrt{2} = g^2/(8m_Z^2 c_W^2)$ et $J^{0\mu}$ est un courant neutre à déterminer.



4.5 Exercices et problèmes

Section efficace et taux de désintégration

La section efficace de la réaction $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$ est définie par

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \sum |M|^2 \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \dots \frac{d^3 \vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 + \dots + p_n - p_1 - p_2) \quad (4.390)$$

où p_i est l'impulsion de la particule i et M est l'amplitude de la réaction.

Le taux de désintégration d'une particule de masse m_1 et d'impulsion p_1 : $1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + n$ est défini par

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_1} |M|^2 \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \dots \frac{d^3 \vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + p_3 + \dots + p_n - p_1) \quad (4.391)$$

notons que

$$\int \frac{d^3 \vec{p}_n}{2E_n} = \int d^4 p_n \delta^+(p_n^2 - m_n^2) \quad (4.392)$$

Questions de Cours

- (1) Décrire le modèle de Fermi
- (2) Décrire le modèle de Fermi amélioré
- (3) Pourquoi l'interaction par courant chargé est de nature V-A ?
- (4) Discuter le *puzzel* du méson θ
- (5) Définir le mécanisme de Goldstone pour les modèles $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(2) \times U(1)$
- (6) Définir le mécanisme de Higgs pour les modèles $U(1)$, $SU(2)$ et $SU(2) \times U(1)$
- (7) Pourquoi on a besoin de la jauge unitaire ?
- (8) Extraire les masses des bosons de jauge et des fermions.
- (9) Généraliser le modèle GWS pour les 3 générations de leptons
- (10) Comment inclure les quarks dans le modèle GWS

Exercices

Exercice 1 : Modèle de Fermi

- (1) Calculer, dans le modèle de Fermi, le carré de l'amplitude de la réaction :

$$\nu_e(p_1) + d(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + u(p_4). \quad (4.393)$$

- (2) Calculer la section efficace, et montrer qu'elle viole l'unitarité.

Exercice 2 : Réaction $\nu_e(p_1) + d(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + u(p_4)$ **avec l'échange d'un W**

Calculer le carré de cette réaction et la section efficace, et montrer qu'elle ne viole pas l'unitarité.

Exercice 3 : Désintégration du boson W en leptons

(1) Calculer le carré de l'amplitude de la réaction

$$W(q) \rightarrow e^-(p_1) + \bar{\nu}_e(p_2) \quad (4.394)$$

(2) Calculer le taux de désintégration de cette réaction.

Exercice 4 : $\nu_e \bar{\nu}_e \rightarrow W^+ W^-$

Calculer les carrés des amplitudes des réactions

$$\nu_e(p_1) + \bar{\nu}_e(p_2) \rightarrow W_L^+(p_3) + W_L^-(p_4). \quad (4.395)$$

$$\nu_e(p_1) + \bar{\nu}_e(p_2) \rightarrow W_T^+(p_3) + W_T^-(p_4). \quad (4.396)$$

$$\nu_e(p_1) + \bar{\nu}_e(p_2) \rightarrow W^+(p_3) - W^-(p_4). \quad (4.397)$$

où W_L^\pm et W_T^\pm sont, respectivement, les parties longitudinale et transversale de W .

Exercice 5 : Désintégration du muon

(1) Calculer le carré de l'amplitude de la réaction

$$\mu^-(p_1) \rightarrow \nu_\mu(p_1) + e^-(p_3) + \bar{\nu}_e(p_4) \quad (4.398)$$

(2) Calculer le taux de désintégration de cette réaction.

Exercice 6 : Diffusions élastiques $\nu_e e^-$ et $\bar{\nu}_e e^+$

Considérons les diffusions élastiques suivantes

$$\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^- \quad (4.399)$$

$$\bar{\nu}_e e^+ \rightarrow \bar{\nu}_e e^+ \quad (4.400)$$

(1) Tracer les diagrammes de Feynman de Born de chaque réaction.

(2) Calculer le carré de l'amplitude de chaque réaction.

Exercice 7 : Désintégration du Higgs en pair $W^+ W^-$

(1) Calculer le carré de l'amplitude de la réaction

$$H(q) \rightarrow W^-(p_1) + W^-(p_2) \quad (4.401)$$

(2) Calculer le taux de désintégration de cette réaction.

Exercice 8 : Désintégration du Higgs en pair fermion anti-fermion

(1) Calculer le carré de l'amplitude de la réaction

$$H(q) \rightarrow f(p_1) + \bar{f}(p_2) \quad (4.402)$$

(2) Calculer le taux de désintégration de cette réaction.

Problème : Processus Drell-Yan

On considère la diffusion :

$$P(P_1) + P(P_2) \rightarrow \mu^-(l_1) + \mu^+(l_2) + X, \quad (4.403)$$

c'est à dire la production d'une paire de muons dans les collisions proton-proton. L'exercice consiste à calculer, dans le cadre du modèle des partons, la section efficace de production d'une paire de muons de masse invariante $\sqrt{(l_1 + l_2)^2} = \sqrt{Q^2}$.

On suppose les protons formés de quarks de saveur u, d et d'antiquarks \bar{u}, \bar{d} . La distribution des quarks et antiquarks dans un proton est notée respectivement $u(x), d(x), \bar{u}(x), \bar{d}(x)$ où x est la fraction d'impulsion du proton portée par le parton. Les invariants du problème au niveau hadronique sont :

$$s = (P_1 + P_2)^2; \quad t = (P_1 - l_1)^2 = (P_2 - l_2)^2; \quad u = (P_1 - l_2)^2 = (P_2 - l_1)^2 \quad (4.404)$$

et au niveau partonique :

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2; \quad \hat{t} = (p_1 - l_1)^2 = (p_2 - l_2)^2; \quad \hat{u} = (p_1 - l_2)^2 = (p_2 - l_1)^2 \quad (4.405)$$

Calcul de la section efficace au niveau partonique

- Tracer le diagramme de Feynman au niveau partonique pour l'annihilation d'une saveur de quark;
- écrire l'élément de matrice \mathcal{M}_0 correspondant;
- calculer, en fonction des invariants partoniques, le carré de l'élément de matrice, sommé sur spins finals et moyenné sur spin et couleur initiales;
- calculer la section efficace partonique $d\hat{\sigma}/dQ^2$ pour une saveur.

Calcul de la section efficace au niveau hadronique

- Dénotant x_1 et x_2 l'impulsion du quark ou antiquark dans le proton P_1 et P_2 respectivement, exprimer les invariants partoniques en fonction de x_i et des invariants hadroniques;
- écrire la section efficace hadronique comme convolution des distributions partoniques et la section efficace partonique;
- quel est le domaine de variation des variables x_i ?

Utiliser les relations suivantes :

- Somme sur les polarisations d'un boson de jauge massif, de masse m et d'impulsion p :

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(p) \epsilon_{\nu}^{*(\lambda)}(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{m^2} \quad (4.406)$$

- Propriétés des matrices de Dirac et la matrice γ^5 :

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^5\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5. \quad (4.407)$$

$$\text{Tr}(\gamma^5) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^5) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu}) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\sigma}) = 0, \quad \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\sigma} \gamma^{\lambda}) = -i4\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}. \quad (4.408)$$

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu} \gamma^{\nu}) = 4g^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}(\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\sigma} \gamma^{\lambda}) = 4(g^{\mu\nu}g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) \quad (4.409)$$

5. Corrections radiatives et renormalisation

Sommaire

5.1	Divergences et régularisation	168
5.1.1	Rotation de Wick	168
5.1.2	Comptage de puissance	169
5.1.3	Régularisation dimensionnelle	170
5.1.4	Paramétrisation de Feynman	173
5.1.5	Intégration sur la 4-impulsion tournant dans la boucle	173
5.2	Boucles en QED	176
5.2.1	Opérateur de polarisation	177
5.2.2	Correction fonction d'onde	184
5.2.3	Correction du vertex	187
5.3	Renormalisation de la QED	194
5.3.1	Renormalisation de l'opérateur de polarisation : calcul de Z_3	194
5.3.2	Renormalisation de la constante de couplage α	197
5.3.3	Renormalisation de l'opérateur de masse : calcul de Z_0 et Z_2	199
5.3.4	Renormalisation du vertex en QED	202
5.4	Boucles en QCD	203
5.4.1	Corrections au propagateur en QCD	204
5.4.2	Correction au propagateur du fantôme	205
5.4.3	Correction au propagateur du quark	206
5.4.4	Correction au vertex quark-quark-gluon	206
5.4.5	Correction au vertex 3-gluon	207
5.4.6	Correction au vertex 4-gluon	207
5.4.7	Correction au vertex fantôme-fantôme-gluon	208
5.5	Renormalisation de la QCD	208
5.6	Exercices et problèmes	212

Pour prendre en compte les corrections quantiques, nous devons considérer les ordres supérieurs de la série de perturbation de la matrice de diffusion et donc de l'observable physique en question, c.à.d.

les diagrammes de Feynman à une boucle, à deux boucles, ... etc [9, 10]. En général, un diagramme de Feynman à une boucle avec N propagateurs internes, dans un espace temps à 4-dimensions, est donné par l'intégrale suivante :

$$I_N^4 = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{F(l)}{(q_1^2(l) - m_1^2 + i\lambda) \cdots (q_N^2(l) - m_N^2 + i\lambda)}. \quad (5.1)$$

où l est la 4-impulsion tournant dans la boucle, q_i est la 4-quantité du mouvement portée par le propagateur interne i et m_i est la masse de la particule associé à ce propagateur. $F(l)$ est une fonction de l , q_i , m_i et les paramètres de la théorie de jauge (les facteurs de couleur en QCD par exemple).

Cette intégrale peut diverger dans l'ultraviolet (*divergences UV*) quand l_0 et/ou $|\vec{l}|$ tendent vers l'infini ou dans l'infrarouge (*divergences IR*) quand l_0 tend vers zéro (divergences molles) ou si deux propagateurs non-massifs deviennent colinéaires (*divergences colinéaires*). Dans ce chapitre, on montre comment calculer les diagrammes de Feynman à une boucle en QED et QCD et comment traiter les divergences UV et IR. Ce chapitre s'inspire de plusieurs sources [9, 10, 14], en particulier du cours de J-Ph. Guillet [14] dont la notation est adoptée.

5.1 Divergences et régularisation

Considérons le diagramme de Feynman à une boucle (correction au propagateur du photon), voir figure (5.1). Il correspond à une intégrale sur l'énergie-impulsion tournant dans la boucle (l) dans un espace-temps à 4-dimensions.

On a

$$I_2^4 \sim e^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{1}{l - m + i\lambda} \gamma_\nu \frac{1}{l + k - m + i\lambda} \right] \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 l}{l^2} \quad (5.2)$$

Cette intégrale diverge d'une manière quadratique quand l tend vers l'infini, c.à.d.

$$I_2^4 \xrightarrow{l^2} l^2 \xrightarrow{l \rightarrow \infty} (\infty)^2 \quad (5.3)$$

On rappelle que dans l'espace de Minkowski on a $l^2 = l_0^2 - |\vec{l}|^2$. On peut avoir un cas ambigu quand l'énergie ($l_0 \rightarrow \infty$) et la quantité du mouvement ($|\vec{l}| \rightarrow \infty$) divergent au même temps mais l'intégrale reste finie ($l^2 \rightarrow \text{fini}$). Donc, il est plus convenant de travailler dans un espace euclidien que dans un espace de Minkowski. Pour faire cela, on doit effectuer une rotation de Wick.

5.1.1 Rotation de Wick

On peut écrire l'intégrale précédente sous la forme

$$I_2^4 \sim \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\nu(l + m_f) \gamma_\mu(l + k + m_f)]}{[l^2 - m^2 + i\lambda][(l + k)^2 - m^2 + i\lambda]} \quad (5.4)$$

Les pôles de l'intégrande sont les suivants :

$$l_{0,1}^\pm = \begin{cases} \sqrt{|\vec{l}|^2 + m^2} - i\lambda \\ -\sqrt{|\vec{l}|^2 + m^2} + i\lambda \end{cases} \quad (5.5)$$

$$l_{0,2}^\pm = \begin{cases} \sqrt{(\vec{l} + \vec{k})^2 + m^2} - k_0 - i\lambda \\ -\sqrt{(\vec{l} + \vec{k})^2 + m^2} - k_0 + i\lambda \end{cases} \quad (5.6)$$

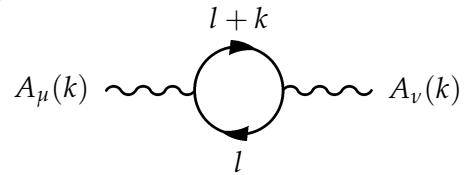


FIGURE 5.1 – Diagramme de Feynman à une boucle à deux points en QED.

On voit que les deux pôles ont une petite partie imaginaire $\pm i\lambda$, donc ils ne sont pas situés exactement sur l'axe réel $\Re[l_0]$ mais très proches. Les deux pôles $l_{0,i}^+$ (pour $i = 1, 2$) ont des parties réelles positives, donc ils sont situés sous l'axe $\Re[l_0]$ par contre, les deux pôles $l_{0,i}^-$ (pour $i = 1, 2$) sont situés au-dessus de l'axe réel car ils possèdent des parties réelles négatives. Au lieu d'intégrer sur l'axe réel, on peut faire une rotation dans le plan complexe sans rencontrer les pôles, voir figure (5.2). Selon le théorème des résidus, l'intégration sur ce contour fermé est nulle car les pôles sont situés à l'extérieur du contour. Cette astuce, que l'on appelle *rotation de Wick*, nous amène à intégrer sur les l'axe réel. La rotation de Wick consiste donc à faire le changement de variable suivant :

$$l_0 = i\bar{l}_0 \quad (5.7)$$

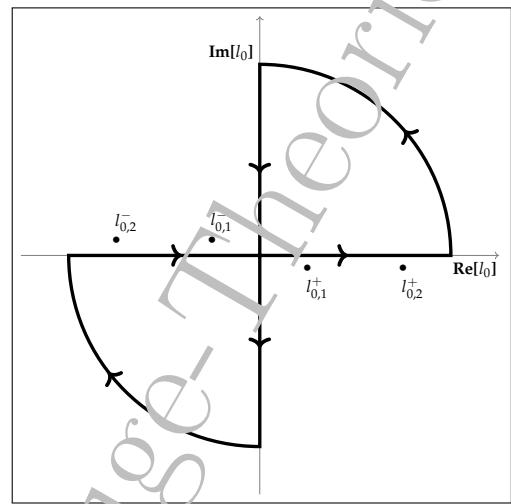


FIGURE 5.2 – Rotation de Wick

Donc, le carré du 4-vecteur l devient : $l^2 = -\bar{l}_0^2 - |\bar{l}|^2 = -\bar{l}^2$. On voit que \bar{l} est un vecteur dans l'espace euclidien R^4 . Alors, après rotation de Wick, l'intégrale I_2^4 se comporte comme

$$I_2^4 \sim \int \frac{d^4 \bar{l}}{\bar{l}^2} = \int \bar{l} d\bar{l} \sim \bar{l}^2 \Big|_{\bar{l} \rightarrow \infty} \rightarrow (\infty)^2 \quad (5.8)$$

On voit bien que l'intégrale I_2^4 diverge quadratiquement quand l'énergie et/ou la quantité du mouvement tendent vers l'infini.

Exercice 1. Rotation de Wick

- (1) Montrer que l'intégrale sur le contour fermé dans la figure (5.2) est nulle.
- (2) Montrer que l'intégrale sur les deux quarts du cercle sont nulles.
- (3) Déduire que l'intégrale sur l'axe réel est égal à l'intégrale sur l'axe imaginaire.

Dans les théories de jauge, ces divergences sont éliminées grâce à la procédure de renormalisation, mais avant de montrer comment cette procédure fonctionne, on doit régulariser les intégrales à une boucle de manière à travailler avec des quantités finies. Il existe plusieurs méthodes de régularisation, la méthode la plus utilisée et la plus efficace est la *régularisation dimensionnelle* qu'on doit discuter dans les sections suivantes.

5.1.2 Comptage de puissance

Le degré superficiel de divergence UV d'un diagramme G est donné par :

$$d_G = nl + \sum_v \delta_v - 2n_B - n_F \quad (5.9)$$

où

- n est la dimension de l'espace-temps.
- l est le nombre de boucles dans le diagramme G .
- δ_v est le nombre de dérivés aux vertex v dans G .
- n_B est le nombre de lignes bosoniques internes.
- n_F est le nombre de lignes fermioniques internes.

A une boucle par exemple (c.à.d. $l = 1$), on a :

- Si $d_G < 0$, le diagramme G est fini.
- Si $d_G = 0$, le diagramme G est logarithmiquement divergent.
- Si $d_G > 0$, le diagramme G diverge en puissance (quadratique, ... etc).

On suppose qu'un vertex v est associé à un lagrangien d'interaction \mathcal{L}_I décrivant l'interaction entre E_B champs bosonique et E_F champs fermioniques. A chaque vertex, on associe la quantité ω_v définie par :

$$\omega_v = E_B + \frac{3}{2}E_F + \delta_v \quad (5.10)$$

A l'aide de la quantité ω_v , on classe les théories quantiques des champs en trois classes :

- Si $\omega_v > 4$, la théorie est non-renormalisable.
- Si $\omega_v = 4$, la théorie est renormalisable.
- Si $\omega_v < 4$, la théorie est super-renormalisable.

5.1.3 Régularisation dimensionnelle

La divergence UV vient de la région $\bar{l} \rightarrow \infty$. Pour donner un sens mathématique à cette intégrale, il faut l'écrire comme une limite d'une intégrale convergente, ce qu'on appelle *la régularisation* de cette intégrale. On note que cette intégrale (convergente) n'est pas unique, elle dépend du schéma de régularisation utilisé. On note aussi, qu'une théorie basée sur une intégrale régularisée, peut violer quelques exigences physiques, par exemple, l'invariance de Lorenz, la symétrie de jauge, unitarité ... etc. Donc le meilleur schéma de régularisation c'est celui qui doit préserver le plus possible ces principes. Dans ce cours, on va utiliser le schéma le plus utilisé, introduit par t'Hooft et Veltman, c'est le schéma de régularisation dimensionnelle. L'idée de base de ce schéma est de faire une continuation analytique de l'espace-temps à n dimensions, où on baisse les dimensions dans le traitement des divergences ultraviolettes. Donc, on remplace l'intégrale divergente à quatre dimensions par une autre convergente à n dimensions. Par exemple, l'intégrale suivante :

$$I_2^4 = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{F(l)}{(l^2 - m^2 + i\lambda)((l+k)^2 - m^2 + i\lambda)}. \quad (5.11)$$

(avec $F(l) = \text{Tr}[\gamma_\nu(l + m_f)\gamma_\mu(l + k + m_f)]$), à n dimensions, elle devient

$$I_2^n = \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{F(l)}{(l^2 - m^2 + i\lambda)((l+k)^2 - m^2 + i\lambda)}. \quad (5.12)$$

Quand $\bar{l} \rightarrow \infty$, elle se comporte comme

$$I_2^n \sim \int \frac{d^n \bar{l}}{\bar{l}^2} = \int \bar{l}^{n-3} d\bar{l} \sim \frac{\bar{l}^{n-2}}{n-2} \quad (5.13)$$

qui converge pour $n < 2$. En pratique, on augmente ou on baisse la dimension de l'espace-temps légèrement (continuation analytique), alors on écrit

$$n = 4 - 2\epsilon \quad \text{avec} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (5.14)$$

On choisit $\epsilon > 0$ pour les intégrales qui divergent dans la région UV ($l_0 \rightarrow \infty$) et $\epsilon < 0$ pour les intégrale qui divergent dans la région IR ($l_0 \rightarrow 0$). Dans la suite, on donnera des exemples.

Dans ce schéma, toutes les indices de l'espace-temps sont de 0 à $n-1$, alors les composantes de la 4-impulsion deviennent,

$$p^\mu = (p^0, p^1, \dots, p^{n-1}). \quad (5.15)$$

La métrique

$$g^{\mu\nu} = (1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-1 \text{ fois}}) \quad (5.16)$$

La métrique contractée,

$$g_\mu^\mu = g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = n. \quad (5.17)$$

L'algèbre de Dirac reste inchangée

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (5.18)$$

La contraction des indices dans les chaînes des matrices gamma, par exemple,

$$\begin{aligned}\gamma_\mu \gamma^\mu &= n \\ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma^\mu &= -2\gamma_\alpha + (4-n)\gamma_\alpha \\ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\mu &= 4g_{\alpha\beta} - (4-n)\gamma_\alpha \gamma_\beta \\ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma^\mu &= -2\gamma_\delta \gamma_\beta \gamma_\alpha + (4-n)\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta\end{aligned} \quad (5.19)$$

Le choix de la mesure d'intégration est arbitraire, dans notre cas, on la fixe à,

$$\frac{d^4l}{(2\pi)^4} \longrightarrow \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \quad (5.20)$$

On normalise la trace de deux matrices de Dirac comme suit :

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = 4g_{\mu\nu} \quad (5.21)$$

et donc

$$\text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu] = 4[g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}] \quad (5.22)$$

Le fait que la mesure d'intégration est arbitraire et la trace des matrice de Dirac dans (5.21) est normalisée à $4g_{\mu\nu}$ (d'après l'algèbre de Clifford $\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = 2^{n/2}g_{\mu\nu}$), cette méthode souffre de quelques ambiguïtés, il faut donc préserver les conventions (5.20) et (5.21) pour ne pas rencontrer des problèmes.

Dans un espace-temps de dimension n , les dimensions en unité de masse des champs, des constantes de couplages et d'autres paramètres de la théorie sont modifiées. On suppose toujours que l'action est sans dimension, i.e.

$$[S] = 0 \quad \text{avec} \quad S = \int d^n x \mathcal{L}. \quad (5.23)$$

Car la dimension de la mesure $[d^n x] = -n$, alors la dimension de la densité lagrangienne est égal à n :

$$[\mathcal{L}] = n \quad (5.24)$$

La dimension des champs est imposée par le fait que chaque terme du lagrangien doit avoir la dimension n . En QED par exemple, le terme cinétique pour les champs a la dimension n , c.à.d.

$$[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] = n \quad \text{avec} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.25)$$

alors

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} - \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu &= \frac{n}{2} \\ &= 1 + [A^\mu] \quad \Rightarrow \quad [A^\mu] = \frac{n}{2} - 1\end{aligned} \quad (5.26)$$

La même chose pour le terme cinétique pour les champs de Dirac (de matière), il a la dimension n , c.à.d.

$$[\bar{\psi} \not{\partial} \psi] = 1 + 2[\psi] = n \quad \Rightarrow \quad [\psi] = \frac{n-1}{2}. \quad (5.27)$$

Dans un espace à n -dimension les constantes de couples contrôlant l'interaction acquiert une dimension. En QED par exemple, on peut calculer la dimension de la charge électrique à partir du terme d'interaction, c.à.d.

$$\begin{aligned}[e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi] &= n \\ &= [e] + [A_\mu] + 2[\psi] \\ &= [e] + \frac{n}{2} - 1 + n - 1 \quad \Rightarrow \quad [e] = 2 - \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad [\alpha] = 4 - n\end{aligned}\quad (5.28)$$

Pour pouvoir faire le traitement perturbative, plutôt que de travailler avec des constantes de couplage ayant une dimension, on doit introduire une échelle de masse arbitraire ($[\mu] = 1$) pour absorber cette dimension, c.à.d.

$$e \rightarrow e_0 \mu^{2-\frac{n}{2}} \quad (5.29)$$

$$\alpha \rightarrow \alpha_0 \mu^{4-n} \quad (5.30)$$

où e_0 et α_0 sont la charge électrique et la constante de couplage sans dimension. Dans la suite, on enlève l'indice "0" et on les remplace tout simplement par : $e_0 \rightarrow e$ et $\alpha_0 \rightarrow \alpha$.

On note que les règles de Feynman ne changent pas quand on travaille dans un espace à n -dimensions, il faut juste multiplier la charge électrique (ou les constantes de couplage) apparaissant dans les vertex par $\mu^{2-\frac{n}{2}}$.

Exercice 3. Dimensions des propagateur

- (1) Calculer la dimension en unité de masse du propagateur du photon à 4 et n dimension.
- (2) Calculer la dimension en unité de masse du propagateur du fermion à 4 et n dimension.
- (3) Est ce que la dimension dans le système d'unité naturelle depend de la dimension de l'espace-temps ?

Solution. Les propagateurs du photon et du fermion sont donnés par,

$$D_{\mu\nu}(p) = \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(x) | 0 \rangle \quad (5.31)$$

$$S_F(p) = \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | T \bar{\psi}(x) \psi(x) | 0 \rangle \quad (5.32)$$

Alors

$$\begin{aligned}[D_{\mu\nu}] &= n[x] + [e^{-ipx}] + 2[A_\mu] \\ &= -n + 0 + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right) \equiv -2\end{aligned}\quad (5.33)$$

et

$$\begin{aligned}[S_F] &= n[x] + [e^{-ipx}] + 2[\psi] \\ &= -n + 0 + 2\left(\frac{n-1}{2}\right) \equiv -1\end{aligned}\quad (5.34)$$

On voit que dans les deux cas la dimension des propagateurs ne dépend de la dimension de l'espace-temps, c.à.d. les dimensions des propagateurs sont les même qu'à 4 dimensions.

Il existe d'autres méthodes de régularisation. Par exemple, la méthode de *Pauli-Villars* consiste à mettre l'intégrale convergente en remplaçant le propagateur interne par

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\lambda} \rightarrow \frac{1}{l^2 - m^2 + i\lambda} - \frac{1}{l^2 - \Lambda^2 + i\lambda} \equiv \frac{\Lambda^2 - m^2}{(m^2 - l^2)(\Lambda^2 - l^2)} \quad (5.35)$$

où Λ est un paramètre arbitraire qui a la dimension de masse. A la limite $\Lambda \rightarrow \infty$, on retrouve le propagateur original. Pour régulariser une intégrale par cette méthode, on doit faire le calcul complet avec le propagateur modifié puis on prend la limite $\Lambda \rightarrow \infty$.

Exercice 3. Régularisation de Pauli-Villars

Considérons l'intégrale à une boucle (dans la théorie $\lambda\varphi^4$) suivante :

$$\Gamma(p^2) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^2} \frac{i}{l^2 - m^2 + i\lambda} \frac{i}{(p - l)^2 - m^2 + i\lambda} \quad (5.36)$$

(1) En remplaçant les propagateurs par (5.35), montrer que pour $\Lambda \gg m$, l'intégrale $\Gamma(p^2)$ devient

$$\Gamma(p^2) = -\frac{\lambda^2 \Lambda^2}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^2} \frac{1}{(l^2 - m^2 + i\lambda)(l^2 - \Lambda^2 - m^2 + i\lambda)[(p - l)^2 - m^2 + i\lambda]} \quad (5.37)$$

(2) Montrer que cette intégrale est finie.

Pour évaluer les intégrales de Feynman à une boucle, il faut mieux linéariser le dénominateur, la méthode la plus élégante est de travailler dans l'espace des paramètres de Feynman.

5.1.4 Paramétrisation de Feynman

Cette méthode nous permet de transformer notre intégrale à n dimensions dans l'ouvert $]-\infty, +\infty[$, à une intégrale sur l'intervalle borné $[0, 1]$. Cela, facilite le calcul. On définit deux variables x et y , tels que $x, y \in [0, 1]$ et $x + y = 1$. On peut montrer que,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2} \quad (5.38)$$

Si on dérive successivement eq. (5.38) par rapport à a et b , on peut montrer que

$$\frac{1}{a^p b^q} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 dx \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(ax + b(1-x))^{p+q}} \quad (5.39)$$

Pour les intégrales avec trois propagateurs internes différents, on utilise

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{1}{[axy + by(1-x) + c(1-y)]^3} \quad (5.40)$$

La formule générale qu'on utilise pour calculer les fonctions à une boucle avec N propagateurs internes est la suivante :

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^N a_k} = \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \frac{\delta(1 - \sum_{k=1}^N z_k)}{[\sum_{k=1}^N a_k z_k]^N} \quad (5.41)$$

Revenons, maintenant, à l'intégrale (5.12). On utilise (5.38) pour linéariser son dénominateur, on obtient

$$I_2^n = \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{F(l)}{[(l + kx)^2 + k^2 x(1-x) - m^2 + i\lambda]^2} \quad (5.42)$$

5.1.5 Intégration sur la 4-impulsion tournant dans la boucle

Car cette intégrale est convergente, alors on peut faire le changement de variable suivant (shift) sans problème

$$l' = l + kx \quad (5.43)$$

on trouve

$$I_2^n = \int_0^1 dx \int \frac{d^n l'}{(2\pi)^n} \frac{F(l' - kx)}{[l'^2 + k^2 x(1-x) - m^2 + i\lambda]^2}. \quad (5.44)$$

Les intégrales qu'on doit calculer maintenant sont de type

$$\int \frac{d^n l'}{(2\pi)^n} \frac{(l'^2)^r}{(l'^2 - R^2 + i\lambda)^m} \quad (5.45)$$

avec $r, m \geq 0$. Le numérateur des intégrales à une boucle, en général, s'écrit ou peut se ramener à la forme suivante :

$$F(l' - kx) = \sum_r a_r (l'^2)^r \quad (5.46)$$

Dans la suite, on suppose que $R^2 \geq 0$ (si ce n'est pas le cas, on doit faire une continuation analytique quand on va discuter plus tard).

On considère la quantité suivante :

$$\begin{aligned} I(r, m) &= \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(l^2)^r}{(l^2 - R^2 + i\lambda)^m} \\ &= \int \frac{d^{n-1} l}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} dl_0 \frac{(l_0^2 - |\vec{l}|^2)^r}{(l_0^2 - |\vec{l}|^2 - R^2 + i\lambda)^m} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Les pôles de $I(r, m)$ sont les suivants :

$$l_0^\pm = \begin{cases} \sqrt{|\vec{l}|^2 + R^2} - i\lambda \\ -\sqrt{|\vec{l}|^2 + R^2} + i\lambda \end{cases} \quad (5.48)$$

A l'aide du théorème de Cauchy, on effectue l'intégration sur l_0 . On doit déformer le contour comme dans la figure (5.3) pour éviter les pôles. Car il n'y a pas de pôles à l'intérieur du contour, l'intégrale sur ce dernier est nulle, c.à.d.

$$\int_{-P}^{+P} dz f(z) + \int_{C_1} dz f(z) + \int_{+iP}^{-iP} dz f(z) + \int_{C_2} dz f(z) = 0 \quad (5.49)$$

avec

$$f(z) = \frac{(z^2 - |\vec{l}|^2)^r}{(z^2 - |\vec{l}|^2 - R^2 + i\lambda)^m} \quad (5.50)$$

Lorsque $P \rightarrow \infty$ les intégrales sur C_1 et C_2 s'annulent pour $2(m-r) > 1$, on a donc

$$\int_{-P}^{+P} dz f(z) = \int_{-iP}^{+iP} dz f(z) \quad (5.51)$$

alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{(x^2 - |\vec{l}|^2)^r}{(x^2 - |\vec{l}|^2 - R^2 + i\lambda)^m} = i(-1)^{r-m} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{(x^2 + |\vec{l}|^2)^r}{(x^2 + |\vec{l}|^2 + R^2 - i\lambda)^m} \quad (5.52)$$

Alors, l'intégrale $I(r, m)$ devient

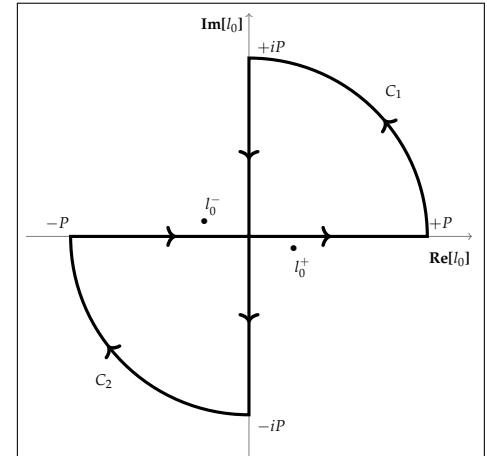


FIGURE 5.3 – Rotation de Wick dans le plan complexe de l'intégrale $I(r, m)$.

$$I(r, m) = i(-1)^{r-m} \int \frac{d^n \bar{l}}{(2\pi)^n} \frac{(\bar{l}^2)^r}{(\bar{l}^2 + R^2 - i\lambda)^m} \quad (5.53)$$

où \bar{l} est un vecteur dans l'espace Euclidien R^n ($\bar{l}^2 = l_0^2 + |\bar{l}|^2$), voir la discussion dans la section rotation de Wick. Cette intégrale converge pour $2(m-r) - n > 0$, ce qui implique $n \geq 1$.

Pour effectuer l'intégration sur \bar{l} , on utilise les coordonnées sphériques dans R^n , alors

$$\int d^n \bar{l} = \int |\bar{l}|^{n-1} d|\bar{l}| d\Omega_n \quad (5.54)$$

où Ω_n est l'angle solide à n dimensions. Le vecteur \bar{l} en coordonnées sphériques peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\bar{l} = |\bar{l}|(\cos \theta_1, \cos \theta_2 \sin \theta_1, \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \dots, \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-1}) \quad (5.55)$$

L'élément de l'angle solide s'écrit

$$\int d\Omega_n = \int_0^\pi (\sin \theta_1)^{n-2} d\theta_1 \int_0^\pi (\sin \theta_2)^{n-3} d\theta_2 \dots \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \quad (5.56)$$

Pour calculer $\int d\Omega_n$, on utilise la formule suivante :

$$\int_0^\pi (\sin \theta)^m d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})} \quad (5.57)$$

alors,

$$\begin{aligned} \int d\Omega_n &= \left(\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right) \times \left(\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \right) \times \dots \times \left(\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1+1}{2})}{\Gamma(\frac{1+2}{2})} \right) \times 2\pi \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Intégrant $I(r, m)$ sur l'angle solide, on trouve

$$I(r, m) = 2i \frac{(-1)^{r-m}}{(2\pi)^n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty |\bar{l}|^{n-1} d|\bar{l}| \frac{|\bar{l}|^{2r}}{(|\bar{l}|^2 + R^2 - i\lambda)^m}. \quad (5.59)$$

L'intégrale sur \bar{l} est sous la forme :

$$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{(x^n + z^n)^q} = \frac{1}{n} z^{p+1-nq} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{n}) \Gamma(q - \frac{p+1}{n})}{\Gamma(q)}. \quad (5.60)$$

On trouve finalement le résultat suivant :

$$I(r, m) = i \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (R^2 - i\lambda)^{r-m+\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(r + \frac{n}{2}) \Gamma(m - r - \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(m)}. \quad (5.61)$$

Avant de conclure cette section, on donne quelques propriétés de la fonction $\Gamma(z)$ et $B(z)$.

Fonction $\Gamma(z)$ et $B(a, b)$:

- Pour $z = n$ entier positif, on a :

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (5.62)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (5.63)$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (5.64)$$

- Pour $\text{Re}(z) > 0$, on a :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad (5.65)$$

- Relations utiles :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (5.66)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (5.67)$$

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{2z-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}) \quad (5.68)$$

$$\Gamma(1+z) \underset{z \rightarrow 0}{\simeq} 1 - \gamma z + \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) \frac{z^2}{2} \quad (5.69)$$

où γ est la constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right) = 0.5772156649 \dots$$

- La fonction $B(a, b)$ est définie par :

$$B(a, b) = \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} \quad (5.70)$$

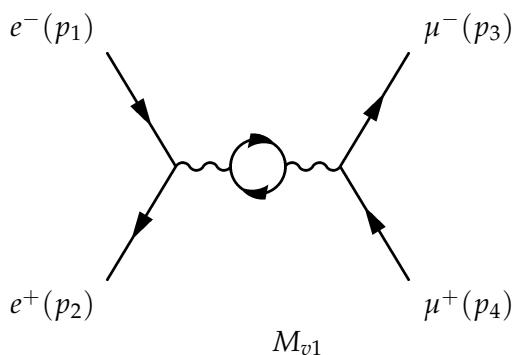
$$= \int_0^\infty dt \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} \quad (5.71)$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (5.72)$$

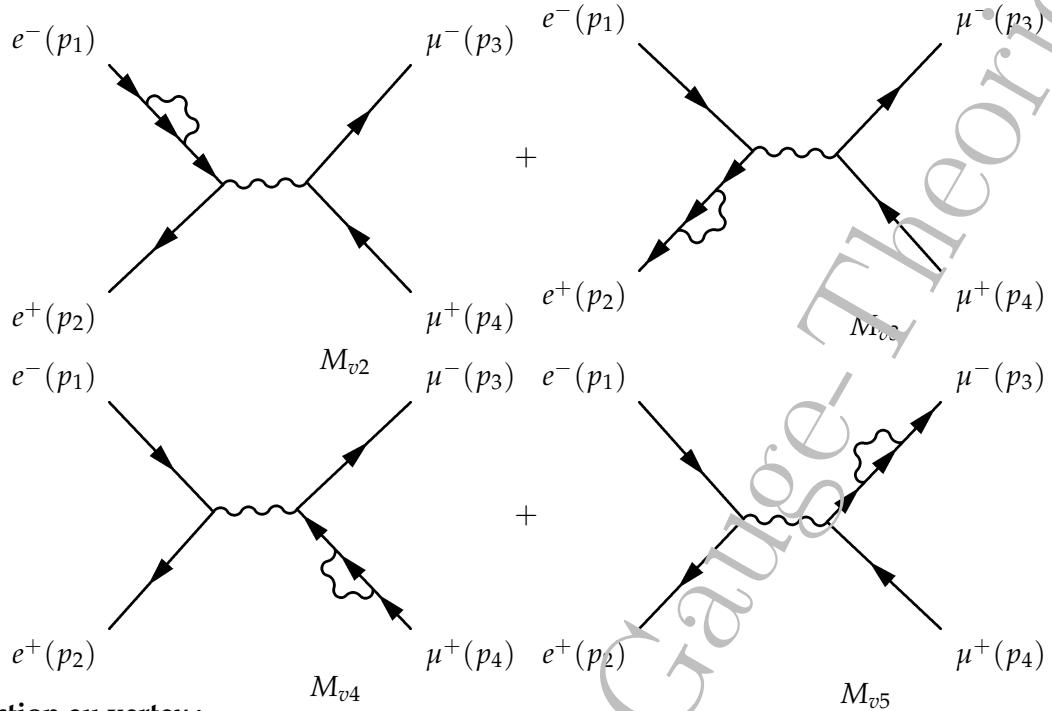
5.2 Boucles en QED

Pour calculer les corrections quantiques (corrections virtuelles) au premier ordre pour la réaction $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, on doit prendre en compte les diagrammes de Feynman à une boucle suivants :

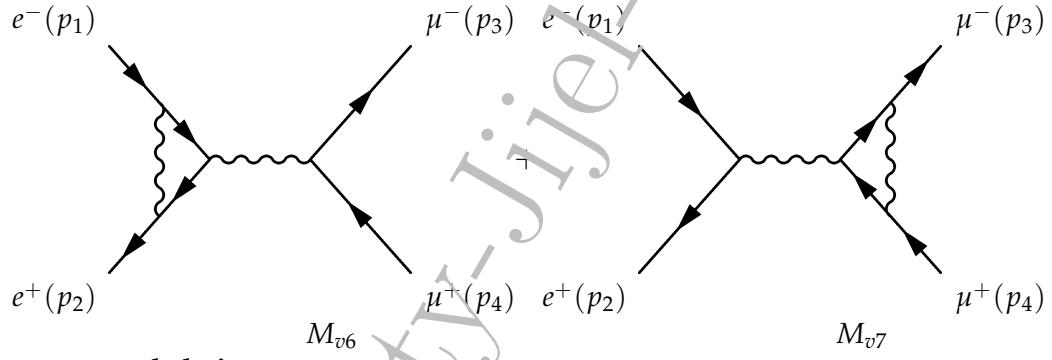
- Correction au propagateur du photon :



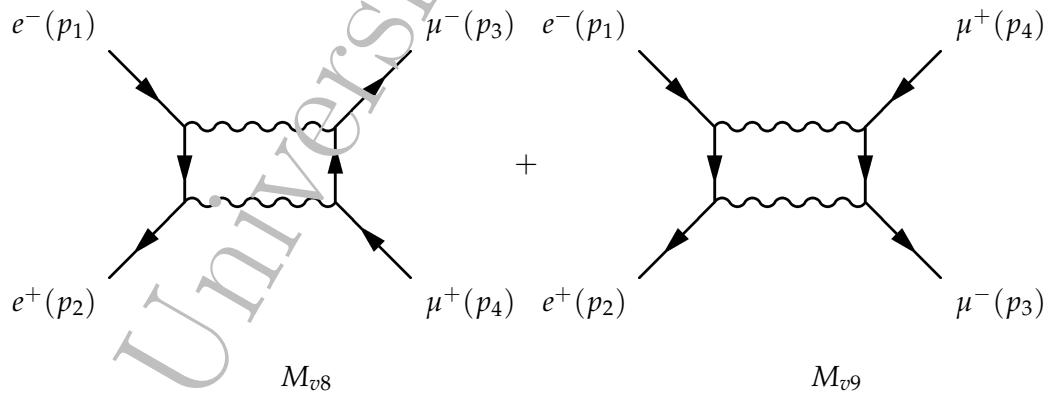
- Correction au propagateur du fermion :



- Correction au vertex :



- Les diagrammes de boîtes :



Dans la suite, on va donner le calcul détaillé de la correction au propagateur du photon à une boucle (opérateur de polarisation), correction au propagateur du fermion (correction fonction d'onde) et la correction au vertex, en suivant étroitement le cours de J-Ph. Guillet [14].

5.2.1 Opérateur de polarisation

L'opérateur de polarisation à l'ordre α est représenté par le diagramme de Feynman à une boucle (5.4). Il est donné par l'intégrale suivante :

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = -e^2 \mu^{(4-n)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^n} \text{Tr} \left[\gamma_\nu \frac{1}{k - m + i\lambda} \gamma_\mu \frac{1}{k - q - m + i\lambda} \right]. \quad (5.73)$$

On note qu'on a inclus un signe "-" supplémentaire caractérisant les boucles fermioniques fermées. On suit les étapes présentées dans la section précédente pour intégrer sur l'impulsion k tournant dans la boucle (dans un espace-temps à n -dimension), on trouve

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = -i\frac{\alpha}{3\pi} (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma - 6 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - (q^2 + i\lambda)x(1-x)}{\mu^2} \right) \right]. \quad (5.74)$$

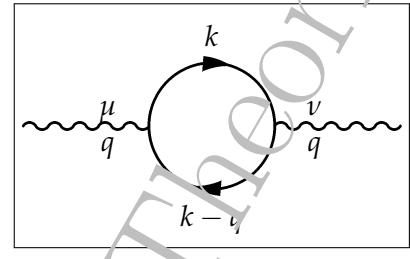


FIGURE 5.4 – Opérateur de polarisation

Démonstration :

On écrit l'opérateur de polarisation sous la forme :

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = -e^2 \mu^{(4-n)} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \frac{\not{k} + m}{(k^2 - m^2 + i\lambda)} \gamma_\nu \frac{(\not{k} - \not{q} + m)}{((k - q)^2 - m^2 + i\lambda)} \right] = -e^2 \mu^{(4-n)} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu(\not{k} - \not{q} + m)]}{(k^2 - m^2 + i\lambda)[(k - q)^2 - m^2 + i\lambda]} \quad (5.75)$$

Étape 1 : paramétrisation de Feynman

A l'aide de la paramétrisation de Feynman (5.38), on linéarise le dénominateur de la manière suivante :

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = -e^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu(\not{k} - \not{q} + m)]}{[x(k^2 - m^2 + i\lambda) + (1-x)\{(k - q)^2 - m^2 + i\lambda\}]^2} = -e^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu(\not{k} - \not{q} + m)]}{[k^2 - 2k \cdot q(1-x) + q^2(1-x) - m^2 + i\lambda]^2} \quad (5.76)$$

La trace dans le numérateur de (5.76) est un tenseur de rang 2, il s'écrit sous la forme :

$$\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu(\not{k} - \not{q} + m)] = Ag_{\mu\nu} + B \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \equiv T_{\mu\nu} \quad (5.77)$$

On contracte le tenseur $T_{\mu\nu}$ par $g^{\mu\nu}$ et $\gamma^\mu q^\nu$, on montre que

$$A = \frac{T_\mu^\mu - T_{\mu\nu}q^\mu q^\nu / q^2}{(n-1)} \quad (5.78)$$

$$B = \frac{nT_{\mu\nu}q^\mu q^\nu / q^2 - T_\mu^\mu}{(n-1)} \quad (5.79)$$

Après simplification, on obtient¹ :

$$A = \frac{4}{n-1} [(n-1)m^2 - (n-3)k^2 + (n-1)k \cdot q - 2(k \cdot q)^2 / q^2] \quad (5.80)$$

$$B = \frac{4}{n-1} [2n(k \cdot q)^2 / q^2 - 2(n-1)k \cdot q - 2k^2] \quad (5.81)$$

Pour le moment, on garde que l'intégrale sur k de l'opérateur de polarisation. On définit l'intégrale tensorielle suivante :

$$I_{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{Ag_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu / q^2}{[k^2 - 2k \cdot q(1-x) + q^2(1-x) - m^2 + i\lambda]^2} \equiv I_{\mu\nu}^{(A)} + I_{\mu\nu}^{(B)} \quad (5.82)$$

1. Pour calculer A et B , utiliser le package `hip` en fixant la dimension de l'espace temps à n par la commande `SpaceTimeDimension = n`.

où $I_{\mu\nu}^{(A)}$ et $I_{\mu\nu}^{(B)}$ sont les parties du tenseur $I_{\mu\nu}$ contenant les quantités A et B et donc

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = -e^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 dx I_{\mu\nu}(q) \quad (5.83)$$

Étape 2 : translation $k = l + q(1-x)$

Pour écrire le dénominateur de $I_{\mu\nu}$ sous la forme $(l^2 - R^2)$, on fait le changement de variable suivant :

$$k = l + q(1-x) \quad (5.84)$$

Alors, le dénominateur devient

$$l^2 - \overbrace{[m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda]}^{\equiv R^2} \quad (5.85)$$

Les quantités A et B s'expriment en fonction de l comme suit :

$$A = -4 \left[-m^2 - q^2 x(1-x) + \frac{n-3}{n-1} l^2 + (1-2x)l \cdot q + \frac{2}{(n-1)} \frac{(l \cdot q)^2}{q^2} \right] \quad (5.86)$$

$$B = 8 \left[-q^2 x(1-x) - \frac{l^2}{n-1} + (1-2x)l \cdot q + \frac{n}{n-1} \frac{(l \cdot q)^2}{q^2} \right] \quad (5.87)$$

On utilise le fait que, dans un espace-temps à n dimension, $p^{\mu} p^{\nu} = g^{\mu\nu} p^2/n$, on écrit le terme $(l \cdot q)^2$ comme suit :

$$\begin{aligned} (l \cdot q)^2 &= (l^\mu q_\mu)^2 \\ &= l^\mu q_\mu l^\nu q_\nu \\ &= (l^\mu l^\nu)(q_\mu q_\nu) \\ &= \frac{l^2}{n} g^{\mu\nu} \frac{q^2}{n} g_{\mu\nu} = \frac{l^2}{n} \frac{q^2}{n} g^\mu_\mu \equiv \frac{l^2 q^2}{n} \end{aligned} \quad (5.88)$$

et prenons en compte que les termes en puissance paire de l (c.à.d. $l \cdot q$) donneront une contribution nulle, donc on peut les enlever. Alors les quantités A et B se réduisent à :

$$\begin{aligned} A &\supset 4 \left[m^2 + q^2 x(1-x) - \left(n-3 + \frac{2}{n} \right) \frac{l^2}{n-1} \right] \\ &= 4 \left[R^2 + 2q^2 x(1-x) - (n-2) \frac{l^2}{n} \right] \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$B \supset -8q^2 x(1-x) \quad (5.90)$$

Donc, les intégrales tensorielles $I_{\mu\nu}^{(A)}$ et $I_{\mu\nu}^{(B)}$ s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}^{(A)} &= 4g_{\mu\nu} \left[\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{n^2 - q^2 x(1-x) - l^2(n-2)/n}{[l^2 - R^2]^2} + \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{2q^2 x(1-x)}{[l^2 - R^2]^2} \right] \\ &= 4g_{\mu\nu} \left[\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{R^2 - l^2(n-2)/n}{[l^2 - R^2]^2} + \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{2q^2 x(1-x)}{[l^2 - R^2]^2} \right] \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$I_{\mu\nu}^{(B)} = -8 \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{q^2 x(1-x)}{[l^2 - R^2]^2} \quad (5.92)$$

Remarques :

- Le premier terme de $I_{\mu\nu}^{(A)}$ contient une divergence uv quadratique car pour $n = 4$, on a :

$$\int d^4 l \frac{l^2}{l^4} = \int l^3 dl \frac{l^2}{l^4} = \int l dl \equiv l^2 \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty \quad (5.93)$$

- Le second terme de $I_{\mu\nu}^{(A)}$ ainsi que l'intégrale $I_{\mu\nu}^{(B)}$ contiennent des divergences uv logarithme car pour $n = 4$, on a :

$$\int \frac{d^4 l}{l^4} = \int \frac{l^3 dl}{l^4} = \int \frac{dl}{l} \equiv \ln(l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty \quad (5.94)$$

Étape 3 : intégration sur la 4-impulsion l

On utilise l'intégrale $I(r, m)$ donnée par l'éq. (5.61) pour effectuer l'intégration sur la 4-impulsion l . On peut montrer que le premier terme de $I_{\mu\nu}^{(A)}$ est nulle. On a,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{R^2 - l^2(n-2)/n}{[l^2 - R^2]^2} &= R^2 \times I(0, 2) - \frac{n-2}{n} \times I(1, 2) \\
 &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{(R^2)^{1-n/2}} \left[\frac{n-2}{2} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) + \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \right] \\
 &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{(R^2)^{1-n/2}} \left[\frac{n-2}{2} + 1 - \frac{n}{2} \right] \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) \\
 &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \frac{1}{(R^2)^{1-n/2}} \left[\frac{n-2}{2} + \frac{2-n}{2} \right] \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

Donc, l'intégrale $I_{\mu\nu}^{(A)}$ devient

$$\begin{aligned}
 I_{\mu\nu}^{(A)} &= 8g_{\mu\nu} \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{q^2 x(1-x)}{[l^2 - R^2]^2} \\
 &= 8g_{\mu\nu} q^2 x(1-x) I(0, 2) \\
 &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) 8x(1-x) [m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda]^{-2+n/2} q^2 g_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{5.96}$$

De la même manière, on montre que :

$$I_{\mu\nu}^{(B)} = -\frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) 8x(1-x) [m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda]^{-2+n/2} q_\mu q_\nu \tag{5.97}$$

En remplaçant les deux dernières intégrales dans l'éq. (5.83), on montre que l'opérateur de polarisation prend la forme :

$$\begin{aligned}
 i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) &= -\frac{8i}{(4\pi)^{n/2}} e^2 \mu^{(4-n)} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \\
 &\quad \times \int_0^1 dx x(1-x) [m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda]^{-2+n/2}
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

On voit que

$$\begin{aligned}
 q^\mu (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) &= (q^2 q_\nu - q^2 q_\nu) = 0 \\
 q^\nu (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) &= (q^2 q_\mu - q^2 q_\mu) = 0
 \end{aligned} \tag{5.99}$$

donc l'opérateur de polarisation est transverse, c.à.d.

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = 0 \quad q^\nu \Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = 0 \tag{5.100}$$

Remarques :

- Les divergences uv de l'opérateur de polarisation sont cachées dans la fonction $\Gamma(2 - \frac{n}{2})$. On peut voir ça si on prend $n = 4$, on obtient $\Gamma(0) \rightarrow \infty$.
- Grace à la régularisation dimensionnelle (c.à.d. $n = 4 - 2\epsilon_{uv}$), on peut isoler ces divergences de la partie finie par un développement limité de Taylor autour de $\epsilon_{uv} = 0$. On a :

$$\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) = \Gamma(\epsilon_{uv}) = \frac{1}{\epsilon_{uv}} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon_{uv}) \tag{5.101}$$

$$a^{\epsilon_{uv}} = 1 + \epsilon_{uv} \ln(a) + \mathcal{O}(\epsilon_{uv}) \tag{5.102}$$

où γ est la constante d'Euler et a est une fonction analytique arbitraire (indépendante de ε_{uv}).

Grace à ce développement, on peut écrire l'opérateur de polarisation sous la forme

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = \frac{a_{\mu\nu}}{\varepsilon_{uv}} + b_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon_{uv}) \quad (5.103)$$

où le premier terme contient que les divergences uv et le deuxième terme donne la partie finie. Dans la suite, on va calculer explicitement les quantités $a_{\mu\nu}$ et $b_{\mu\nu}$.

Étape 4 : Extraction du terme divergeant et calcul de la partie finie :

Comme on a mentionné dans le dernier paragraphe, on pose $n = 4 - 2\varepsilon_{uv}$, puis on fait un développement limité autour de $\varepsilon_{uv} = 0$ en gardant que les termes divergeant (c.à.d. les termes de pôle $1/\varepsilon_{uv}$) et les termes constants (c.à.d. les termes en ε_{uv}^0). On obtient donc :

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) &= -\frac{8i\alpha}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_{uv}} [1 - \varepsilon_{uv}\gamma + \varepsilon_{uv}\ln(4\pi)] (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \\ &\quad \times \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda}{\mu^2} \right]^{-\varepsilon_{uv}} \\ &= -\frac{i\alpha}{3\pi} (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right. \\ &\quad \left. - 6 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[\frac{m^2 - (q^2 + i\lambda)x(1-x)}{\mu^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.104)$$

Il nous reste donc qu'à calculer la dernière intégrale, que l'on note par I . On a :

$$I(q^2, m^2, \mu^2) = \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[\frac{m^2 - (q^2 + i\lambda)x(1-x)}{\mu^2} \right] \quad (5.105)$$

Pour calculer I , on doit distinguer 3 cas possibles :

- **Case 1 : $q^2 < 0$**

Dans ce cas, l'argument du logarithme est positif $\forall x \in [0, 1]$ (c.à.d. $m^2 - q^2 x(1-x) > 0$), donc on peut enlever la partie imaginaire $i\lambda$. On réécrit l'argument du logarithme comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{m^2 - q^2 x(1-x)}{\mu^2} &= \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) \left(-x^2 + x - \frac{m^2}{q^2} \right) \\ &= \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) (x - x_-)(x_+ - x) \end{aligned} \quad (5.106)$$

avec

$$x_- = \frac{1 - \beta}{2} \quad x_+ = \frac{1 + \beta}{2} \quad (5.107)$$

et

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} > 1 \quad (5.108)$$

On a

$$\left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) > 0 \quad (x - x_-) > 0 \quad (x_+ - x) > 0 \quad (5.109)$$

Car l'argument du logarithme s'écrit comme le produit de trois termes positifs, donc on peut, sans problème, décomposer le logarithme dans l'intégrale I , cf. eq. (5.105), en somme de 3 termes, c.à.d.

$$\ln \left[\frac{m^2 - (q^2 + i\lambda)x(1-x)}{\mu^2} \right] = \ln \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) + \ln(x - x_-) + \ln(x_+ - x) \quad (5.110)$$

et l'intégrale I devient

$$I(q^2, m^2, \mu^2) = \int_0^1 dx x(1-x) \left[\ln \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) + \ln(x - x_-) + \ln(x_+ - x) \right] \quad (5.111)$$

On intègre sur x , après simplification on trouve :

$$\begin{aligned} I(q^2, m^2, \mu^2) &= \frac{1}{6} \left[\ln \left(\frac{-q^2}{4\mu^2} \right) + \ln(\beta^2 - 1) \right] + \frac{\beta}{4} \left(1 - \frac{\beta^2}{3} \right) \ln \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right) - \frac{4}{9} + \frac{\beta^2}{6} \\ &= \frac{1}{6} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + \frac{\beta}{4} \left(1 - \frac{\beta^2}{3} \right) \ln \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right) - \frac{4}{9} + \frac{\beta^2}{6} \end{aligned} \quad (5.112)$$

- **Case 2 : $q^2 > 0$ et $q^2 > 4m^2$**

Dans ce cas l'argument de la racine dans la variable ρ reste positif mais car $0 < 4m^2/q^2 < 1$, on déduit que $\beta < 1$. Alors, le logarithme $\ln(\beta - 1)$ dans (5.112) pose un problème car son argument est négatif. Pour cela, il faut faire une continuation analytique de la formule (5.112) en remettant la partie imaginaire $i\lambda$ dans la variable β , alors

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2 + i\lambda}} \simeq \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + i\lambda \quad (5.113)$$

et donc

$$\begin{aligned} \ln(\beta - 1) &\stackrel{\lambda \rightarrow 0}{=} \ln(|\beta - 1|) + i\pi \\ \ln(\beta + 1) &\stackrel{\lambda \rightarrow 0}{=} \ln(|\beta + 1|) \\ \ln \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right) &\stackrel{\lambda \rightarrow 0}{=} \ln \left(\left| \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right| \right) - i\pi \end{aligned} \quad (5.114)$$

Après le prolongement analytique, I s'écrit

$$I(q^2, m^2, \mu^2) = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + \frac{\beta}{4} \left(1 - \frac{\beta^2}{3} \right) \left[\ln \left(\left| \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right| \right) - i\pi \right] - \frac{4}{9} + \frac{\beta^2}{6} \quad (5.115)$$

- **Case 3 : $q^2 > 0$ et $q^2 < 4m^2$**

Dans ce cas, la variable β est purement imaginaire car l'argument à l'intérieur de la racine est négatif. En changeant $\beta \rightarrow i\tilde{\beta}$ avec

$$\tilde{\beta} = \sqrt{\frac{4m^2}{q^2} - 1} \quad (5.116)$$

on trouve

$$I(q^2, m^2, \mu^2) = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + \frac{\tilde{\beta}}{2} \left(1 + \frac{\tilde{\beta}^2}{3} \right) \arctan(\tilde{\beta}) - \frac{4}{9} - \frac{\tilde{\beta}^2}{6} \quad (5.117)$$

Finalement, on a :

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q) = -\frac{i\alpha}{3\pi} (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma - 6I(q^2, m^2, \mu^2) \right\} \quad (5.118)$$

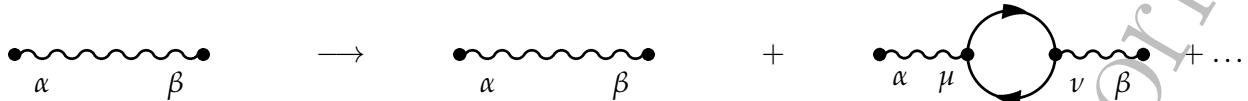
Considérons, maintenant, le propagateur du photon modifié. Dans la jauge de Landau (c.à.d. $\xi = 0$), on a :

$$\frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 + i\lambda} \rightarrow \frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 + i\lambda} + \frac{-iG_{\alpha\mu}(q)}{q^2 + i\lambda} [i\Pi^{(1)\mu\nu}(q)] \frac{-iG_{\nu\beta}(q)}{q^2 + i\lambda} + \dots \quad (5.119)$$

avec

$$G_{\alpha\beta}(q) = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right). \quad (5.120)$$

Schématiquement on représente le propagateur modifié par le diagramme suivant :



On réécrit l'opérateur de polarisation sous la forme :

$$\Pi^{(1)\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \tilde{\Pi}^{(1)}(q) \quad (5.121)$$

avec

$$\tilde{\Pi}^{(1)}(q) = \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma - 6I(q^2, m^2, \mu^2) \right\} \quad (5.122)$$

On remplace dans l'équation (5.119). On note que la partie en $q^\mu q^\nu$ dans l'éq. (5.121) ne contribue pas car :

$$\begin{aligned} q^\mu G_{\alpha\mu}(q) &= q^\mu \left(g_{\alpha\mu} - \frac{q_\alpha q_\mu}{q^2} \right) = 0 \\ q^\nu G_{\nu\beta}(q) &= q^\nu \left(g_{\nu\beta} - \frac{q_\nu q_\beta}{q^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.123)$$

et

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{\alpha\mu}(q) G_{\nu\beta}(q) &= G_{\alpha\mu}(q) G_{\beta}^{\mu}(q) \\ &= \left(g_{\alpha\mu} - \frac{q_\alpha q_\mu}{q^2} \right) \left(g_{\beta}^{\mu} - \frac{q^\mu q_\beta}{q^2} \right) \\ &= \left(g_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right) \equiv G_{\alpha\beta}(q) \end{aligned} \quad (5.124)$$

Donc, l'équation (5.119) devient

$$\begin{aligned} \frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 + i\lambda} &\rightarrow \frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 + i\lambda} + \frac{-iG_{\alpha\mu}(q)}{q^2 + i\lambda} \left[-ig^{\mu\nu} q^2 \tilde{\Pi}^{(1)}(q) \right] \frac{-iG_{\nu\beta}(q)}{q^2 + i\lambda} \\ &\rightarrow \frac{-iG_{\alpha\mu}(q)}{q^2 + i\lambda} \left\{ 1 - q^2 \tilde{\Pi}^{(1)}(q) \frac{1}{q^2 + i\lambda} \right\} \\ &\rightarrow \frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 + i\lambda} \left\{ 1 - \tilde{\Pi}^{(1)}(q) \right\} \\ &\rightarrow \frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 + i\lambda} \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}^{(1)}(q)} \\ &\rightarrow \frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 + i\lambda + q^2 \tilde{\Pi}^{(1)}(q)} \end{aligned} \quad (5.125)$$

Pour montrer la formule dans la dernière ligne de (5.125), on a utilisé l'approximation suivante :

$$1 - \tilde{\Pi}^{(1)}(q) \approx \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}^{(1)}(q)} \quad (5.126)$$

qui est justifié par le fait que $\tilde{\Pi}^{(1)}(q)$ est d'ordre α (c.à.d. $\tilde{\Pi}^{(1)}(q) \propto \alpha$) et $\alpha \ll 1$.

Le propagateur du photon à une boucle sera donc :

$$\frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 + i\lambda} \rightarrow \frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 [1 + \tilde{\Pi}^{(1)}(q)] + i\lambda} \quad (5.127)$$

Remarques :

- Le propagateur du photon modifié (5.127) possède un pôle à $q^2 = 0$. Cela signifie que la masse du photon n'est pas modifiée par les corrections à une boucle. En d'autres termes, la masse du photon reste nulle.
- La fonction d'onde du photon est affectée par les corrections à une boucle. Le résidu au pôle $q^2 = 0$ du propagateur est modifié et devient $1/(1 + \tilde{\Pi}^{(1)}(0))$.
- Seul le propagateur transverse est affecté par le calcul à une boucle (et à tous les ordres).

5.2.2 Correction fonction d'onde

L'opérateur de masse ou la correction à la fonction d'onde (ou le *self energy* du fermion) à l'ordre α est représenté par le diagramme de Feynman à une boucle (5.5). Dans la jauge de Feynman, il est donné par l'intégrale suivante :

$$-i\Sigma^{(1)}(p^2) = -e^2 \mu^{(4-n)} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\gamma_\nu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\mu}{(p - k)^2 - m^2 + i\lambda} \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\lambda} \quad (5.128)$$

On suit les étapes présentées dans la section précédente pour intégrer sur l'impulsion k tournant dans la boucle (dans un espace-temps à n -dimension), on trouve

$$\Sigma^{(1)} = A(p^2)m + (\not{p} - m)B(p^2) \quad (5.129)$$

avec

$$\begin{aligned} A(p^2) &= \frac{3\alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right) \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \int_0^1 dx (1+x) \ln\left(x - \frac{p^2}{m^2}x(1-x) - i\lambda\right) \right) \end{aligned} \quad (5.130)$$

$$\begin{aligned} B(p^2) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \int_0^1 dx (1-x) \ln\left(x - \frac{p^2}{m^2}x(1-x) - i\lambda\right) \right) \end{aligned} \quad (5.131)$$

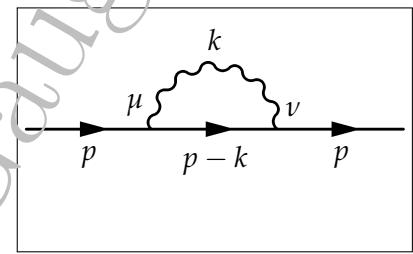


FIGURE 5.5 – *Self-energy* du fermion

Démonstration :

Dans la suite, on donne le calcul complet de l'opérateur de masse. On utilise les relations (5.19) pour montrer que

$$\gamma^\mu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\mu = (2 - n)(\not{p} - \not{k}) + nm \quad (5.132)$$

on trouve

$$\Sigma^{(1)}(p^2) = -i e^2 \mu^{(4-n)} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(2 - n)(\not{p} - \not{k}) + mn}{[(p - k)^2 - m^2 + i\lambda](k^2 + i\lambda)} \quad (5.133)$$

Etape 1 : paramétrisation de Feynman

Pour linéariser le dénominateur de cette intégrale, on utilise la relation (5.38), on obtient :

$$\Sigma^{(1)}(p^2) = -i e^2 \mu^{(4-n)} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(2 - n)(\not{p} - \not{k}) + mn}{[(p - k)^2 - m^2 + i\lambda)x + (k^2 + i\lambda)(1 - x)]^2} \quad (5.134)$$

On écrit le dénominateur de (5.134) sous la forme :

$$(p - k)^2 - m^2 + i\lambda)x + (k^2 + i\lambda)(1 - x)]^2 = [(k - xp)^2 - xm^2 + p^2x(1 - x) + i\lambda]^2 \\ = [(k - xp)^2 - R^2]^2 \quad (5.135)$$

on obtient

$$\Sigma^{(1)}(p^2) = -i e^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(2-n)(p - k) + nm}{[(k - xp)^2 - R^2]^2} \quad (5.136)$$

avec

$$R^2 = m^2x - p^2x(1 - x) - i\lambda \quad (5.137)$$

Étape 2 : shift $k = l + xp$

On fait le changement de variable $k = l + px$, on trouve

$$\Sigma^{(1)}(p^2) = -i e^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(2-n)(1-x)p + nm}{(l^2 - R^2)^2} \\ + i e^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(2-n)l}{(l^2 - R^2)^2} \quad (5.138)$$

On note que la dernière intégrale est nulle car le numérateur est une puissance impaire en l . Donc, il reste que

$$\Sigma^{(1)}(p^2) = -i e^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(2-n)(1-x)p + nm}{(l^2 - R^2)^2} \quad (5.139)$$

Étape 3 : intégration sur l en utilisant $I(r, m)$

L'intégrale dans l'éq. (5.139) est de type $I(r, m)$ (avec $r = 0$ et $m = 2$) voir la formule (5.61), alors on obtient

$$\Sigma^{(1)}(p^2) = \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{(2-n)(1-x)p + nm}{(m^2x - p^2x(1-x) - i\lambda)^{2-n/2}} \quad (5.140)$$

$$= A(p^2)m + (p - m)B(p^2) \quad (5.141)$$

avec

$$A(p^2) = \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{2(1-x) + nx}{[m^2x - p^2x(1-x) - i\lambda]^{2-n/2}} \quad (5.142)$$

$$B(p^2) = \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{(2-n)(1-x)}{[m^2x - p^2x(1-x) - i\lambda]^{2-n/2}} \quad (5.143)$$

Étape 4 : extraction du terme divergent

Par un simple comptage de puissance on s'aperçoit que cette intégrale diverge dans la région UV . On pose donc $n = 4 - 2\epsilon_{uv}$ et on fait un développement limité autour de $\epsilon_{uv} = 0$ en gardant que les termes jusqu'au l'ordre ϵ_{uv}^0 (c.à.d. les termes de pôle $1/\epsilon_{uv}$ ainsi que les termes constants lorsque $\epsilon_{uv} \rightarrow 0$). On a

$$\begin{aligned} \mu^{2\epsilon_{uv}}|_{\epsilon_{uv} \rightarrow 0} &= 1 + \epsilon_{uv} \ln(\mu^2) + \mathcal{O}(\epsilon_{uv}^2). \\ (4\pi)^{-2+\epsilon_{uv}}|_{\epsilon_{uv} \rightarrow 0} &= \frac{1}{(4\pi)^2} [1 + \epsilon_{uv} \ln(4\pi)] + \mathcal{O}(\epsilon_{uv}^2). \\ \Gamma(\epsilon_{uv})|_{\epsilon_{uv} \rightarrow 0} &= \frac{1}{\epsilon_{uv}} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon_{uv}). \\ [m^2x - p^2x(1-x) - i\lambda]^{-\epsilon_{uv}}|_{\epsilon_{uv} \rightarrow 0} &= 1 - \epsilon_{uv} \ln(m^2) \\ &\quad - \epsilon_{uv} \ln \left[x - \frac{p^2}{m^2} x(1-x) - i\lambda \right] + \mathcal{O}(\epsilon_{uv}) \end{aligned} \quad (5.144)$$

En gardant que les termes en $1/\epsilon_{uv}$ et les termes constants, on trouve

$$\begin{aligned} A(p^2) &= \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \int_0^1 dx (1+x) \ln\left(x - \frac{p^2}{m^2}x(1-x) - i\lambda\right) \right] \end{aligned} \quad (5.145)$$

$$\begin{aligned} B(p^2) &= -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \int_0^1 dx (1-x) \ln\left(x - \frac{p^2}{m^2}x(1-x) - i\lambda\right) \right] \end{aligned} \quad (5.146)$$

avec $\alpha = e^2/(4\pi)$.

Remarque : terme de jauge

Le calcul qu'on fait précédemment est dans la jauge de Feynman ($\xi = 1$). Si on aurait garder le terme dépendant de jauge dans le propagateur du photon (ξ arbitraire), on aurait obtenu

$$\Sigma^{(1)}(p^2) = A(p^2)m + (\not{p} - m)[B(p^2) + B_\xi(p^2)] \quad (5.147)$$

avec

$$\begin{aligned} B_\xi(p^2) &= \frac{\alpha}{4\pi} (1-\xi) \left[\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln\left(x - \frac{p^2}{m^2}x(1-x) - i\lambda\right) \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx (1-x) \frac{x(1-x)p^2 + xm\not{p}}{m^2x - p^2x(1-x) - i\lambda} \right] \end{aligned} \quad (5.148)$$

Exercice 4. terme dépendant de la jauge

(1) Montrer que

$$(\gamma_\nu(\not{p} - \not{k} + m)\gamma_\mu)k^\mu k^\nu = -((p-k)^2 - m^2)\not{k} + (\not{p} - m)[\not{k}(\not{p} + m) - k^2] \quad (5.149)$$

(2) Montrer que le terme dépendant de la jauge peut s'écrire sous la forme :

$$-i\Sigma_\xi^{(1)}(p^2) = e^2 \mu^{(4-n)} (1-\xi) (\not{p} - m) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\not{k}(\not{p} + m) - k^2}{((p-k)^2 - m^2 + i\lambda)(k^2 + i\lambda)^2} \quad (5.150)$$

(3) Après paramétrisation de Feynman et le changement de variable $k = l + xp$, montrer qu'on trouve

$$-i\Sigma_\xi^{(1)}(p^2) = 2e^2 \mu^{(4-n)} (1-\xi) (\not{p} - m) \int_0^1 dx \times \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{-l^2 - p^2 x^2 + x(p^2 + m\not{p})}{(l^2 - R^2)^3} \quad (5.151)$$

(4) Intégrer sur l et montrer qu'on trouve

$$\begin{aligned} \Sigma_\xi^{(1)}(p^2) &= \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (1-\xi) (\not{p} - m) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx (1-x) \\ &\quad \times \frac{1}{(R^2)^{2-n/2}} \left[\frac{n}{2} + \left(2 - \frac{n}{2}\right) \frac{x(1-x)p^2 + xm\not{p}}{R^2} \right] \end{aligned} \quad (5.152)$$

(5) Faire un développement limité autour de $\varepsilon_{uv} = 0$ et montrer que

$$\begin{aligned}\Sigma_{\xi}^{(1)}(p^2) &= \frac{\alpha}{4\pi}(1-\xi)(p-m)\left[\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right. \\ &\quad - \frac{1}{2} - 2\int_0^1 dx(1-x)\ln\left(x - \frac{p^2}{m^2}x(1-x) - i\lambda\right) \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx(1-x)\frac{x(1-x)p^2 + xm\cancel{p}}{m^2x - p^2x(1-x) - i\lambda}\right]\end{aligned}\quad (5.153)$$

avec

$$\Sigma_{\xi}^{(1)}(p) = (\cancel{p} - m)B_{\xi}(p^2). \quad (5.154)$$

5.2.3 Correction du vertex

La correction au vertex, en QED, est obtenue par l'émission et l'absorption d'un photon virtuel (de 4-impulsion k) par les deux fermions (de 4-impulsions p_1 et p_2), voir la figure (5.6). On note que le vertex à une boucle, n'est pas comme les autres diagrammes qu'on a déjà calculé dans les deux sections précédentes, il diverge à la fois dans l'ultraviolet et l'infrarouge.

Le vertex propre à l'ordre e^3 est une fonction ou une intégrale de Feynman à 3 points (3 vertex QED). La conservation de l'énergie-impulsion implique que :

$$q = p_2 - p_1 \quad (5.155)$$

où p_1 et q sont des 4-impulsions entrantes et p_2 une 4-impulsion sortante. On suppose que les deux pattes fermioniques sont sur couche de masse $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ (c.à.d. elles sont associées aux fermions réels de masse m).

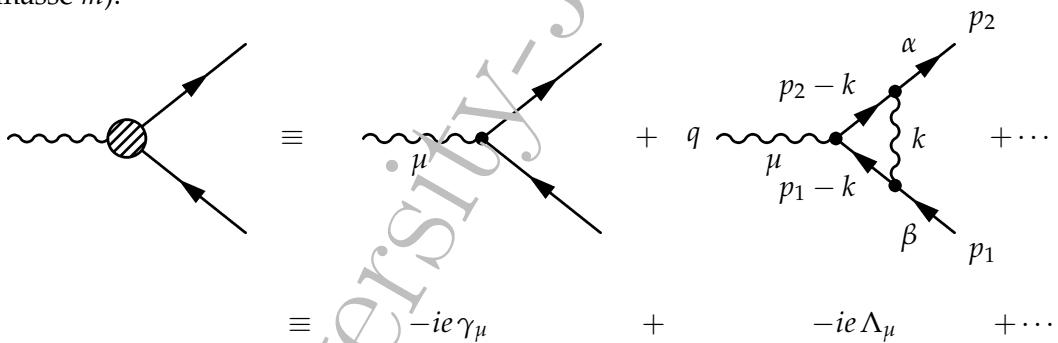


FIGURE 5.6 – Correction au vertex propre à l'ordre e^3 .

Dans la jauge de Lorentz et pour un paramètre de jauge arbitraire (ξ est arbitraire), le vertex à une boucle (à l'ordre e^3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}-ie\mu^{(2-n/2)}\Lambda_{\mu}^{(1)}(q, p_1, p_2) &= -e^3\mu^{3(2-n/2)}\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_{\alpha} \frac{\cancel{p}_2 - \cancel{k} + m}{(p_2 - k)^2 - m^2 + i\lambda} \gamma_{\mu} \\ &\quad \times \frac{\cancel{p}_1 - \cancel{k} + m}{(p_1 - k)^2 - m^2 + i\lambda} \gamma_{\beta} \left[\frac{g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\lambda} - (1 - \xi) \frac{k^{\alpha}k^{\beta}}{(k^2 + i\lambda)^2} \right]\end{aligned}\quad (5.156)$$

Dans la jauge de Feynman (c.à.d. $\xi = 1$), qu'on va adopter par la suite car le calcul dans cette jauge est plus simple, on a :

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mu}^{(1)}(q, p_1, p_2) &= -ie^2\mu^{(4-n)} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \\ &\quad \frac{\gamma_{\alpha}(\cancel{p}_2 - \cancel{k} + m)\gamma_{\mu}(\cancel{p}_1 - \cancel{k} + m)\gamma^{\alpha}}{[(p_2 - k)^2 - m^2 + i\lambda][(p_1 - k)^2 - m^2 + i\lambda][k^2 + i\lambda]}\end{aligned}\quad (5.157)$$

Pour simplifier le numérateur de l'éq. (5.157), il vaut mieux prendre en compte le fait que les pattes fermioniques du vertex représentent des fermions physiques (le photon est virtuel dans ce cas), donc leurs spineurs vérifient les équations de Dirac suivantes :

$$\bar{u}(p_2) \not{p}_2 = m \bar{u}(p_2) \quad \not{p}_1 u(p_1) = m u(p_1) \quad (5.158)$$

Un diagramme de Feynman contenant un vertex dans des processus $2 \rightarrow 2$ (comme $\gamma^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$, voir le début de cette section) prend la forme suivante :

$$\bar{u}(p_2) \Lambda_\mu^{(1)}(q, p_1, p_2) u(p_1) (\dots) \quad (5.159)$$

Contractons, tout d'abord, le numérateur de l'éq. (5.157) sur les indices α en utilisant les relations (5.19), on obtient

$$\begin{aligned} N &= \gamma_\alpha (\not{p}_2 - \not{k} + m) \gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k} + m) \gamma^\alpha \\ &= \gamma_\alpha (\not{p}_2 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma^\alpha + m \gamma_\alpha (\not{p}_2 - \not{k}) \gamma_\mu \gamma^\alpha + m \gamma_\alpha \gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}) \gamma^\alpha + m^2 \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma^\alpha \\ &= -2(\not{p}_1 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_2 - \not{k}) + (4-n)(\not{p}_2 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}) + 4m [\not{p}_2 - \not{k}]_\mu \\ &\quad - (4-n)m (\not{p}_2 - \not{k}) \gamma_\mu + 4m [\not{p}_1 - \not{k}]_\mu - (4-n)m \gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}) + (2-n)m^2 \gamma_\mu \end{aligned} \quad (5.160)$$

Pour employer les équations de Dirac (5.158), on anti-commute \not{p}_1 et \not{p}_2 pour que \not{p}_2 apparaisse à gauche et \not{p}_1 à droite. A l'aide de $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 4g_{\mu\nu}$, on montre que

$$\not{q}_2 \gamma_\mu \not{q}_1 = q_2^\alpha q_1^\beta (\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta) = q_2^\alpha q_1^\beta (-\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha + 4g_{\alpha\mu} \gamma_\beta - 4g_{\alpha\beta} \gamma_\mu + 4g_{\mu\beta} \gamma_\alpha) = -\not{q}_1 \gamma_\mu \not{q}_2 + 4q_2 \gamma_\mu \not{q}_1 - 4q_1 \cdot q_2 \gamma_\mu + 4q_1 \gamma_\mu \not{q}_2 \quad (5.161)$$

$$\not{q} \gamma_\mu = q^\alpha \gamma_\alpha \gamma_\mu = q^\alpha (-\gamma_\mu \gamma_\alpha + 4g_{\alpha\mu}) = -\gamma_\mu \not{q} + 4q_\mu \quad (5.162)$$

$$\gamma_\mu \not{q} = q^\alpha \gamma_\mu \gamma_\alpha = q^\alpha (-\gamma_\alpha \gamma_\mu + 4g_{\mu\alpha}) = -\not{q} \gamma_\mu + 4q_\mu \quad (5.163)$$

donc

$$\begin{aligned} N &= -2(\not{p}_2 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}) + 8[\not{p}_{2\mu} - \not{k}_\mu] (\not{p}_1 - \not{k}) - 8(\not{p}_1 - \not{k}) \cdot (\not{p}_2 - \not{k}) \\ &\quad + 8[\not{p}_{1\mu} - \not{k}_\mu] (\not{p}_2 - \not{k}) + (4-n)(\not{p}_2 - \not{k}) \gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}) \\ &\quad + 4m [\not{p}_2 - \not{k}]_\mu + (4-n)(\not{p}_2 - \not{k}) \gamma_\mu - 4(4-n)[\not{p}_{2\mu} - \not{k}_\mu] \\ &\quad + 4m [\not{p}_1 - \not{k}]_\mu + (4-n)\gamma_\mu (\not{p}_1 - \not{k}) - 4(4-n)[\not{p}_{1\mu} - \not{k}_\mu] \\ &\quad + (2-n)m^2 \gamma_\mu \end{aligned} \quad (5.164)$$

Utilisons les équations de Dirac (5.158), alors

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2) N u(p_1) &= -2(m - \not{k}) \gamma_\mu (m - \not{k}) + 8[\not{p}_{2\mu} - \not{k}_\mu] (m - \not{k}) - 8(\not{p}_1 - \not{k}) \cdot (\not{p}_2 - \not{k}) \\ &\quad + 8[\not{p}_{1\mu} - \not{k}_\mu] (m - \not{k}) + (4-n)(m - \not{k}) \gamma_\mu (m - \not{k}) \\ &\quad + 4m [\not{p}_2 - \not{k}]_\mu + (4-n)(m - \not{k}) \gamma_\mu - 4(4-n)[\not{p}_{2\mu} - \not{k}_\mu] \\ &\quad + 4m [\not{p}_1 - \not{k}]_\mu + (4-n)\gamma_\mu (m - \not{k}) - 4(4-n)[\not{p}_{1\mu} - \not{k}_\mu] \\ &\quad - (2-n)m^2 \gamma_\mu \end{aligned} \quad (5.165)$$

Après simplification, on trouve :

$$N \equiv [4p_2 \cdot p_1 + (n-2)k^2 - 4(p_2 + p_1) \cdot k] \gamma^\mu + 4(p_2^\mu + p_1^\mu) \not{k} - 2k^\mu (2m + (n-2)k) \quad (5.166)$$

Étape 1 : paramétrisation de Feynman

On linéarise le dénominateur à l'aide de la relation (5.40), alors on a :

$$\begin{aligned} xy D_1 + y(1-x) D_2 + (1-y) D_3 &= k^2 - 2y k \cdot [x p_2 + (1-x) p_1] + i\lambda \\ &= \{k - 2y k \cdot [x p_2 + (1-x) p_1]\}^2 - y^2 \cdot [x p_2 + (1-x) p_1]^2 + i\lambda \end{aligned} \quad (5.167)$$

où

$$D_1 = [(p_2 - k)^2 - m^2 + i\lambda], \quad D_2 = [(p_1 - k)^2 - m^2 + i\lambda], \quad D_3 = [k^2 + i\lambda]. \quad (5.168)$$

Alors, l'intégrale $\Lambda_\mu^{(1)}$ devient

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(1)}(p_2, p_1, q) &= -ie^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \\ &\times \frac{N}{[\{k - y(p_2 x + p_1(1-x))\}^2 - y^2 \{p_2 x + p_1(1-x)\}^2 + i\lambda]^3}. \end{aligned} \quad (5.169)$$

Étape 2 : translation $l = k - y(p_2 x + p_1(1-x))$

Nous introduisons le changement de variable suivant :

$$l = k - y(p_2 x + p_1(1-x)). \quad (5.170)$$

En conservant uniquement les termes avec un nombre pair de puissances de l , le numérateur devient :

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \frac{(n-2)^2}{n} \gamma^\mu l^2 + \gamma^\mu [4p_2 \cdot p_1 - 4y(m^2 + p_2 \cdot p_1) + (n-2)y^2 \\ &\quad \times (p_2 x + p_1(1-x))^2] + 4y[(p_2 + p_1)^\mu (p_2 x + p_1(1-x)) \\ &\quad - m(p_2^\mu x + p_1^\mu(1-x))] - 2(n-2)y^2(p_2^\mu x + p_1^\mu(1-x)) \\ &\quad \times (p_2 x + p_1(1-x)). \end{aligned} \quad (5.171)$$

$$\equiv al^2 + b \quad (5.172)$$

avec

$$a = \frac{(n-2)^2}{n} \gamma^\mu \quad (5.173)$$

$$\begin{aligned} b &= \gamma^\mu [4p_2 \cdot p_1 - 4y(m^2 + p_2 \cdot p_1) + (n-2)y^2(p_2 x + p_1(1-x))^2] \\ &\quad + 4y[(p_2 + p_1)^\mu (p_2 x + p_1(1-x)) - m(p_2^\mu x + p_1^\mu(1-x))] \\ &\quad - 2(n-2)y^2(p_2^\mu x + p_1^\mu(1-x))(p_2 x + p_1(1-x)). \end{aligned} \quad (5.174)$$

Le dénominateur peut être simplifié et $\Lambda^{(1)}$ devient :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p_2, p_1, q) = -ie^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{al^2 + b}{[l^2 - R^2 + i\lambda]^3}. \quad (5.175)$$

avec

$$R^2 = y^2 [m^2 - q^2 x(1-x)]. \quad (5.176)$$

La partie en al^2 engendrera une divergence ultraviolette car $\int \frac{d^4 l l^2}{l^6} = \int \frac{d^4 l}{l^4} = \int \frac{l^3 dl}{l^4} \sim \ln(l)|_{l \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$ (nous prenons donc $n = 4 - 2\epsilon_{uv}$), tandis que la partie constante (en b) engendrera une divergence infrarouge car $\int \frac{d^4 l}{l^6} = \int \frac{d^4 l}{l^6} = \int \frac{l^3 dl}{l^6} \sim 1/l^2|_{l \rightarrow 0} \rightarrow \infty$ (nous prenons $n = 4 + 2\epsilon_{ir}$). Ainsi, nous exprimons $\Lambda^{(1)}$ comme la somme d'une partie n'engendrant que des divergences ultraviolettes (noté $\Lambda_\mu^{(1)}(\epsilon_{uv})$) et une partie n'engendrant que des divergences infrarouges (noté $\Lambda_\mu^{(1)}(\epsilon_{ir})$)

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p_2, p_1, q) = \Lambda_\mu^{(1)}(\epsilon_{uv}) + \Lambda_\mu^{(1)}(\epsilon_{ir}) \quad (5.177)$$

avec

$$\Lambda_\mu^{(1)}(\epsilon_{uv}) = -ie^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{al^2}{[l^2 - R^2 + i\lambda]^3} \quad (5.178)$$

$$\Lambda_\mu^{(1)}(\epsilon_{ir}) = -ie^2 \mu^{(4-n)} \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{b}{[l^2 - R^2 + i\lambda]^3} \quad (5.179)$$

Étape 3 : Intégration sur l

L'intégration des deux contributions par rapport à la 4-impulsion l , à l'aide de la formule (5.61), nous fournit :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{uv}) = e^2 \frac{\mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{(n-2)^2}{2} \gamma^\mu \Gamma(2 - \frac{n}{2}) \int_0^1 dx (m^2 - q^2 x (1-x) - i\lambda)^{n/2-2} \int_0^1 dy y^{n-3} \quad (5.180)$$

$$\Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{ir}) = -e^2 \frac{\mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(3 - \frac{n}{2}) \int_0^1 dx (m^2 - q^2 x (1-x) - i\lambda)^{n/2-3} \int_0^1 dy y^{n-5} F(y) \quad (5.181)$$

avec

$$\begin{aligned} F(y) &= 4 p_2 \cdot p_1 \gamma^\mu + 4y \left[-\gamma^\mu (m^2 + p_2 \cdot p_1) + (p_2 + p_1)^\mu (\not{p}_2 x + \not{p}_1 (1-x)) \right. \\ &\quad \left. - m (p_2^\mu x + p_1^\mu (1-x)) \right] + (n-2)y^2 \left[\gamma^\mu (p_2 x + p_1 (1-x))^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(p_2^\mu x + p_1^\mu (1-x)) (\not{p}_2 x + \not{p}_1 (1-x)) \right] \\ &\equiv a_2 y^2 + a_1 y + a_0. \end{aligned} \quad (5.182)$$

où

$$\begin{aligned} a_2 &= (n-2) \left[\gamma^\mu (p_2 x + p_1 (1-x))^2 \right. \\ &\quad \left. - 2(p_2^\mu x + p_1^\mu (1-x)) (\not{p}_2 x + \not{p}_1 (1-x)) \right]. \end{aligned} \quad (5.183)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \left[-\gamma^\mu (m^2 + p_2 \cdot p_1) + (p_2 + p_1)^\mu (\not{p}_2 x + \not{p}_1 (1-x)) \right. \\ &\quad \left. - m (p_2^\mu x + p_1^\mu (1-x)) \right]. \end{aligned} \quad (5.184)$$

$$a_0 = 4 p_2 \cdot p_1 \gamma^\mu \quad (5.185)$$

L'intégration par rapport à la variable y s'effectue de manière aisée. Pour la composante uv , le résultat est le suivant :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{uv}) = e^2 \frac{\mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{n-2}{2} \gamma^\mu \Gamma(2 - \frac{n}{2}) \int_0^1 dx (m^2 - q^2 x (1-x) - i\lambda)^{n/2-2} \quad (5.186)$$

Concernant la contribution $\Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{ir})$. Cette intégration va induire une divergence infrarouge, on a :

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{ir}) &= -e^2 \frac{\mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(3 - \frac{n}{2}) \int_0^1 dx (m^2 - q^2 x (1-x) - i\lambda)^{n/2-3} \int_0^1 dy y^{n-5} [a_2 y^2 + a_1 y + a_0] \\ &= -e^2 \frac{\mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(3 - \frac{n}{2}) \int_0^1 dx (m^2 - q^2 x (1-x) - i\lambda)^{n/2-3} \left[\frac{a_2}{n-2} + \frac{a_1}{n-3} + \frac{a_0}{n-4} \right] \end{aligned} \quad (5.187)$$

où le terme en a_0 est le responsable de la divergence infra-rouge (car $n-4=2\varepsilon_{ir}$).

On note qu'on peut substituer systématiquement \not{p}_1 et \not{p}_2 par m dans les coefficient, car les fermions externes sont sur couche de masse. Donc,

$$a_2 = (n-2) \left[\gamma^\mu [p_2 x + p_1 (1-x)]^2 - 2m [p_2^\mu x + p_1^\mu (1-x)] \right]. \quad (5.188)$$

$$a_1 = 4 \left[-\gamma^\mu (m^2 + p_2 \cdot p_1) + m (p_2 + p_1)^\mu - m (p_2^\mu x + p_1^\mu (1-x)) \right]. \quad (5.189)$$

$$a_0 = 4 p_2 \cdot p_1 \gamma^\mu \quad (5.190)$$

Il n'en reste qu'à intégrer sur x (dans les deux contributions $\Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{uv})$ et $\Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{ir})$). L'intégration sur x revient à calculer les trois intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^1 dx [m^2 - q^2 x (1-x) - i\lambda]^{n/2-3}. \quad (5.191)$$

$$J_2 = \int_0^1 dx [m^2 - q^2 x (1-x) - i\lambda]^{n/2-3} [p_2^\mu x + p_1^\mu (1-x)] \quad (5.192)$$

$$J_3 = \int_0^1 dx [m^2 - q^2 x (1-x) - i\lambda]^{n/2-3} [p_2 x + p_1 (1-x)]^2. \quad (5.193)$$

En fait, on peut rendre l'intégrale J_2 sous forme de J_1 en effectuant le changement de variable $x \rightarrow (1-x)$, on a :

$$\begin{aligned} 2J_2 = J_2 + J_2^{x \rightarrow (1-x)} &= \int_0^1 dx [m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda]^{n/2-3} [p_2^\mu x + p_1^\mu (1-x)] \\ &+ \int_0^1 dx [m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda]^{n/2-3} [p_2^\mu (1-x) + p_1^\mu x] \\ &= \int_0^1 dx [m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda]^{n/2-3} [p_2^\mu + p_1^\mu] \end{aligned} \quad (5.194)$$

Donc,

$$J_2 = \frac{1}{2} [p_2^\mu + p_1^\mu] \int_0^1 dx [m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda]^{n/2-3} \quad (5.195)$$

$$= \frac{1}{2} [p_2^\mu + p_1^\mu] J_1. \quad (5.196)$$

On utilise le fait que $q^2 = (p_2 - p_1)^2 = 2m^2 - 2p_1 \cdot p_2$, on montre que J_3 peut s'écrire sous la forme :

$$J_3 = \int_0^1 dx [m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda]^{n/2-3} [m^2 - q^2 x(1-x)] \quad (5.197)$$

Donc, on peut remplacer les coefficients a_2 , a_1 et a_0 par :

$$a_2 \rightarrow (n-2) \{ \gamma^\mu [m^2 - q^2 x(1-x)] - m [p_1^\mu + p_2^\mu] \}. \quad (5.198)$$

$$a_1 \rightarrow 4 \left[-\gamma^\mu \left(2m^2 - \frac{q^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (p_2 + p_1)^\mu m \right]. \quad (5.199)$$

$$a_0 = 2(2m^2 - q^2) \gamma^\mu \quad (5.200)$$

Nous obtenons l'expression suivante pour la partie infra-rouge :

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{ir}) &= -e^2 \frac{\mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(3 - \frac{n}{2}) \int_0^1 dx (m^2 - q^2 x(1-x) - i\lambda)^{n/2-3} \left\{ 2(2m^2 - q^2) \frac{\gamma^\mu}{n-4} \right. \\ &+ \left. \frac{4}{n-3} \left[-\gamma^\mu \left(2m^2 - \frac{q^2}{2} \right) + \frac{1}{2} (p_2 + p_1)^\mu m \right] + [\gamma^\mu (m^2 - q^2 x(1-x)) - m (p_2 + p_1)^\mu] \right\} \end{aligned} \quad (5.201)$$

Étape 4 : extraction des termes divergents et calcul des termes finis

Pour $\Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{uv})$, on fixe la dimension à $n = 4 - 2\varepsilon_{uv}$, où ε_{uv} est un paramètre de régularisation ultra-violet. On développe l'expression autour de $\varepsilon_{uv} = 0$. On ne garde que les termes qui contribuent à la limite $\varepsilon_{uv} \rightarrow 0$. En suivant ces étapes, on obtient l'expression suivante pour la partie ultra-violette :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{uv}) = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma^\mu \left[\frac{1}{\varepsilon_{uv}} - \gamma + \ln(4\pi) - 1 - I_3 \right] \quad (5.202)$$

avec :

$$I_3 = \int_0^1 dx \ln \left[\frac{m^2 - (q^2 + i\lambda)x(1-x)}{\mu^2} \right]. \quad (5.203)$$

Pour $\Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{ir})$, on fixe la dimension à $n = 4 + 2\varepsilon_{ir}$, où ε_{ir} est un paramètre de régularisation infra-rouge. On développe l'expression autour de $\varepsilon_{ir} = 0$. En suivant ces étapes, on obtient l'expression suivante pour la partie infra-rouge :

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(1)}(\varepsilon_{ir}) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (2m^2 - q^2) \gamma^\mu \left[\left(-\frac{1}{\varepsilon_{ir}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) I_1 - I_2 \right] \right. \\ &\left. - \gamma^\mu + 2(p_1 + p_2)^2 \gamma^\mu I_1 - m (p_2 + p_1)^\mu I_1 \right\} \end{aligned} \quad (5.204)$$

avec :

$$I_1 = \int_0^1 dx \frac{1}{m^2 - (q^2 + i\lambda)x(1-x)} \quad (5.205)$$

$$I_2 = \int_0^1 dx \frac{\ln \left[\{m^2 - (q^2 + i\lambda)x(1-x)\} / \mu^2 \right]}{m^2 - (q^2 + i\lambda)x(1-x)}. \quad (5.206)$$

On calcule, maintenant, les parties finies I_1 , I_2 et I_3 dans les régions : $q^2 < 0$ et $q^2 > 4m^2$.

- **Region $q^2 < 0$:**

Car $q^2 < 0$, le polynôme $m^2 - q^2 x(1-x)$ est toujours positif, alors la partie imaginaire peut être supprimée. Le polynôme admet deux racines réelles que nous pouvons noter x_+ et x_- , il s'écrit donc :

$$m^2 - q^2 x(1-x) = -q^2(x - x_+)(x - x_-). \quad (5.207)$$

avec :

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \beta}{2} \quad \text{avec} \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \quad (5.208)$$

On réduit en éléments simple les intégrandes des intégrale I_1 et I_2 , on obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(-q^2)(x_+ - x_-)} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{x - x_+} - \frac{1}{x - x_-} \right], \\ &= \frac{1}{(-q^2)\beta} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{x - x_+} - \frac{1}{x - x_-} \right]. \end{aligned} \quad (5.209)$$

$$I_2 = \frac{1}{(-q^2/\mu^2)\beta} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{x - x_+} - \frac{1}{x - x_-} \right] \{ \ln(-q^2) + \ln[s_x(x - x_+)] + \ln[s_x(x - x_-)] \}. \quad (5.210)$$

$$I_3 = \ln \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \int_0^1 dx (\ln[s_x(x - x_+)] + \ln[s_x(x - x_-)]) \quad (5.211)$$

où $s_x = \text{signe}(x - x_+) = \text{signe}(x - x_-) \equiv \pm 1$ ².

Les intégrales qu'on doit calculer sont de type,

$$\int dx \frac{1}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln(a + bx). \quad (5.212)$$

$$\int dx \frac{\ln(c + ex)}{a + bx} = \frac{1}{b} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{b(c + ex)}{bc - ae} \right) + \ln(c + ex) \ln \left(\frac{e(a + bx)}{ae - bc} \right) \right]. \quad (5.213)$$

$$\int dx \ln(a + bx) = x \ln(a + bx) + \frac{a \ln(a + bx)}{b} - x \quad (5.214)$$

on trouve pour I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(-\frac{1}{q^2} \right) \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{1 - x_+}{1 - x_-} \right] \Big|_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{q^2} \right) \frac{2}{\beta} \ln \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right) \end{aligned} \quad (5.215)$$

2. Dans la suite, on fixe $s_x = +1$ car les parties réelles des arguments des logarithmes ont toujours les mêmes signes.

et pour I_2 , on trouve

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{(-q^2)\beta} \left[-\ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \ln(x - x_-) + \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) \ln(x - x_+) + \text{Li}_2\left(\frac{x_- - x}{x_- - x_+}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{x - x_+}{x_- - x_+}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \ln[x - x_-] \ln\left(\frac{x - x_+}{x_- - x_+}\right) - \ln[x - x_+] \ln\left(\frac{x_- - x}{x_- - x_+}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln^2[x - x_-] + \frac{1}{2} \ln^2[x - x_+] \right] \\
 &= \left(-\frac{1}{q^2} \right) \frac{1}{\beta} \left\{ \ln\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right) \left(2 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{4\beta^2}{\beta^2-1}\right) \right) + 2 \text{Li}_2\left(\frac{\beta-1}{2\beta}\right) - 2 \text{Li}_2\left(\frac{\beta+1}{2\beta}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.216}$$

et pour I_3 , on obtient :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right) - 2 + \beta \ln\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right) + \ln\left(\frac{1-\beta^2}{4}\right) \\
 &= \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + \beta \ln\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right) - 2.
 \end{aligned} \tag{5.217}$$

On rappelle que la fonction Li_2 est définie par :

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^z dt \frac{\ln(1-t)}{t} = - \int_0^1 dt \frac{\ln(1-zt)}{t} \tag{5.218}$$

avec

$$\text{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}.$$

- **Region $q^2 > 4m^2$:**

La région $q^2 > 4m^2$ nécessite un prolongement analytique. Dans cette zone $\beta < 1$, on écrit donc :

$$\ln(\beta-1) \rightarrow \ln(1-\beta) + i\pi$$

Cependant, la fonction $\text{Li}_2(z)$ développe une composante imaginaire pour $z > 1$, comme illustré dans l'équation (5.218). Lorsque β est inférieur à un, $(\beta+1)/(2\beta)$ dépasse un. En utilisant la définition de la fonction Li_2 , il est facile de démontrer que :

$$\text{Li}_2\left(\frac{\beta+1}{2\beta} - i\lambda\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \text{Li}_2\left(\frac{2\beta}{\beta+1}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{2\beta}{\beta+1}\right) + \frac{\pi^2}{3} + i\pi \ln\left(\frac{2\beta}{\beta+1}\right). \tag{5.219}$$

Lorsque $q^2 \gg m^2$, les termes logarithmiques $\ln^n(m^2/q^2)$ dominent l'intégrale. En ne gardant que les termes logarithmiques dominants, on obtient l'expression suivante :

$$I_1^r \simeq \frac{2}{q^2} \ln\left(\frac{m^2}{q^2}\right) \tag{5.220}$$

$$I_2^r \simeq \frac{1}{q^2} \left\{ 2 \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) \ln\left(\frac{m^2}{q^2}\right) + \ln^2\left(\frac{m^2}{q^2}\right) + \frac{4\pi^2}{3} \right\} \tag{5.221}$$

$$I_3^r \simeq \ln\left(\frac{q^2}{\mu^2}\right) - 2 \tag{5.222}$$

où I_i^r sont parties réelles de I_i pour $i = 1, 2, 3$.

Pour exprimer le courant fermionique en termes de facteurs de forme électrique et magnétique, on utilise la décomposition de Gordon suivante :

$$\bar{u}(p_2)(p_1 + p_2)^\mu u(p_1) = 2m\bar{u}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) - i\bar{u}(p_2)\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(p_1) \tag{5.223}$$

Ce qui nous permet de mettre Λ sous la forme suivante :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p_2, p_1, q) = \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) \quad (5.224)$$

où $F_1(q^2)$ et $F_2(q^2)$ sont les facteurs de forme électrique et magnétique du fermion, respectivement. Ils dépendent du carré de la quantité de mouvement transférée q^2 . Les expressions de $F_1(q^2)$ et $F_2(q^2)$ peuvent être obtenues en utilisant les équations (5.202) et (5.204), on obtient :

$$\begin{aligned} F_1(q^2) &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{uv}} - \gamma + \ln(4\pi) - 2 - I_3 + 2(3m^2 - q^2) I_1 \right. \\ &\quad \left. + (2m^2 - q^2) \left[\left(-\frac{1}{\varepsilon_{ir}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) I_1 - I_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.225)$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} m^2 I_1. \quad (5.226)$$

et

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (5.227)$$

On note que le calcul du vertex et des autres boucles s'est inspiré étroitement de la référence [14].

5.3 Renormalisation de la QED

La procédure de renormalisation consiste à modifier la densité lagrangienne originale de la QED en rajoutant une densité lagrangienne, dite des contre-termes, pour compenser les divergences ultra-violettes. Alors,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \delta\mathcal{L}. \quad (5.228)$$

où la densité lagrangienne renormalisée \mathcal{L}_R et la densité lagrangienne des contre-termes $\delta\mathcal{L}$ sont données par :

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \delta Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \delta Z_2 \bar{\psi} i\gamma^\mu \psi - \delta Z_0 m \bar{\psi} \psi + e \mu^\epsilon \delta Z_1 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (5.229)$$

$$\mathcal{L}_R = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu - m) \psi + e \mu^\epsilon \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (5.230)$$

Les contre-termes $\delta Z_i = Z_i - 1$ (pour $i = 0, 1, 2, 3$) sont fixés d'une manière à éliminer les divergences uv à tous les ordres. Dans la suite, on montre comment les fixés pour compenser les divergences uv des diagrammes à une boucle calculés dans la section précédente.

5.3.1 Renormalisation de l'opérateur de polarisation : calcul de Z_3

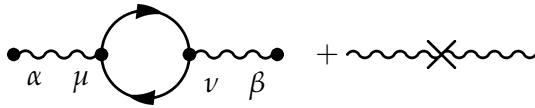
A une boucle, on a besoin que du premier ordre de " $\delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}^{(1)} + \dots$ " et des contre-termes " $\delta Z_i^{(1)} + \dots$ ". Le terme qui élimine les divergences de l'opérateur de polarisation est

$$\delta\mathcal{L}_{\Pi}^{(1)} = -\frac{1}{4} (Z_3^{(1)} - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5.231)$$

Vu la structure de l'opérateur de polarisation, on peut facilement montrer que la règle de Feynman associée à ce contre-terme est :

$$\text{~~~~~} \times \text{~~~~~} : -i(Z_3^{(1)} - 1)(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \quad (5.232)$$

On rajoute ce contre-terme au diagramme à une boucle :



L'opérateur de polarisation se modifiera de la manière suivante :

$$iPi_{\mu\nu}^{(1)}(q^2) \rightarrow i\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(q^2) - i(Z_3^{(1)} - 1)q^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \quad (5.233)$$

et donc $\tilde{\Pi}^{(1)}$ renormalisé s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_R^{(1)}(q^2) &\longrightarrow \tilde{\Pi}^{(1)}(q^2) + (Z_3^{(1)} - 1) \\ &\longrightarrow \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma - 6I(q^2, m^2, \mu^2) \right\} + (Z_3^{(1)} - 1) \end{aligned} \quad (5.234)$$

Alors, le propagateur du photon renormalisé à une boucle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} &= \frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 \left[1 + \tilde{\Pi}_R^{(1)}(q) \right] + i\lambda} \\ &= \frac{-iG_{\alpha\beta}(q)}{q^2 \left[1 + \tilde{\Pi}^{(1)}(q) + (Z_3^{(1)} - 1) \right] + i\lambda} \end{aligned} \quad (5.235)$$

Car la constante $Z_3^{(1)}$ va éliminer les divergences de l'opérateur de polarisation, elle doit prendre la forme suivante :

$$Z_3^{(1)} = 1 - \frac{\alpha}{3\pi \varepsilon_{uv}} + Y_3^{(1)} \quad (5.236)$$

où $Y_3^{(1)}$ sont des termes constantes arbitraires qui ne divergent pas lorsque $\varepsilon_{uv} \rightarrow 0$. Il existe plusieurs choix pour définir $Y_3^{(1)}$, chaque choix détermine un schéma de renormalisation.

Il existe plusieurs schémas de renormalisation pour fixer les contre-termes. Ces schémas ne changent pas les observables physiques (jusqu'à quelques incertitudes théoriques). Dans ce cours, on va discuter deux schémas très connus : le schéma sur couche de masse où on-shell (ON) et le schéma de soustraction modifiée (\overline{MS}).

Schéma sur couche de masse (ON)

Dans le schéma ON, on demande que le propagateur du photon garde sa forme de l'ordre de Born au voisinage de $q^2 = 0$, c.à.d.

$$D_{\alpha\beta} \Big|_{q^2 \rightarrow 0} \longrightarrow \frac{ig_{\alpha\beta}}{q^2 + i\lambda} \quad (5.237)$$

où d'autre terme, le résidu au pôle $q^2 = 0$ de la partie transverse du propagateur à une boucle soit celle du propagateur libre. Donc,

$$\tilde{\Pi}_R^{ON}(q^2) \Big|_{q^2=0} = \left[\tilde{\Pi}^{(1)}(q) + (Z_3^{(1)} - 1) \right] \Big|_{q^2=0} \equiv 0 \quad (5.238)$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} Z_3^{(1)} &= 1 - \tilde{\Pi}^{(1)}(0) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma - 6 \overbrace{I(0, m^2, \mu^2)}^{=1/6\ln(m^2/\mu^2)} \right\} \\ &= 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.239)$$

Donc,

$$\delta Z_3^{(1)} = -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right\} \quad (5.240)$$

et

$$\Pi_R^{(1)ON}(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} I(q^2, m^2, \mu^2) + \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \quad (5.241)$$

Alors

$$\tilde{\Pi}_R^{(1)ON}(q^2) = \begin{cases} -\frac{2\alpha}{\pi} \left\{ \frac{\beta}{4} \left(1 - \frac{\beta^2}{3} \right) \ln\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right) - \frac{4}{9} + \frac{\beta^2}{6} \right\} & q^2 < 0 \\ -\frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{6} \left\{ \frac{\beta}{4} \left(1 - \frac{\beta^2}{3} \right) \left[\ln\left(\left| \frac{\beta+1}{\beta-1} \right| \right) - i\pi \right] - \frac{4}{9} + \frac{\beta^2}{6} \right\} & q^2 > 0 \text{ et } q^2 > 4m^2 \\ -\frac{2\alpha}{\pi} \frac{1}{6} \left\{ \frac{\beta}{2} \left(1 + \frac{\beta^2}{3} \right) \arctan(\tilde{\beta}) - \frac{4}{9} - \frac{\beta^2}{6} \right\} & q^2 > 0 \text{ et } q^2 < 4m^2 \end{cases} \quad (5.242)$$

Remarque :

Le schéma *ON* est appelé aussi schéma physique car l'opérateur de polarisation ne dépend pas de l'échelle non physique μ (introduite par la régularisation dimensionnelle) mais il dépend des variables physique comme la masse des fermions et la 4-impulsion du photon, voir l'éq. (5.242).

Schéma on-shell (\overline{MS})

Dans le schéma de soustraction minimale ou \overline{MS} (introduit par Buras, Bardeen, ...), on soustrait la partie divergente (le pole en ε_{uv}) avec la constante artificielle $\ln(4\pi) - \gamma$ (qui vient de la régularisation dimensionnelle). Donc, le contre-terme $Z_3^{(1)}$ prend simplement la forme suivante :

$$\delta Z_3^{(1)\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] \quad (5.243)$$

La fonction $\tilde{\Pi}^{(1)}$ renormalisée à une boucle dans ce schéma est donnée par

$$\tilde{\Pi}_R^{(1)\overline{MS}}(q^2) \equiv \tilde{\Pi}^{(1)}(q^2) + (Z_3^{(1)\overline{MS}} - 1) \quad (5.244)$$

$$= -\frac{2\alpha}{\pi} I(q^2, m^2, \mu^2) \quad (5.245)$$

Finalement, le propagateur du photon renormalisé à une boucle, en gardant que la partie transverse (ç.à.d. en jauge de Feynman)³, s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2 + i\lambda} &\rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2 + i\lambda} \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}_R^{(1)}(q)} \\ &\rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2 + i\lambda} \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}^{(1)}(q) + \delta Z_3^{(1)}} \end{aligned} \quad (5.246)$$

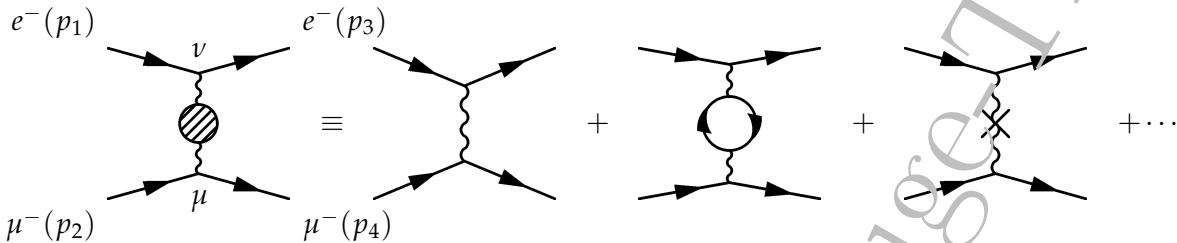
Schématiquement, le propagateur renormalisé à une boucle est représenté par :



3. car si elle donne une contribution non nulle dans les observables physiques

5.3.2 Renormalisation de la constante de couplage α

Une des conséquences la plus importante de la renormalisation est la dépendance de la constante de couplage ainsi que la charge électrique en fonction de l'échelle non-physique μ (souvent on appelle la constante de couplage *constante de couplage mobile*). Pour montrer cela, on considère la diffusion élastique de deux particules chargées (électron et muon). Les diagrammes de Feynman décrivant ce processus ($e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$) à l'ordre de Born, à une boucle ainsi que le diagramme de la contre-terme sont représentés dans la figure suivante :



Pour calculer l'amplitude associée aux trois diagrammes de Feynman (Born, boucle et contre-terme), il suffit d'écrire l'amplitude du diagramme de gauche en remplaçant le propagateur du photon par sa forme renormalisée donnée par éq. (5.246). On écrit donc

$$\begin{aligned} M_R &= e_R^2 \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\lambda} \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}_R^{(1)}(q)} \bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) \\ &= \frac{e_R^2}{1 + \tilde{\Pi}_R^{(1)}(q)} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-i}{q^2 + i\lambda} \bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_2) \end{aligned} \quad (5.247)$$

où e_R est la charge renormalisée. On définit la charge physique e_F par

$$e_F^2 = \frac{e_R^2}{1 + \tilde{\Pi}_R^{(1)}(q)} \quad (5.248)$$

Alors, l'amplitude devient

$$M_R = e_F^2 \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-i}{q^2 + i\lambda} \bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_2) \quad (5.249)$$

On peut montrer que la section efficace différentielle (voir le chapitre (2))

$$\frac{\frac{d\sigma}{d\cos(\theta)}}{\sigma} = \frac{\alpha_F}{2} \frac{4 + [1 + \cos(\theta)]^2}{[1 - \cos(\theta)]^2} \quad (5.250)$$

Avant de comparer la charge électrique avec l'expérience, on donne sa formule dans les schémas *ON* et *MS*. Dans la limite classique où les particules sont statiques ($q_0 = 0$) et à longue distance $\vec{q} \ll$, on a :

$$\frac{e_R^2}{1 + \tilde{\Pi}_R^{(1)}(q)} \approx \frac{e_R^2}{1 + \tilde{\Pi}_R^{(1)}(0)} + \mathcal{O}(q^2) \quad (5.251)$$

On a pu montrer dans la section précédente que :

$$\tilde{\Pi}_R^{(1)}(q) \Big|_{q^2=0} = \begin{cases} 0 & \text{dans le schéma } ON \\ \frac{\alpha_{MS}}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) & \text{dans le schéma } MS \end{cases} \quad (5.252)$$

Alors, la charge électrique physique en fonction de la charge renormalisé dans les deux schémas s'écrit :

$$\begin{cases} e_F^2 = e_{ON}^2 & \text{dans le schéma } ON \\ e_F^2 = e_{MS}^2 / \left[1 + \frac{\alpha_{MS}}{3\pi} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)\right] & \text{dans le schéma } MS \end{cases} \quad (5.253)$$

et la constante de couplage

$$\begin{cases} \alpha_F = \alpha_{ON} & \text{dans le schéma } ON \\ \alpha_F = \alpha_{\overline{MS}} / \left[1 + \frac{\alpha_{\overline{MS}}}{3\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] & \text{dans le schéma } \overline{MS} \end{cases} \quad (5.254)$$

Si on inverse (5.254), on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_{ON} = \alpha_F & \text{dans le schéma } ON \\ \alpha_{\overline{MS}} = \alpha_F / \left[1 - \frac{\alpha_F}{3\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] & \text{dans le schéma } \overline{MS} \end{cases} \quad (5.255)$$

Remarques :

- Dans le schéma *ON*, la charge électrique renormalisée ne dépend pas de l'échelle non-physique μ , c'est pourquoi on appelle ce schéma, *schéma physique*.
- Dans le schéma *ON*, la charge électrique renormalisée est égale à la charge physique (c.à.d. $e_F = e_{ON}$ et $\alpha_F = \alpha_{ON}$).
- Dans le schéma \overline{MS} , la charge renormalisée ne correspond pas à la charge physique, elle sont liées par les équations (5.254) et (5.255) et $\alpha_F - \alpha_{\overline{MS}} \sim \mathcal{O}(\alpha^2)$.
- Dans le schéma \overline{MS} , la charge renormalisée et la constante de couplage dépendent de l'échelle μ mais une dépendance faible (n'est pas comme dans les théories de jauge non abéliennes), voir figure (5.7).

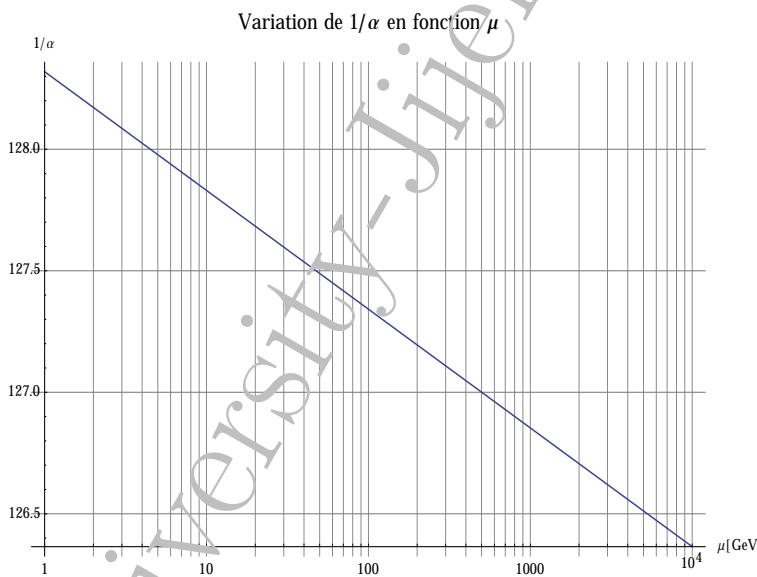


FIGURE 5.7 – Variation de $1/\alpha$ en fonction de l'échelle μ .

On peut comparer la section efficace différentielle, donnée par l'éq. (5.250), et la comparer avec les mesures expérimentales, pour déterminer la constante de couplage. D'après la revue *Particle Data Group*, la valeur de la constante de couplage dans le schéma *ON* est

$$\alpha_{ON} = \frac{1}{137,035999074(44)} \quad (5.256)$$

et dans le schéma \overline{MS} pour $\mu^2 = m_Z^2 = (91.1876 \text{ GeV})^2$ et $m_e = 0.5 \text{ MeV}$ est

$$\alpha_{\overline{MS}} = \frac{1/137.035999074}{1 - \frac{1/137.035999074}{3\pi} \ln \left(\frac{m_Z^2}{m_e^2} \right)} \sim \frac{1}{128} \quad (5.257)$$

5.3.3 Renormalisation de l'opérateur de masse : calcul de Z_0 et Z_2

A une boucle, on a besoin que du premier ordre de " $\delta\mathcal{L} = \delta\mathcal{L}^{(1)} + \dots$ " et des contre-termes " $\delta Z_i^{(1)} + \dots$ ". Le terme qui élimine les divergences de l'opérateur de masse est

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{\Sigma}^{(1)} &= \delta Z_2^{(1)} \bar{\psi} i \not{d} \psi - \delta Z_0^{(1)} m \bar{\psi} \psi \\ &= \delta Z_2^{(1)} \bar{\psi} (i \not{d} - m) \psi + (\delta Z_2^{(1)} - \delta Z_0^{(1)}) m \bar{\psi} \psi \\ &= (Z_2^{(1)} - 1) \bar{\psi} (i \not{d} - m) \psi + (Z_2^{(1)} - Z_0^{(1)}) m \bar{\psi} \psi.\end{aligned}\quad (5.258)$$

Les règles de Feynman associées à ces contre-termes sont les suivantes :



$$i(Z_2^{(1)} - 1)(\not{p} - m)$$



$$i(Z_2^{(1)} - Z_0^{(1)})m \quad (5.259)$$

On peut facilement montrer que l'opérateur de masse renormalisé devient

$$\Sigma_R^{(1)} = m \left[A(p^2) - (Z_2^{(1)} - Z_0^{(1)}) \right] + (\not{p} - m) \left[B(p^2) + B_{\xi}(p^2) - (Z_2^{(1)} - 1) \right] \quad (5.260)$$

Donc, le propagateur fermionique renormalisé à une boucle s'écrit :

$$\mathcal{S}_R = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma_R^{(1)}(p) + i\epsilon} \quad (5.261)$$

Il existe plusieurs schémas pour fixer les contre-termes. Ces schémas ne changent pas les observables physiques (jusqu'à quelques incertitudes théoriques). Dans ce cours, on va discuter deux schémas très connus : le schéma sur couche de masse (ON) et le schéma de soustraction modifiée $\overline{\text{MS}}$.

Schéma sur couche de masse :

Dans le schéma ON, on demande que le propagateur fermionique garde sa forme de l'ordre de Born au voisinage de $\not{p} = m$, c.à.d.

$$\mathcal{S}_R^{\text{ON}} \Big|_{\not{p}=m} \approx \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \quad (5.262)$$

ce qui implique que l'opérateur de masse est nulle dans cette région de l'espace des phases, c.à.d.

$$\Sigma_R^{(1)}(p) \Big|_{\not{p}=m} \approx 0 \quad (5.263)$$

On voit que le propagateur fermionique renormalisé a un pôle à $\not{p} = m$, ce qui implique que la masse renormalisée est la masse physique (pour l'électron par exemple $m = m_e$).

Pour trouver les contre-termes $Z_2^{(1)}$ et $Z_0^{(1)}$, on doit calculer $\Sigma_R^{(1)}$ au voisinage de $\not{p} = m$ (ou $p^2 = m^2$). On a

$$\Sigma_R^{(1)}(p) \stackrel{\not{p} \rightarrow m}{\approx} \Sigma_R^{(1)}(p) \Big|_{\not{p}=m} + \frac{\partial \Sigma_R^{(1)}(p)}{\partial \not{p}} \Big|_{\not{p}=m} (\not{p} - m) + \dots \approx 0 \quad (5.264)$$

avec

$$\begin{aligned}\Sigma_R^{(1)}(p) \Big|_{p'=m} &= A(p^2) \Big|_{p'=m} m - (Z_2^{(1)} - Z_0^{(1)})m \\ &= 0\end{aligned}\tag{5.265}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma_R^{(1)}(p)}{\partial p} \Big|_{p'=m} &= \left[\frac{\partial A(p^2)}{\partial p} m + B(p^2) + B_\xi(p^2) \right] \Big|_{p'=m} - (Z_2^{(1)} - 1) \\ &= \left[2 p \frac{\partial A(p^2)}{\partial p^2} m + B(p^2) + B_\xi(p^2) \right] \Big|_{p'=m} - (Z_2^{(1)} - 1) \\ &= 0\end{aligned}\tag{5.266}$$

Donc,

$$\begin{aligned}Z_2^{(1)} - Z_0^{(1)} &= A(m^2) \\ &= \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \int_0^1 dx (1+x) \ln(x^2 - \mu^2) \right] \\ &= \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] - \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{2} \right] \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{3}{\varepsilon_{uv}} + 3\ln(4\pi) - 3\gamma + 3\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + 4 \right]\end{aligned}\tag{5.267}$$

et

$$Z_2^{(1)} - 1 = 2 p \frac{\partial A(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p'=m} m + B(m^2) + B_\xi(m^2)\tag{5.268}$$

avec

$$\frac{\partial A(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m^2} = \frac{\alpha}{4\pi m^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_{ir}} - \ln(4\pi) + \gamma - \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 1 \right]\tag{5.269}$$

$$B(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + 2 \right]\tag{5.270}$$

$$B_\xi(p^2) \Big|_{p^2=m^2} = \frac{\alpha}{4\pi} (1-\xi) \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \frac{1}{\varepsilon_{ir}} \right\}\tag{5.271}$$

avec $n = 4 + 2\varepsilon_{ir}$ (ε_{ir} est le pôle infrarouge). On trouve

$$(Z_2^{(1)} - Z_0^{(1)}) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{3}{\varepsilon_{uv}} + 3(\ln(4\pi) - \gamma) + 3\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + 4 \right\}\tag{5.272}$$

$$(Z_2^{(1)} - 1) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{-\xi}{\varepsilon_{uv}} + \frac{3-\xi}{\varepsilon_{ir}} - 3(\ln(4\pi) - \gamma) - 3\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 4 \right\}\tag{5.273}$$

Donc, les contre-termes dans la jauge covariante sont donnés par :

$$\delta Z_0^{(1)\text{ON}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{-3-\xi}{\varepsilon_{uv}} + \frac{3-\xi}{\varepsilon_{ir}} - 6(\ln(4\pi) - \gamma) - 6\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 8 \right\}\tag{5.274}$$

$$\delta Z_2^{(1)\text{ON}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{-\xi}{\varepsilon_{uv}} + \frac{3-\xi}{\varepsilon_{ir}} - 3(\ln(4\pi) - \gamma) - 3\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 4 \right\}\tag{5.275}$$

Dans la jauge de Feynman, on a

$$\delta Z_0^{(1)\text{ON}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{-4}{\varepsilon_{uv}} + \frac{2}{\varepsilon_{ir}} - 6(\ln(4\pi) - \gamma) - 6\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 8 \right\} \quad (5.276)$$

$$\delta Z_2^{(1)\text{ON}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{-1}{\varepsilon_{uv}} + \frac{2}{\varepsilon_{ir}} - 3(\ln(4\pi) - \gamma) - 3\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 4 \right\} \quad (5.277)$$

Exercice 5.

(1) Calculer les quantités $\frac{\partial A(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m^2}$, $B(m^2)$ et $B_\xi(m^2)$.

(2) Montrer que la divergence dans $\frac{\partial A(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m^2}$ et d'origine *IR* et pas *UV*.

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=m^2} &= \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx (2(1-x) + nx) \left(\frac{n}{2} - 2\right) \\ &\quad \times (-x(1-x))(m^2 x^2 - i\lambda)^{n/2-3} \\ &= \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right) (m^2 - i\lambda)^{n/2-3} \left[2 \int_0^1 dx x^{n-5} (1-x)^2 \right. \\ &\quad \left. + n \int_0^1 dx x^{n-4} (1-x) \right] \\ &= \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right) (m^2 - i\lambda)^{n/2-3} \\ &\quad \times \left[2 \frac{\Gamma(n-4)\Gamma(3)}{\Gamma(n-1)} + n \frac{\Gamma(n-3)\Gamma(2)}{\Gamma(n-1)} \right] \\ &= \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (m^2 - i\lambda)^{n/2-3} \Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right) \frac{\Gamma(n-4)}{\Gamma(n-1)} (n-2)^2. \\ &\approx \frac{\alpha}{4\pi n^2} \left[\frac{1}{\varepsilon_{ir}} - \ln(4\pi) + \gamma - \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.278)$$

$$\begin{aligned} B_\xi(p^2) \Big|_{p^2=m^2} &= \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (1-\xi) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx (1-x) \\ &\quad \times (mx)^{n-4} \left[\frac{n}{2} + \left(2 - \frac{n}{2}\right) \frac{1+(1-x)}{x} \right] \\ &= \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (1-\xi) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) m^{n-4} \left\{ \frac{n}{2} \int_0^1 dx x^{n-4} (1-x) \right. \\ &\quad \left. + \left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx x^{n-5} (1-x)(1+(1-x)) \right\} \\ &= \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (1-\xi) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) m^{n-4} \left\{ \frac{n}{2} \frac{\Gamma(n-3)\Gamma(2)}{\Gamma(n-1)} \right. \\ &\quad \left. + \left(2 - \frac{n}{2}\right) \frac{\Gamma(n-4)\Gamma(2)}{\Gamma(n-2)} + \left(2 - \frac{n}{2}\right) \frac{\Gamma(n-4)\Gamma(3)}{\Gamma(n-1)} \right\} \\ &= \frac{e^2 \mu^{(4-n)}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (1-\xi) m^{n-4} \left\{ \frac{n}{2} \frac{\Gamma(n-3)}{\Gamma(n-1)} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) + n \frac{\Gamma(n-4)}{\Gamma(n-1)} \Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.279)$$

Le terme avec $\Gamma(2 - \frac{n}{2})$ donne une divergence *UV* (donc $n = 4 - 2\epsilon_{uv}$) et le terme avec $\Gamma(n - 4)$ donne une divergence *IR* (donc $n = 4 - 2\epsilon_{ir}$). On fait un développement limité autour du pôle ϵ_{uv} pour le premier terme et autour du pôle ϵ_{ir} pour le deuxième terme et on garde que les termes de pôle et les termes constants, on obtient.

$$B_\xi(p^2)|_{p^2=m^2} = \frac{\alpha}{4\pi}(1-\xi) \left\{ \frac{1}{\epsilon_{uv}} + \frac{1}{\epsilon_{ir}} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon_{uv}, \epsilon_{ir}). \quad (5.280)$$

On note que les termes constants des deux contributions se compensent.

Schéma de soustraction modifiée \overline{MS} :

Dans ce schéma on se demande que les contre-termes compensent les pôles *UV* associé avec le terme $\ln(4\pi) - \gamma$. Alors à partir de la formule (5.260), on obtient

$$\delta Z_2^{(1)} - \delta Z_0^{(1)} = \frac{3\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] \quad (5.281)$$

$$\delta Z_2^{(1)} = -\xi \frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] \quad (5.282)$$

Alors,

$$\delta Z_0^{(1)\overline{MS}} = -(3 + \xi) \frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] \quad (5.283)$$

$$\delta Z_2^{(1)\overline{MS}} = -\xi \frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] \quad (5.284)$$

Dans la jauge de Feynman on a

$$\delta Z_0^{(1)\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] \quad (5.285)$$

$$\delta Z_2^{(1)\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right] \quad (5.286)$$

5.3.4 Renormalisation du vertex en QED

On rappelle que la correction au vertex s'écrit :

$$\Lambda_\mu^{(1)}(p_2, p_1, q) = \gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) \quad (5.287)$$

La divergence ultraviolette est cachée dans le facteur de forme $F_1(q^2)$. Cette dernière peut être compenser par le contre terme suivant :

$$- (Z_1^{(1)} - 1) e \mu^{2-n/2} \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \quad (5.288)$$

Donc, on doit rajouter la règle de Feynman suivante :

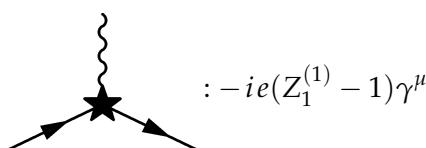
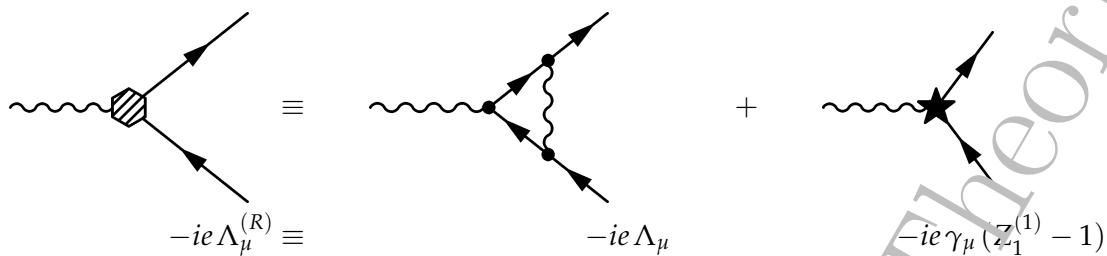


FIGURE 5.8 – Contre-terme associé au vertex en QED.

Schématiquement, le vertex renormalisé est représenté par :

FIGURE 5.9 – Renormalisation du vertex propre à l'ordre e^3 .

où $\Lambda_\mu^{(R)}$ est le vertex propre renormalisé à l'ordre 1. On écrit, donc

$$\Lambda_\mu^{(R)}(p_2, p_1, q) = \gamma_\mu \left[F_1(q^2) + (Z_1^{(1)} - 1) \right] + \frac{i}{2m} \sigma_{\mu\nu} \gamma^\nu F_2(q^2). \quad (5.289)$$

Donc,

$$\delta Z_1^{(1)} = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + C^{(1)}. \quad (5.290)$$

où $C^{(1)}$ est une constante qui dépend du schéma de renormalisation.

Exercice 6 : $\delta Z_1^{(1)}$ dans les schéma ON et \overline{MS}

(1) Dans le schéma *On*, on impose la condition suivante :

$$(F_1(q^2) + (Z_1^{(1)} - 1)) \Big|_{q^2=0} = 0. \quad (5.291)$$

- Montrer que

$$\delta Z_1^{(1)ON} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + 2 \frac{1}{\varepsilon_{ir}} - 3(\ln(4\pi) - \gamma) - 3 \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 4 \right\} \equiv \delta Z_2^{(1)ON} \quad (5.292)$$

- Montrer que le facteur de forme dans ce schéma devient :

$$F_1^{ON} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ [2 + (q^2 - 2m^2) I_1] \left(\frac{1}{\varepsilon_{ir}} - \ln(4\pi) + \gamma \right) - 6 - 2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - I_3 - (2m^2 - q^2) I_2 + 2(3m^2 - q^2) I_1 \right\} \quad (5.293)$$

(2) Montrer que, dans le schéma \overline{MS} , on a :

$$\delta Z_1^{(1)\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} - \gamma + \ln(4\pi) \right) \equiv \delta Z_2^{(1)\overline{MS}}. \quad (5.294)$$

- Montrer que le facteur de forme dans ce schéma devient :

$$F_1^{\overline{MS}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ (q^2 - 2m^2) I_1 \left(\frac{1}{\varepsilon_{ir}} - \ln(4\pi) + \gamma \right) - 2 - I_3 - (2m^2 - q^2) I_2 + 2(3m^2 - q^2) I_1 \right\} \quad (5.295)$$

5.4 Boucles en QCD

Pour le calcul des boucles dans cette partie, nous nous sommes basés sur les résultats obtenus dans les références [9] et [14], sans approfondir les détails du calcul.

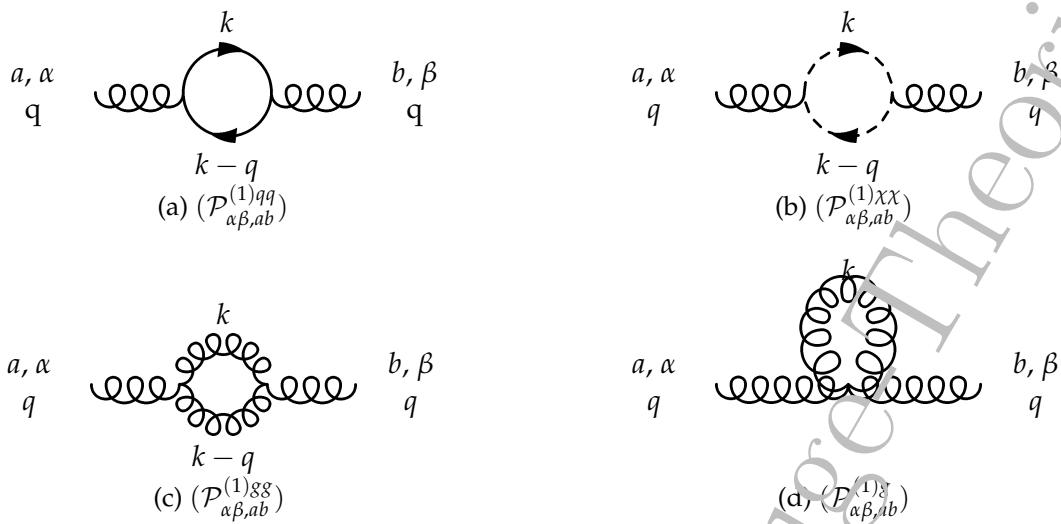


FIGURE 5.10 – Corrections au propagateur du gluon en QCD

5.4.1 Corrections au propagateur en QCD

En QCD, le propagateur du boson de jauge (gluon) reçoit la contribution des 4 diagrammes de Feynman à une boucle, voir fig. (5.10).

On rappelle que le diagramme à une boucle de fantôme (cf. fig. (5.10) à droite ci-dessus) est nécessaire que si on travaille dans la jauge covariante (de Lorentz par exemple).

- **Boucle de quarks :**

$$i\mathcal{P}_{\alpha\beta,ab}^{(1)qq} = -g^2 \mu^{(2\epsilon_{uv})} T_F \delta^{ab} \frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon_{uv}}} \Gamma(\epsilon_{uv}) (-q^2 - i\lambda)^{-\epsilon_{uv}} \frac{\Gamma(1-\epsilon_{uv}) \Gamma(1-\epsilon_{uv})}{\Gamma(2-2\epsilon_{uv})} \times \left(q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta \right) \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{9} \epsilon_{uv} \right) \quad (5.296)$$

avec

$$T_F = T_R N_F = \frac{N_F}{2}$$

- **Boucle de fantôme :**

$$i\mathcal{P}_{\alpha\beta,ab}^{(1)\chi\chi} = g^2 \mu^{(2\epsilon_{uv})} N \delta^{ab} \frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon_{uv}}} \Gamma(\epsilon_{uv}) (-q^2 - i\lambda)^{-\epsilon_{uv}} \frac{\Gamma(1-\epsilon_{uv}) \Gamma(1-\epsilon_{uv})}{\Gamma(2-2\epsilon_{uv})} \times \left[q^2 g^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{18} \epsilon_{uv} \right) - q^\alpha q^\beta \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{18} \epsilon_{uv} \right) \right] \quad (5.297)$$

- **Boucle de gluon (vertex 3-g) :**

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{P}_{\alpha\beta,ab}^{(1)gg} = & g^2 \mu^{(2\epsilon_{uv})} N \delta^{ab} \frac{i}{(4\pi)^{2-\epsilon_{uv}}} \Gamma(\epsilon_{uv}) (-q^2 - i\lambda)^{-\epsilon_{uv}} \frac{\Gamma(1-\epsilon_{uv}) \Gamma(1-\epsilon_{uv})}{\Gamma(2-2\epsilon_{uv})} \\
 & \times \left[q^2 g^{\alpha\beta} \left(\frac{19}{12} + \frac{1}{18} \epsilon_{uv} \right) - q^\alpha q^\beta \left(\frac{11}{6} + \frac{1}{18} \epsilon_{uv} \right) \right. \\
 & + (1-\xi) \left(q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta \right) \left(\frac{1}{2} - 2\epsilon_{uv} \right) \\
 & \left. + \frac{1}{4} (1-\xi)^2 \left(q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta \right) \epsilon_{uv} \right]
 \end{aligned} \tag{5.298}$$

- **Boucle de gluon (vertex 4-g) :** On peut facilement montrer que

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{P}_{\alpha\beta,ab}^{(1)g} = & g_s^2 C_A \delta_{ab} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2} \left[-(n-1) g_{\alpha\beta} + (1-\xi) \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \right] \\
 = & g_s^2 C_A \delta_{ab} \frac{n-1}{n} (-n+1-\xi) \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2} \\
 \equiv & 0
 \end{aligned} \tag{5.299}$$

car

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{k^2} = 0$$

On voit que les contributions $\mathcal{P}_{\alpha\beta,ab}^{(1)gg}$ et $\mathcal{P}_{\alpha\beta,ab}^{(1)XX}$ ne sont pas transverse, voir la section 3.4. Mais la somme des trois contributions est transverse. La contribution totale des 4 diagrammes représentés dans fig. (5.10) est :

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{P}_{\alpha\beta,ab}^{(1)tot} = & i \frac{\alpha_s}{4\pi} \delta^{ab} \left(q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta \right) \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \left(N \left[\frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right] - T_F \frac{4}{3} \right) \right. \\
 & + \ln \left(\frac{\mu^2}{-q^2 - i\lambda} \right) \left(N \left[\frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right] - T_F \frac{4}{3} \right) \\
 & \left. + N \left[\frac{97}{36} + \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{4} \right] - T_F \frac{20}{9} \right\}
 \end{aligned} \tag{5.300}$$

5.4.2 Correction au propagateur du fantôme

La correction au propagateur du fantôme est obtenu par l'émission d'un gluon virtuel, voir fig. (5.11) (le diagramme à gauche).



FIGURE 5.11 – Corrections au propagateur de fantôme (gauche) et de quark (droite)

Il correspond à l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} -i\tilde{\Sigma}_{ab}^{(1)}(p) &= g^2 \mu^{(4-n)} f^{cdb} f^{c'ad'} \delta^{dd'} \delta^{cc'} \\ &\times \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{p^\nu (p-k)^\mu}{((p-k)^2 + i\lambda)(k^2 + i\lambda)} \left(g^{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\lambda} \right). \end{aligned} \quad (5.301)$$

On suit les mêmes étapes de calcul (voir la section QED), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{ab}^{(1)}(p) &= \frac{\alpha_s}{4\pi} N \delta^{ab} p^2 \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1-\xi}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(\frac{\mu^2}{-p^2 - i\lambda} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1-\xi}{4} \right) + 1 \right] \end{aligned} \quad (5.302)$$

5.4.3 Correction au propagateur du quark

La correction au propagateur du quark est obtenu par l'émission d'un gluon virtuel, voir fig. (5.11) (le diagramme à droite). Il correspond à l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{ij}^{(1)}(p) &= -g^2 \mu^{(4-n)} (T^a)_{ik} \left(T^b \right)_{kj} \delta^{ab} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \\ &\times \frac{\gamma_\nu (p-k)^\mu}{(p-k)^2 + i\lambda} \left(\frac{\delta^{\mu\nu}}{k^2 + i\lambda} - (1-\xi) \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + i\lambda)^2} \right) \end{aligned} \quad (5.303)$$

On suit les mêmes étapes de calcul (voir la section QED), on obtient :

$$\Sigma_{ij}^{(1)}(p) = \delta_{ij} C_F (A m - B p) + \text{termes finis} \quad (5.304)$$

avec

$$A = \frac{\alpha_s}{(4\pi)} (3 + \zeta) \left[\frac{1}{\varepsilon_{uv}} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \quad (5.305)$$

$$B = \frac{\alpha_s}{(4\pi)} \zeta \left[\frac{1}{\varepsilon_{uv}} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \quad (5.306)$$

$$(5.307)$$

5.4.4 Correction au vertex quark-quark-gluon

Les deux diagrammes de Feynman contribuant à la correction vertex sont représentés dans la figure (5.12).

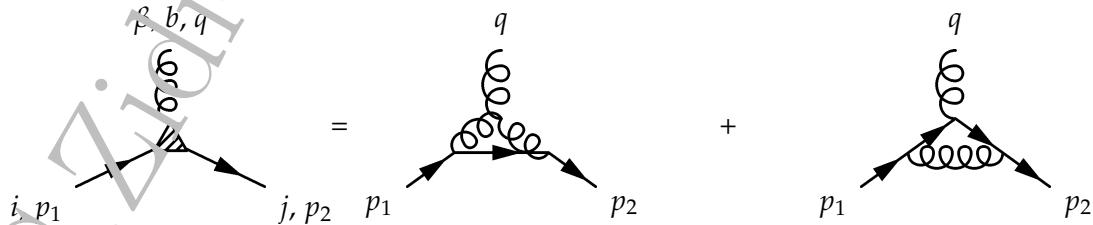


FIGURE 5.12 – Correction au vertex quark-quark-gluon

La contribution totale contient une contribution qui diverge dans la région uv (notée $\Lambda_{UV}^{(1)\beta}$) et contri-

bution qui diverge dans la région *IR* (notée $\Lambda_{IR}^{(1)\beta}$), avec :

$$\Lambda_{UV}^{(1)\beta}(q) = \gamma^\beta \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma - \ln\left(\frac{-q^2 - i\lambda}{\mu^2}\right) \right) b_1 + b_2 \right] \quad (5.308)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{IR}^{(1)\beta}(q) &= \gamma^\beta \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_{ir}) \Gamma^2(1 + \varepsilon_{ir})}{\Gamma(1 + 2\varepsilon_{ir})} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{-\varepsilon_{ir}} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\varepsilon_{ir}^2} a_2 + \frac{1}{\varepsilon_{ir}} \left(a_1 - a_2 \ln\left(\frac{Q^2}{-q^2 - i\lambda}\right) \right) + a_0 - a_1 \ln\left(\frac{Q^2}{-q^2 - i\lambda}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_2}{2} \ln^2\left(\frac{Q^2}{-q^2 - i\lambda}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.309)$$

et

$$\begin{aligned} b_1 &= C_F + N_c - (1 - \xi) C_F - \frac{1}{4} (1 - \xi) N_c \\ b_2 &= C_F + 3N_c - \frac{17}{6} (1 - \xi) C_F + \frac{1}{6} (1 - \xi) N_c \\ a_2 &= -2C_F + N_c - (1 - \xi) C_F + \frac{1}{2} (1 - \xi) N_c \\ a_1 &= 4C_F + 2(1 - \xi) C_F - \frac{3}{2} (1 - \xi) N_c \\ a_0 &= -9C_F - \frac{13}{3} (1 - \xi) C_F + \frac{19}{4} (1 - \xi) N_c - \frac{1}{8} (1 - \xi)^2 N_c \end{aligned} \quad (5.310)$$

Voir la référence [14] pour plus de détail.

5.4.5 Correction au vertex 3-gluon

Les diagrammes de Feynman à une contribuant à la correction au vertex 3-gluon sont représenté dans la figure (5.15).

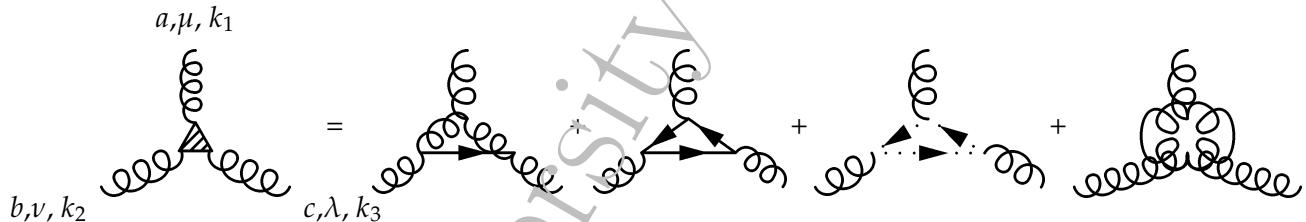


FIGURE 5.13 – Correction au vertex 3-gluon

La contribution de ces diagrammes est donnée par :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) &= -i g_s \delta^{abc} V_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, k_3) \left\{ \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \left[N_c \left(\frac{3}{4}\zeta - \frac{17}{12} \right) + \frac{2}{3} N_f \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \right\} + \text{termes finis.} \end{aligned} \quad (5.311)$$

avec

$$V_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, k_3) = g^{\mu\nu} (k_1 - k_2)^\lambda + g^{\nu\lambda} (k_2 - k_3)^\mu + g^{\lambda\mu} (k_3 - k_1)^\nu \quad (5.312)$$

5.4.6 Correction au vertex 4-gluon

La contribution des ces diagrammes est donnée par :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}^{a_1a_2a_3a_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= -g_s^2 W_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) \left\{ \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \left[N_c \left(\zeta - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} N_f \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \right\} + \text{termes finis} \end{aligned} \quad (5.313)$$

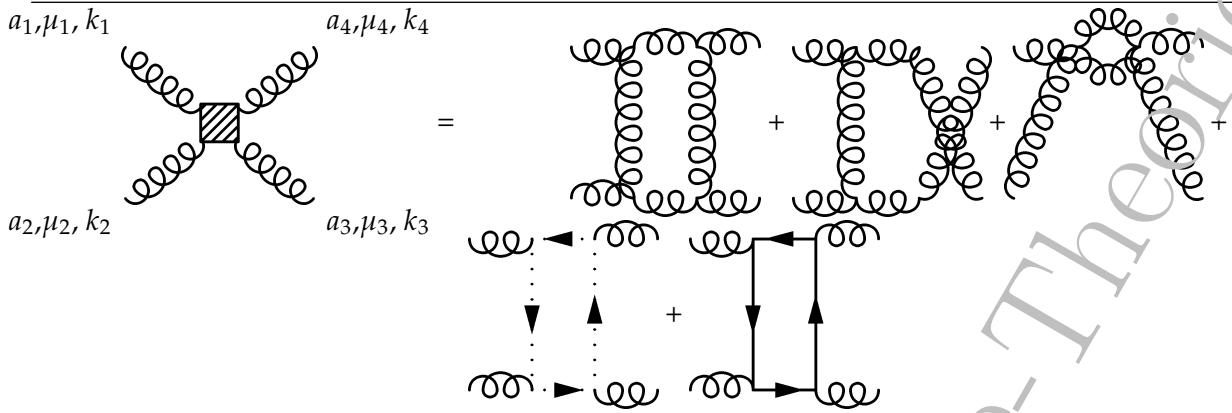


FIGURE 5.14 – Correction au vertex 4-gluon

avec

$$W_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = f^{ea_1 a_3} f^{ea_2 a_4} (g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3}) + f^{ea_1 a_4} f^{ea_2 a_3} (g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4}) + f^{ea_1 a_2} f^{ea_3 a_4} (g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3}) \quad (5.314)$$

5.4.7 Correction au vertex fantôme-fantôme-gluon

La contribution des ces diagrammes est donnée par :

$$\tilde{\Lambda}_\mu^{abc} = -i g_s f_{abc} p_\mu \left[\frac{g_s^2}{(4\pi)^2} N_c \frac{\alpha_s}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \right] + \text{termes finies} \quad (5.315)$$

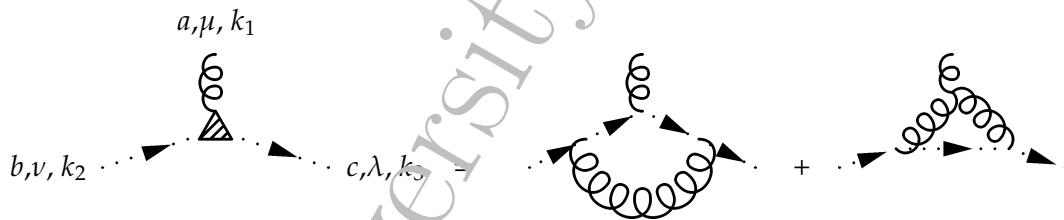


FIGURE 5.15 – Correction au vertex fantôme-fantôme-gluon

5.5 Renormalisation de la QCD

On redéfinit les champs et les paramètres de la théorie comme suit :

$$\begin{aligned} G_\mu^a &\rightarrow Z_3^{1/2} G_\mu^a, & \chi_{1,2}^a &\rightarrow \tilde{Z}_3^{1/2} \chi_{1,2}^a, & \psi &\rightarrow Z_2^{1/2} \psi, \\ g_s &\rightarrow Z_g g_s, & \xi &\rightarrow Z_3 \xi, & m &\rightarrow Z_m m. \end{aligned} \quad (5.316)$$

Donc, la densité lagrangienne de la QCD devient

$$\mathcal{L}_{QCD} \rightarrow \mathcal{L}_{QCD} + \delta \mathcal{L}_{QCD} \quad (5.317)$$

où la densité lagrangienne des contre-termes $\delta\mathcal{L}_{QCD}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{L}_{QCD} = & - (Z_3 - 1) \frac{1}{4} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) (\partial^\mu G^{a\nu} - \partial^\nu G^{a\mu}) \\
 & + (\tilde{Z}_3 - 1) \partial_\mu \chi_1^{a^\dagger} \partial^\mu \chi_2 \\
 & + (Z_2 - 1) \bar{\psi}_i (i \not{\partial} - m) \psi_i - (Z_2 Z_m - 1) m \bar{\psi}_i \psi_i \\
 & - (Z_1 - 1) \frac{g_s}{2} f_{abc} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) G_\mu^b G_\nu^c \\
 & - (\tilde{Z}_1 - 1) i g_s f_{abc} (\partial^\mu \chi_1^a) \chi_2^b G_\mu^c \\
 & + (Z_{1F} - 1) g_s \bar{\psi}_i (T^a)_{ij} \gamma^\mu \psi_j G_\mu^a \\
 & - (Z_4 - 1) \frac{g_s^2}{4} f^{abe} f^{cde} G_\mu^a G_\nu^b G^{a\mu} G^{a\nu}
 \end{aligned} \tag{5.318}$$

Les constantes Z_1 , \tilde{Z}_1 , Z_{1F} et Z_4 sont liés aux contre-termes introduits dans l'éq. (5.316) par :

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= Z_g Z_3^{3/2}, & \tilde{Z}_1 &= Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2} \\
 Z_{1F} &= Z_g Z_2 Z_3^{1/2}, & Z_4 &= Z_g^2 Z_3^2
 \end{aligned} \tag{5.319}$$

Ces 4 constantes ne sont pas indépendantes, elles sont contrôlées par l'identité suivante :

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1} \tag{5.320}$$

cette identité est appelée *identité de Slavnov-Taylor*.

Contre-terme du champ de gluon Z_3 :

On peut écrire le terme dans la première ligne de (5.318) sous la forme :

$$(Z_3 - 1) \frac{1}{2} G^{a\mu} \delta_{ab} (g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) G^{b\nu} \tag{5.321}$$

Donc, dans l'espace des impulsions, le contre-terme associé au propagateur du gluon (à une boucle) est

$$a, \mu \text{ (loop)} b, \nu - i (Z_3^{(1)} - 1) \delta^{ab} (k^2 g^{\alpha\beta} - k^\alpha k^\beta) \tag{5.322}$$

Donc, l'opérateur de polarisation renormalisé s'écrit :

$$i \mathcal{P}_{\alpha\beta,ab}^{(1)tot} \rightarrow i \mathcal{P}_{\alpha\beta,ab}^{(1)tot} - i (Z_3^{(1)} - 1) \delta^{ab} (q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta) \tag{5.323}$$

Dans le schéma \overline{MS} , on a

$$(Z_3^{(1)} - 1) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \left[\left(\frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) N_c - \frac{2}{3} N_f \right] \tag{5.324}$$

où N_f est le nombre de saveur de quarks.

Contre-terme du champ de fantôme \tilde{Z}_3 :

On peut écrire le terme dans le deuxième ligne de (5.318) sous la forme :

$$(\tilde{Z}_3 - 1) \chi_1^a \delta_{ab} (-i \partial^2) \chi_2^b \tag{5.325}$$

Donc, dans l'espace des impulsions, la règle de Feynman du contre terme associé au propagateur du fantôme (à une boucle) est

$$\dots \times \dots \quad i (\tilde{Z}_3^{(1)} - 1) p^2 \delta_{ab}. \tag{5.326}$$

Donc, l'opérateur de masse du fantôme devient :

$$-i\tilde{\Sigma}_{ab}^{(1)R}(p) = -i\tilde{\Sigma}_{ab}^{(1)}(p) + i(\tilde{Z}_3^{(1)} - 1)p^2 \quad (5.327)$$

Dans le schéma \overline{MS} , on a :

$$(\tilde{Z}_3^{(1)} - 1) = \frac{\alpha_s}{4\pi} N_c \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \frac{3}{4 - \xi} \quad (5.328)$$

Contre-terme du champ Z_2 et de masse Z_m de fermion :

Dans l'espace des impulsions, la règle de Feynman du contre terme associé au propagateur du quark à une boucle (associée au 3ème terme de (5.318)) est



$$i(Z_2^{(1)} - 1) p^4 \delta_{ij}. \quad (5.329)$$



$$i(Z_m^{(1)} - 1) m \delta_{ij}. \quad (5.330)$$

L'opérateur de masse renormalisé est donné par :

$$\Sigma_{ij}^{(1)R}(p) = \Sigma_{ij}^{(1)}(p) + (Z_2^{(1)} - 1) \delta_{ij} p - (Z_2^{(1)} Z_m^{(1)} - 1) \delta_{ij} m \quad (5.331)$$

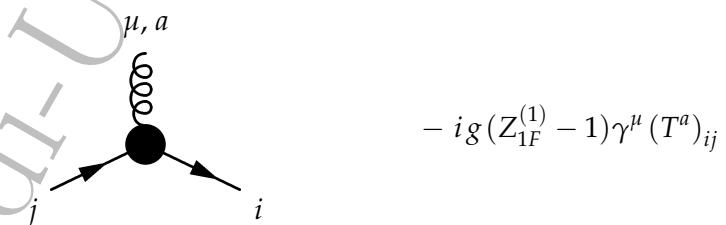
Dans le schéma \overline{MS} , on a :

$$(Z_2^{(1)} - 1) = -\frac{\alpha_s}{(4\pi)} C_F \xi \left[\frac{1}{\varepsilon_{uv}} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \quad (5.332)$$

$$(Z_m^{(1)} - 1) = -\frac{\alpha_s}{(4\pi)} C_F 3 \left[\frac{1}{\varepsilon_{uv}} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \quad (5.333)$$

Contre-terme du vertex quark-quark-gluon Z_{1F} :

Dans l'espace des impulsions, la règle de Feynman du contre terme associé au vertex quark-quark-gluon (6ème ligne de (5.318)) est



$$-i g (Z_{1F}^{(1)} - 1) \gamma^\mu (T^a)_{ij} \quad (5.334)$$

Le vertex renormalisé devient

$$\Lambda_R^{(1)\mu}(q) \rightarrow \Lambda_{UV}^{(1)\mu}(q) + \Lambda_{IR}^{(1)\mu}(q) + (Z_{1F} - 1) \quad (5.335)$$

Donc,

$$(Z_{1F} - 1) = -\frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \left(C_F \xi + N_c \left[\frac{3}{4} + \frac{\xi}{4} \right] \right) \quad (5.336)$$

Contre-terme du couplage Z_g :

D'après l'équation (5.319) et l'identité de Slavnov-Taylor (5.320), on a :

$$Z_g = \frac{Z_{1F}}{Z_2 Z_3^{1/2}} \quad (5.337)$$

Donc, dans le schéma \overline{MS} , on a :

$$Z_g^{(1)} - 1 = -\frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \left[\frac{11}{6} N_c - \frac{N_f}{3} \right] \quad (5.338)$$

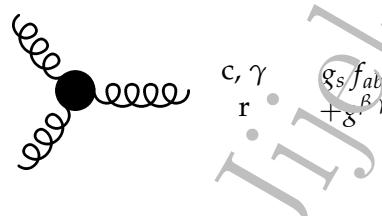
Contre-terme du vertex 3-gluon Z_1 :

On a,

$$Z_1 = Z_g Z_3^{3/2} \quad (5.339)$$

Donc,

$$Z_1^{(1)} - 1 = -\frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \left[N_c \left(\frac{3}{4} \zeta - \frac{17}{12} \right) + \frac{2}{3} N_f \right] \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \quad (5.340)$$



$$g_s f_{abc} (Z_1^{(1)} - 1) [g^{\alpha\beta} (p - q)^\gamma + g^{\beta\gamma} (q - r)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (r - p)^\beta] \quad (5.341)$$

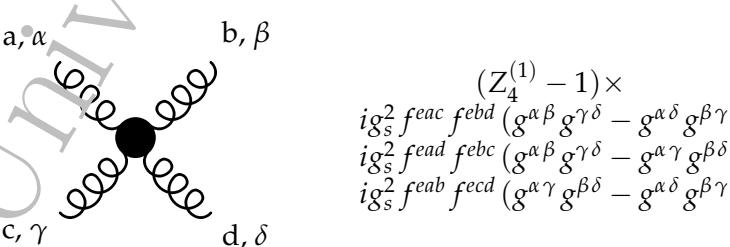
Contre-terme du vertex 4-gluon Z_4 :

On a,

$$Z_4 = Z_g^2 Z_3^2 \quad (5.342)$$

Donc,

$$Z_4^{(1)} - 1 = -\frac{g_s^2}{(4\pi)^2} \left[N_c \left(\zeta - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} N_f \right] \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \quad (5.343)$$



$$(Z_4^{(1)} - 1) \times \begin{aligned} & ig_s^2 f_{eac} f_{ebd} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \\ & ig_s^2 f_{ead} f_{ebc} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}) \\ & ig_s^2 f_{eab} f_{ecd} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \end{aligned} \quad (5.344)$$

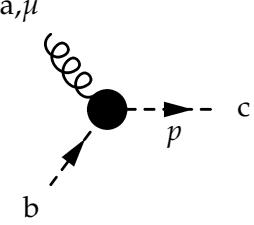
Contre-terme du vertex fantôme-fantôme-gluon \tilde{Z}_1 :

En fonction des autres contre-terme, le contre terme du vertex fantôme-fantôme-gluon \tilde{Z}_1 s'écrit sous la forme :

$$\tilde{Z}_1 = Z_1 \tilde{Z}_3 / Z_3 \quad (5.345)$$

Donc, à une boucle on a :

$$\tilde{Z}_1^{(1)} - 1 = -\frac{g_s^2}{(4\pi)^2} N_c \frac{\zeta}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \quad (5.346)$$



$$g_s f_{abc} p^\mu (\tilde{Z}_1 - 1) \quad (5.347)$$

Finalement, on peut montrer que l'identité de Slavnov-Taylor à une boucle dans le schéma \overline{MS} est donnée par :

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1} = 1 - \frac{g_s^2}{(4\pi)^2} N_c \frac{3 + \zeta}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) + \dots \quad (5.348)$$

5.6 Exercices et problèmes

Problème 1 : Renormalisation à une boucle de la théorie $\lambda\phi^4$ en 4 dimensions

Dans ce problème, on veut renormaliser la théorie $\lambda\phi^4$ en 4 dimensions où $\phi(x)$ est un champ scalaire réel. La densité lagrangienne en fonction des quantités nues (barres) de la théorie est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_B \partial^\mu \phi_B - \frac{m_B^2}{2} \phi_B^2(x) - \frac{\lambda_B}{4!} \phi_B^4(x)$$

On travaillera en $n = 4 - 2\epsilon$ dimensions pour régulariser les divergences et effectuer la renormalisation. On travaillera dans le système d'unités où $\hbar = c = 1$, et on dénote μ l'échelle de masse induite en n dimensions.

(1) Calculer la dimension, en unité de masse, des différents paramètres du lagrangien (ϕ_B , m_B et λ_B) dans l'espace en 4 dimensions, puis en n dimensions.

(2) Introduisant la relation entre quantités nues (ϕ_B , m_B , λ_B), et renormalisées (ϕ , m , λ)

$$\phi_B = Z_2^{1/2} \phi, \quad m_B^2 = \frac{Z_0}{Z_2} m^2, \quad \lambda_B = \frac{Z_1}{Z_2^2} \lambda \mu^{2\epsilon}.$$

Écrire la densité lagrangienne (5.349) en fonction des ϕ , m , λ et des contre-termes $\delta Z_i = Z_i - 1$, et montrer que qu'elle s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \delta \mathcal{L}. \quad (5.349)$$

(3) Expliquer pourquoi la constante de couplage renormalisé s'écrit sous la forme suivante

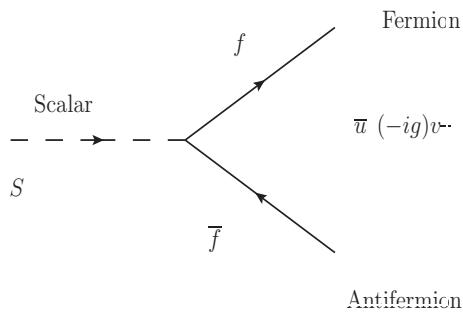
$$\lambda \mu^{2\epsilon}. \quad (5.350)$$

(4) Calcul de Z_2 : Considérons la diffusion $p_1 + p_2 \rightarrow p_2 + p_4$.

- Tracer les diagrammes de Feynman à une boucle décrivant cette réaction.
- Montrer que la première boucle vaut

$$(\lambda \mu^{2\epsilon}) \frac{i\lambda}{32\pi^2} \left\{ \frac{(4\pi)^\epsilon \Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{m^2 - s_{ij}x(1-x) - i\epsilon}{\mu^2} \right) \right\}. \quad (5.351)$$

où $s_{ij} = s, t, u$.



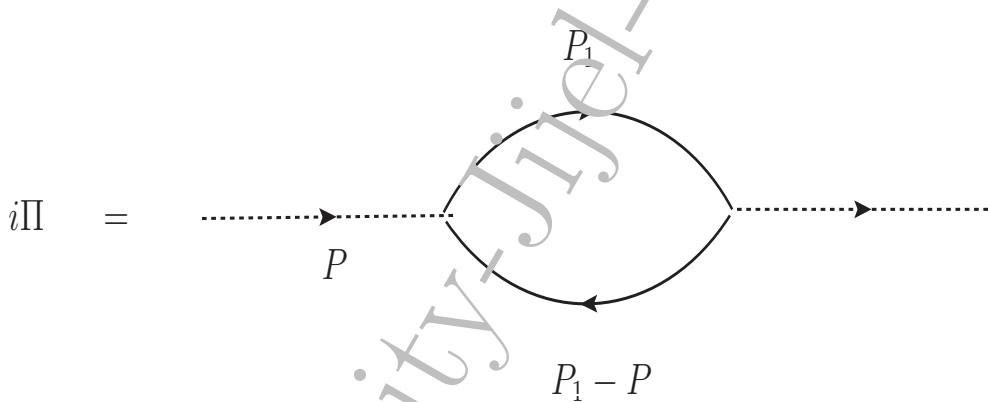
Problème 2 : Modèle de Yukawa

On considère une particule scalaire ϕ de masse M et un fermion f de masse m_f . Les deux particules interagissent via un couplage de Yukawa comme dans la figure :

La densité lagrangienne de ce modèle est :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_f)\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 - g\phi\bar{\psi}\psi$$

On considère l'insertion d'une boucle de fermion sur le propagateur du scalaire et la renormalisation de ce propagateur :



1. Quelle est la dimension du couplage g en n -dimensions avec $n = 4 - 2\epsilon$
2. En appliquant les règles de Feynman montrer que la contribution de la boucle s'écrit :

$$i\Pi_S(p^2) = 4g^2\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^n p_1}{(2\pi)^n} \frac{p_1^2 - p_1 \cdot p + m_f^2}{(p_1^2 - m_f^2 + i\epsilon) ((p_1 - p)^2 - m_f^2 + i\epsilon)}$$

3. Utilisant les formules en appendice montrer que la contribution de la boucle devient :

$$\Pi_S(p^2) = 4 \frac{g^2 \mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} \frac{3-2\epsilon}{1-\epsilon} \int_0^1 dx C(p^2) \left(\frac{4\pi\mu^2}{C(p^2)} \right)^\epsilon$$

avec $C(p^2) = m_f^2 - f^2 - p^2 x(1-x) - i\epsilon$.

4. On suppose maintenant pour simplifier que le fermion est de masse nulle $m_f = 0$. Il est alors possible de faire l'intégrale $\int dx$. Montrer que la boucle se réduit alors à :

$$\Pi_S(p^2) = 2 \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} (-p^2) \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2 - i\epsilon} \right)^\epsilon$$

5. Dénotant δZ_3 le contre-terme de fonction d'onde du scalaire ϕ et δZ_0 le contre terme de masse de ϕ extraire de l'expression ci-dessus la valeur de ces contre-termes dans le schéma \overline{MS} en s'aidant de :

$$\delta Z_3 - \frac{d\Pi_S(p^2)}{dp^2} \Big|_{p^2=M^2} \sim \text{fini}$$

$$M^2(\delta Z_0 - \delta Z_3) + \Pi_S(p^2|_{p^2=M^2} \sim \text{fini}$$

On utilisera les formules suivantes :

- Réduction du dénominateur pour le calcul de boucles :

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + (1-x)b]^2}$$

- Intégrale sur l'impulsion de la boucle :

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^{2r}}{[k^2 - C + i\epsilon]^m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C - i\epsilon} \right)^\epsilon C^{2+r-m} \frac{\Gamma(2+r-\epsilon)}{\Gamma(2-\epsilon)} \frac{\Gamma(m-r-2+\epsilon)}{\Gamma(m)}.$$

- Relations entre fonctions Γ :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \frac{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.352)$$

- Intégrale sur la variable de Feynman x dans une boucle :

$$\int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Bibliographie

- [1] Ch. Quigg, *Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions*, Advanced Book Classics, 1997.
- [2] H. Georgi *Lie Algebras in Particle Physics, from isospin to unified theories*, Westview Advanced Book Program, 1999.
- [3] R. Slansky, *Group theory for unified model building*, North.Holand Publishing Company, 1981.
- [4] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum field theory*, John Wiley and Sons, 1986.
- [5] C. Itzykson and J-B. Zuber, *Quantum field theory*, Dover Publication, 2005.
- [6] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [7] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field quantization*, Springer, 1996.
- [8] M. Thomson, *Modern Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [9] P. Aurenche, J.Ph. Guillet and E. Pilon, *QED, QCD en pratique*, HAL open science, 2018 (<https://cel.hal.science/cel-01440544v2>).
- [10] T. Muta, *Foundations of quantum chromodynamics : an introduction to perturbative methods in gauge theories*, World Scientific, 1986.
- [11] T. Morii, C.S. Lim, S. N. Mukherjee, *The Physics of the Standard model and beyond*, World Scientific, 2004
- [12] Paul Langacker, *The standard model and beyond*, CRC Press Taylor and Francis Book, 2010.

- [13] E. Leader and E. Predazzi, *An introduction to gauge theories and modern physics*, Volume 1, CRC Press Taylor and Francis Book, 2010.
- [14] J.Ph. Guillet, *Cours en QED et QCD given in Algeria*, unpublished.
- [15] The Legrand Orange Book, Version 2.0 (9/2/15), <http://www.LaTeXTemplates.com>.
- [16] M. S. ZIDI, One-loop Multi-leg Calculation in Gauge Theories : Golem95 Library, PHD thesis (2013), <https://theses.hal.science/tel-01018329v1/document>, tel-01018329.
- [17] M. S. ZIDI, Structure des divergences infrarouges dans les théories de jauge, Magister thesis (2010), <http://dspace.univ-jijel.dz:8080/xmlui/handle/123456789/2045>.

Abstract :

This course is aimed at master's students in theoretical physics. It was taught at the University of Jijel between 2017 and 2023. It constitutes an accessible introduction to any student, whether master or doctoral, wishing to discover the fascinating world of particle physics and high energy physics.

The course focuses on the following experimentally verified gauge theories : electromagnetic interaction theory (QED), strong interaction theory (QCD) and the unified theory of electro-weak interactions (Glashow-Weinberg-Salam model). This course provides a solid foundation for a deep understanding of gauge theories, which form a pillar of modern particle physics.

Keywords : QFT, QED, QCD, Standard Model, Feynman diagrams, loops, regularisation and renormalisation.

Résumé :

Ce cours s'adresse aux étudiants en master de physique théorique. Il a été dispensé à l'université de Jijel entre 2017 et 2023. Il constitue une introduction accessible à tout étudiant, qu'il soit en master ou en doctorat, souhaitant découvrir le monde fascinant de la physique des particules et de la physique des hautes énergies.

Le cours se focalise sur les théories de jauge vérifiées expérimentalement : la théorie de l'interaction électromagnétique (QED), la théorie de l'interaction forte (QCD) et la théorie unifiée des interactions électrofaibles (Modèle de Glashow-Weinberg-Salam). Ce cours offre une base solide pour une compréhension approfondie des théories de jauge, qui constituent un pilier de la physique des particules moderne.

Mots clés : QFT, QED, QCD, Modèle Standard, diagrammes de Feynman, boucles, régularisation et renormalisation.

ملخص :

هذه المحاضرة موجهة لطلاب الماستر في الفيزياء النظرية وقد تم تقديمها في جامعة جيجل بين عامي 2017 و 2023 . إنها مقدمة سهلة الوصول لأي طالب سواء كان في طور الماستر أو الدكتوراه يرغب في اكتشاف عالم فيزياء الجسيمات و فيزياء الطاقات العالية الراهن.

تركز المحاضرة على نظريات العيار المثبتة تجريبياً و هي : نظرية الكهرومغناطيسيّة الكمية (QED) ونظرية الكروموديناميّة الكميّ (QCD) والنموذج العياري الموحد للتفاعلات الكهروضعيفة (نموذج جلاشوف-ويبر-جسلام). ستقدم هذه المحاضرة أساساً قوياً لفهم عميق لنظريات العيار، والتي تعد ركيزة أساسية للفيزياء الحديثة.

كلمات مفتاحية : نظريات المقول الكمية، الكهرومغناطيسيّة الكمية، الكروموديناميّة الكميّ، النموذج العياري، مخططات فاينمان، الحلقات، التعديل و إعادة التقنين.