

دقة وجودة نموذج الانحدار الخطي البسيط

لقد افترضنا في نموذج الانحدار الخطي البسيط أن التغيرات الناجمة في المتغير التابع بسبب المتغير المستقل والجزء غير المفسر متضمنة في الخطأ العشوائي.

وللحكم على جودة التقدير نحتاج معرفة مدى دقة هذا التقدير ولتحقيق ذلك يتم معرفة ما يأتي:

$$y_i = \bar{y} + \hat{y} - \bar{y} + y_i - \hat{y}$$

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y} - \bar{y}) + (y_i - \hat{y})$$

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 + \sum (y_i - \hat{y})^2$$

SCT = SCE + SCR

مجموع مربعات الإجمالي **SCT**:

يساوي مجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية y_i عن وسطها الحسابي $\bar{y}$:

$$SCT = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

مجموع مربعات الانحدار **SCE**:

يساوي مجموع مربعات انحرافات القيم المقدرة $\hat{y}$ عن وسطها الحسابي $\bar{y}$:

$$SCE = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2$$

مجموع مربعات الأخطاء **SCR**:

يساوي مجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية y_i عن القيم المقدرة $\hat{y}$: **SCR**

$$= \sum (y_i - \hat{y})^2$$

مجموع مربعات الإجمالي **SCT**:

يساوي مجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية y_i عن وسطها الحسابي $\bar{y}$:

$$SCT = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

مجموع مربعات الانحدار **SCE**:

يساوي مجموع مربعات انحرافات القيم المقدرة $\hat{y}$ عن وسطها الحسابي $\bar{y}$:

$$SCE = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2$$

مجموع مربعات الأخطاء **SCR**:

يساوي مجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية y_i عن القيم المقدرة $\hat{y}$:

$$SCR = \sum (y_i - \hat{y})^2$$

$$SCT = SCR + SCE$$

$$\frac{SCT}{SCT} = \frac{SCR}{SCT} + \frac{SCE}{SCT}$$

$$1 = R^2 + \frac{SCE}{SCT}$$

$$R^2 = 1 - \frac{SCE}{SCT}$$

حيث R^2 يمثل معامل التحديد الذي يقيس نسب الاختلاف في المتغير التابع،
معامل الارتباط هو جذر لمعامل التحديد

طريقة حساب تباين الخطأ ، تباين الحد الثابت ومعامل الانحدار

القانون لحساب تباين الخطأ يحسب كما يلي:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_i^2$$

القانون لحساب تباين الحد الثابت

$$V(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)$$

القانون لحساب تباين معامل الانحدار

$$V(\hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

يوضح الجدول التالي الكمية المنتجة y_i من مادة الاسمنت بالمقارنة بعدد العمال لسنة 2023

y_i	58	105	88	118	117	137	157	169	149	202
x_i	2	6	8	8	12	16	20	20	22	26

المطلوب:

1. اكتب شكل النموذج الرياضي والاحصائي
2. احسب القيم الاتجاهية لكمية المنتجة
3. احسب تباين الحد الثابت وتباين لمعامل الانحدار

السؤال الاول:

النموذج الرياضي يكتب على الشكل التالي:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

النموذج الاحصائي يكتب على الشكل التالي:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$$

السؤال الثاني

نقوم بتقدير معلمات النموذج الاحصائي، ثم اكتب معادلة خط الانحدار المقدرة ونحسب القيم الاتجاهية.
النتائج موضحة في الجدول ادناه

t	yi	xi	B0	B1	القيم الاتجاهية	ei*ei
1	58	2			70	144
2	105	6			90	225
3	88	8			100	144
4	118	8			100	324
5	117	12			120	9
6	137	16			140	9
7	157	20			160	9
8	169	20			160	81
9	149	22			170	441
10	202	26	60	5	190	144
المجموع	1300	140				المجموع=1530
الوسط	130	14				

xi*xi	yi*yi	xi*yi
4	3364	116
36	11025	630
64	7744	704
64	13924	944
144	13689	1404
256	18769	2192
400	24649	3140
400	28561	3380
484	22201	3278
676	40804	5252
2528	184730	21040

السؤال الثالث : يجب حساب البواقي المقدرة اي الخطأ العشوائي

الانحراف المعياري لتقدير الخطأ نرسم له

$$\sqrt{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2} = \hat{\sigma}_{\varepsilon}$$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum e^2}{n - 2}}$$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1530}{10 - 2}} = 13,829$$

نحسب

1. تباین الحد الثابت
2. تباین لمعامل الانحدار

1. تبين الحد الثابت

$$\begin{aligned} S_{\hat{\beta}_0} &= \sqrt{V(\hat{\beta}_0)} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2} \\ &= \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)} \\ &= 13,829 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{14*14}{568}} \\ &= 9,224 \end{aligned}$$

2. تباین لمعامل الاتحاد

$$s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{V(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$
$$= \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$s_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}} = \frac{13,829}{\sqrt{568}} = \mathbf{0,58}$$