Chapitre N°1
Introduction aux équations de Lagrange

I.1. Introduction

Ce chapitre comporte des rappels, des définitions et des généralités sur les équations de Lagrange nécessaires pour l´étude des systèmes vibratoires.

I.2. Rappels

I.2.1 Principe fondamental de la dynamique

- **Mouvement rectiligne :** Le principe fondamental de la dynamique pour une masse **m** qui se déplace rectilignement, sous l´effet de forces $\vec{F}$ avec une accélération γ :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

- **Mouvement de rotation :** Le principe fondamental de la dynamique pour un corps en rotation : $\sum \vec{M} = I\vec{\ddot{\theta}}$.

- Avec : I est le moment d'inertie autour de l´axe de rotation.

I.2.2 Force dérivant d´un potentiel

Une force est dite elle dérive d´un potentiel, si le travail de cette force ne dépend pas de la trajectoire du mouvement :

$$\overrightarrow{Rot}\ \vec{F} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{F} = -\ \overrightarrow{grad}\ E_P$$

Avec : E_P est l'énergie potentielle.

I.2.3 Energie cinétique

- **Mouvement rectiligne :** L'énergie cinétique d´un corps de masse **m**, se déplaçant rectilignement à la vitesse $\vec{v}$: $E_C = \frac{1}{2}\, m\, v^2$.

- **Mouvement de rotation** : L'énergie cinétique d´un corps qui se déplace d´un mouvement rotatif d´un angle θ: $E_C = \frac{1}{2}\, I\, \dot{\theta}^2$.

I.3. Définitions

I.3.1 Oscillation

Une vibration ou **oscillation** est un mouvement d'une particule ou système mécanique autour de sa position d'équilibre, qui se répète à des intervalles de temps réguliers.

hafsaoui@univ-jijel.dz

I.3.2 Mouvement périodique

- Un mouvement périodique c'est un mouvement qui se reproduit identiquement à chaque cycle : $\boldsymbol{x(t+T)=x(t)}$ **.**
- La durée d'un cycle est appelée période **T** qui s'exprime en seconde [**s**].
- La fréquence $\boldsymbol{f}$, mesurée en hertz (**Hz)** ou (**s**$^{-1}$) est reliée à la période par : $\boldsymbol{f=\frac{1}{T}}$
- La pulsation **ω,** mesurée en **rad/s :** $\boldsymbol{\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}}$ **.**

I.3.3 Mouvement vibratoire sinusoïdal

Un mouvement vibratoire sinusoïdal est un mouvement périodique possédant une élongation de type :

$$\boldsymbol{x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)}$$

- Position à l'instant ; $\boldsymbol{x(t)}$ **;**
- L'élongation maximale, appelée : **Amplitude (A) ;**
- La pulsation du mouvement : $\boldsymbol{\omega=\frac{2}{T}\ [rad/s]}$ **;**
- La phase à l'instant t=0 : **phase initiale** $\boldsymbol{\varphi}$

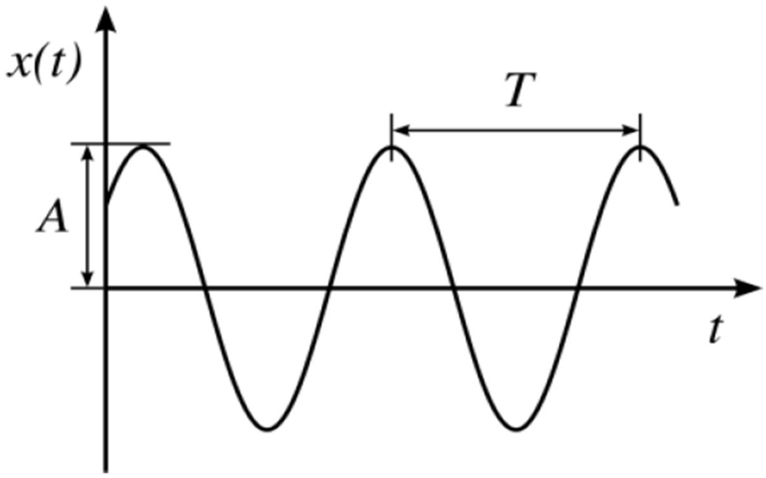

Fig. I.1 :Mouvement périodique sinusoïdal

I.3.4 Mouvement Oscillatoire

Un système oscillant est caractérisé par des mouvements périodiques au voisinage d'une position d'équilibre.

Lorsque le mouvement est sinusoïdal, l'oscillateur est dit **harmonique**

I.3.5 Coordonnées généralisées

Les coordonnées généralisées sont tout ensemble de variables permettant de spécifier l'état d'un système physique.

I.3.6 Degrés de liberté

On appel degré de liberté (ddl) d'un système, le nombre de coordonnées généralisées liées, pour configurer tous les éléments du système à tout instant moins (-) le nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles : $\boldsymbol{d = N - r}$ **.** Avec :

d: Degré de liberté.

N **:** Nombre de coordonnées généralisées.

r **:** Nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles.

I.4. Equations de Lagrange pour une particule

I.4.1 Equations de Lagrange

La fonction de Lagrange **L**, appelée aussi **Lagrangien du système**, est defini par la différence entre l'énergie cinétique **Ec** et l'énergie potentielle **Ep** : $\boldsymbol{L = E_C - E_P}$

L´équation de Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{ext,q}$$

Avec :

q : Coordonnées généralisées.

$\mathbf{F_{ext,q}}$: Forces extérieures**.**

I.4.2 Cas des systèmes conservatifs

Pour des systèmes conservatifs, la force appliquée dérive d'un potentiel. D´où la forme de l´équation de Lagrange, dans le cas d´un système conservatif est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

I.4.3 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

Dans le cas d'une force de frottement dépendant de la vitesse : $\vec{F}=-\alpha\,\vec{v}$, l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=-\alpha\dot{q}$$

L´équation de Lagrange s´écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=0$$

D est la fonction de dissipation donnée par : $D=\frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$. Elle est liée à la force de frottement par : $\vec{F}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$.

I.4.4 Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Dans le cas d'une force extérieure dépendant du temps, l'équation de Lagrange s'écrit comme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=F_{ext,q}-\alpha\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=F_{ext,q}$$

I.5. Système à plusieurs degrés de liberté

Dans le cas général d´un système à N degrés de libertés, il est nécessaire d´avoir N coordonnées généralisées et donc N équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}=F_{ext,q_i} \qquad i=1,2,3,\dots\dots\dots\dots\dots N$$

hafsaoui@univ-jijel.dz