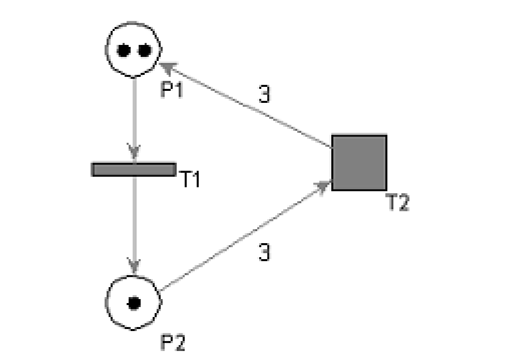
1. Définitions :

Un réseau de Pétri est un moyen de Modélisation du comportement des systèmes interactifs ou dynamiques à événements discrets qui est représenté par un graphe constitué des *Places*, modélisées par des cercles, et *Transitions*, modélisées par des rectangles ou traits.

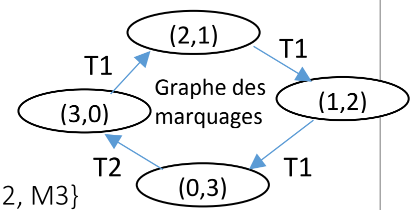
Chaque place contient un nombre entier positif ou nul de marques ou jetons. Le marquage M définit l'état du système décrit par le réseau à un instant donné. C'est un vecteur en ligne de dimension le nombre de places dans le réseau. Le $i^{ème}$ élément du vecteur correspond au nombre de jetons contenus dans la place Pi

Une transition est franchissable lorsque toutes les places d'entrée de la transition contiennent au moins un jeton.

Exemple 01: Un Rdp avec deux places (P1, P2) et deux Transitions (T1, T2) : $R = \{P_i \cup T_j)\}_{j=1,m}^{i=1,n}$



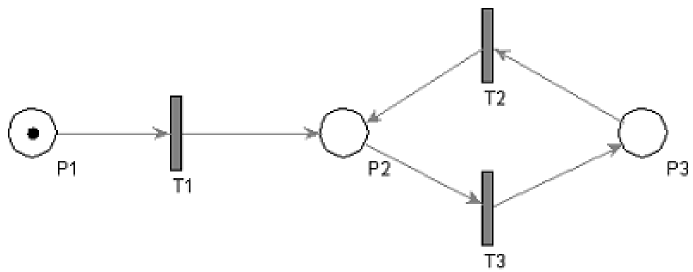
Le franchissement de T1 consomme un seul jeton et produit un seul.
Le franchissement de T2 consomme 03 jetons et produit 03 jetons.
S=T1T1T2 : est une séquence de franchissement. $M0[s\rangle M3$
M0=(2,1) : est le marquage initial.
Le franchissement de T1 donne M1=(1,2)
Le franchissement de T1 donne M2=(0,3)
Le franchissement de T2 donne M3=(3,0)
Le franchissement de T1 donne M0=(2,1)
$\sum$ Marquages Accessibles A = {M0, M1, M2, M3}



2. Propriétés des Réseaux de Pétri :

- **Un RDP Vivant :** Un réseau est vivant si toutes ses transitions le sont (qui sont tirables plusieurs fois). Autrement dit, le réseau de Petri (R, Mo) est vivant si, pour tout marquage M ∈ A(R, Mo), le réseau (R, M) est quasi-vivant.
- **Quasi-vivacité :**
  - **Quasi-vivacité d'une transition :** La quasi-vivacité d'une transition signifie que depuis le marquage initial, cette transition peut être franchie au moins une fois. Autrement dit, pour un réseau marqué (R, Mo) :
  $$t \in T \text{ est quasi\_vivante} \Leftrightarrow \exists M \in A(R, Mo) \text{ tel que } Mo[t\rangle M$$
  - **Quasi-vivacité d'un réseau :** Un réseau est quasi-vivant si toutes ses transitions le sont (i.e., qui sont franchissables au moins une fois, par conséquent, une transition qui n'est pas quasi-vivante est inutile).
- **Pseudo-vivacité :** Un réseau de Petri (R,Mo) est dit pseudo-vivant si pour tout marquage accessible depuis le marquage initial, il existe toujours une transition « t » qui puisse être franchie. Autrement dit :
$$\forall M \in A(R, Mo), \exists t \in T, \exists M' \in A(R, Mo) \text{ tel que } M[t\rangle M'$$

Exemple 02: Que peut-on dire à propos du réseau suivant ?



Il est quasi-vivant (t1 est tirable/franchissable au moins une fois). Il est pseudo-vivant (il existe toujours une transition tirable). Il n'est pas vivant (car à un certain moment, il n'est plus possible de tirer t1).

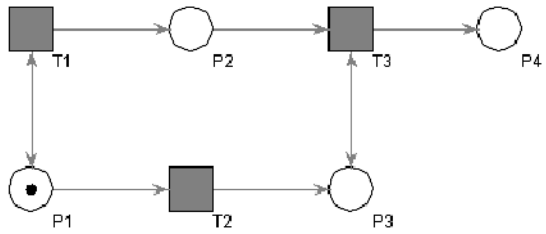
- **Caractère borné :** Cette propriété définit et caractérise la possibilité pour une place d'accumuler une quantité bornée ou pas de jetons au cours de l'évolution d'un réseau.

- **Place k-bornée, non bornée :** Pour un réseau R et un marquage Mo, une place « p » du réseau marqué (R, Mo) est k-bornée si pour tout marquage M accessible depuis Mo, $M(p) \leq k$. Dans le cas contraire la place « p » est dite non-bornée. Autrement dit : $M(p)$ = le nombre de jetons dans la place **p** dedans le marquage M.

$$p\ est\ k\_bornée \iff \forall M \in A(R, Mo), M(p) \leq k$$

- **Réseau borné :** Un réseau marqué est borné si toutes ses places sont bornées. Les réseaux 1-bornés sont appelés des réseaux saufs.

Exemple 03: Examinons le réseau suivant :



Il est facile de voir que le réseau n'est pas borné puisque la place P4 mémorise tous les tirs de T3. Voici quelques séquences qui montrent ce fait : t1t1t2t3t3, t1t1t1t1t2t3t3t3t3, et plus généralement : $t1^n t2 t3^n$.

La place P2 est également non bornée. Il suffit d'exécuter autant de fois que désiré, la transition T1. Par contre les places P1 et P3 sont 1-bornées. Le réseau n'est donc pas sauf et n'est pas borné

- **RdP réinitialisable (ou réversible)**

Un RdP est réinitialisable (ou réversible) pour un marquage initial Mo si Mo est un état d'accueil.

Un RdP possède un état d'accueil Ma pour un marquage initial Mo si pour tout marquage accessible M il existe une séquence « s » telle que M [s⟩ Ma , Autrement dit :

$$\forall M \in A(R, Mo), \exists s \in T^*\ tel\ que\ M[s\rangle Ma$$

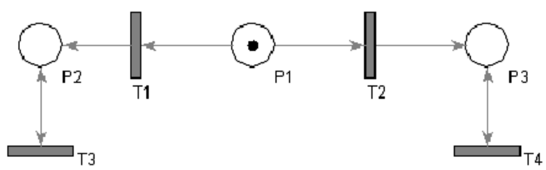
Un Rdp réinitialisable est vivant.

- **Absence de blocage :** Cette propriété est plus faible que celle de vivacité. Elle implique seulement que le réseau a toujours la possibilité d'évoluer.
- **Marquage puits :** Un marquage puits est un marquage à partir duquel aucune transition n'est tirable. Un réseau marqué est sans blocage si aucun de ses marquages accessibles n'est un marquage puits.

Remarque importante :
On note que la vivacité et l'absence de blocage sont deux notions bien distinctes. Un réseau peut être sans blocage bien qu'aucune de ses transitions soient vivantes.

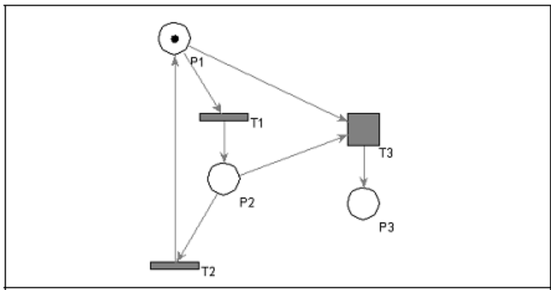
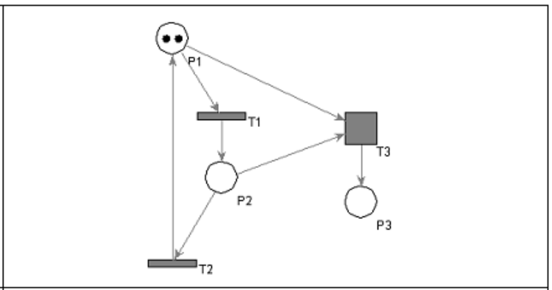
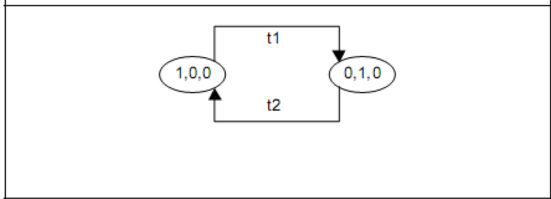
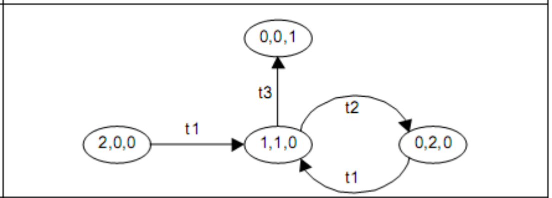
Exemple 04 :

Soit le Rdp suivant :



Ce réseau pseudo et quasi vivant, mais il n'est pas vivant.

Que peut-on dire à propos de la vivacité des réseaux A et B (page suivante)?

A	B
	
	
Il est pseudo vivant et sans blocage. Il n'est pas quasi vivant car « t3 » n'est jamais tirable. Évidemment, il n'est pas vivant.	Il n'est pas pseudo vivant (le marquage 0,0,1 bloque le réseau), il est quasi vivant (voir la définition). Il n'est évidemment pas vivant et il contient un blocage.

3. Types des Réseaux de Pétri :

- **RdP sans conflit :** Est un réseau dans lequel chaque place a au plus une transition de sortie. Un RdP avec conflit est un réseau qui possède donc une place avec au moins deux transitions de sorties. Un conflit est noté: [Pi , {T1,T2,…,Tn}] ; avec T1,T2,…,Tn étant les transitions de sorties de la place Pi.

- **RdP à choix libre :** Est un réseau dans lequel pour tout conflit [Pi , {T1,T2,…,Tn}] aucune des transitions T1,T2,…,Tn ne possède aucune autre place d'entrée que Pi.

- **RdP simple :** Est un RdP dans lequel chaque transition ne peut être concernée que par un conflit au plus.

- **RdP pur :** est un réseau dans lequel il n'existe pas de transition ayant une place d'entrée qui soit à la fois place de sortie de cette même transition.

- **RdP généralisé :** Est un RdP dans lequel des poids (nombres entiers strictement positifs) sont associés aux arcs. Si un arc (Pi ,Tj) a un poids k : la transition Tj n'est franchie que si la place Pi possède au moins k jetons. Le franchissement consiste à retirer k jetons de la place Pi .
  Si un arc (Tj ,Pi) a un poids k : le franchissement de la transition rajoute k jetons à la place Pi. Lorsque le poids n'est pas signalé, il est égal à un par défaut.

- **RdP à capacités :** Est un RdP dans lequel des capacités (nombres entiers strictement positifs) sont associées aux places. Le franchissement d'une transition d'entrée d'une place Pi dont la capacité est cap(Pi) n'est possible que si le franchissement ne conduit pas à un nombre de jetons dans Pi qui est plus grand que Cap(Pi).

4. Algèbre Linéaire:

- **Matrice d'incidence avant :** "k" est le poids de l'arc reliant une place à une transition ou l'inverse.

$$W^- = pré\ (Pi, Tj) = \begin{cases} k & Si\ l'arc\ (Pi\ ,\ \ Tj)\ existe \\ 0 & Sinon \end{cases}$$

- **Matrice d'incidence après :**

$$W^+ = post\ (Pi, Tj) = \begin{cases} k & Si\ l'arc\ (Tj\ , Pi\ )\ existe \\ 0 & Sinon \end{cases}$$

- **Matrice d'incidence :**

$$W = W^+ - W^-$$