I. BOUTANA-HAFSAOUI

Chapitre N°2
Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

II.1. Introduction

Ce chapitre concerne l´étude des systèmes oscillatoires à un degré de liberté, dont leurs vibrations sont représentées par une seule coordonnée généralisée q, qui est l´écart par rapport à sa position d´équilibre. De plus, les oscillations étudiées sont libres, c´est adire pas de forces d´excitation.

II.2. Définitions

II.2.1 Systèmes linéaires

La coordonnée généralisée q(t) d´un système linéaire à un degré de liberté, obéit à une equation differentielle du second ordre lineaire a coefficients constants de la forme :

$$\boldsymbol{\mu\ddot{q} + \beta\dot{q} + \kappa q = F(t)} \qquad \textbf{(1)}$$

- $\boldsymbol{\mu > 0}$ **:** Cosfficient d´inertie du système, qui représente, soit la masse m (cas de mouvement de translation des systèmes mécaniques), le moment d´inertie I (cas de mouvement de rotation des systèmes mécaniques) ou l´inductance L (dans le cas des systèmes électriques).
- $\boldsymbol{\beta \geq 0}$ **:** Coefficient de frottement du système, qui représente le coefficient de frottement f (dans le cas des systèmes mécaniques) ou la résistance R (dans le cas des systèmes électriques).
- $\boldsymbol{\kappa > 0}$ **:** Constante d´élasticité du système, qui représente la constante d´élasticité K ou la constante de torsion (dans le cas des systèmes mécaniques), ou l´inverse de la capacite 1/C (cas des systèmes électriques).

II.2.2 Oscillations libres ($\boldsymbol{F(t) = 0}$)

Les oscillations sont libres en absence de toute force d´excitation, c´est à dire $\boldsymbol{F(t) = 0}$. Dans ce cas l´équation differentielle devient homogène :

$$\boldsymbol{\mu\ddot{q} + \beta\dot{q} + \kappa q = 0} \qquad \textbf{(2)}$$

hafsaoui@univ-jijel.dz

II.3. Oscillations libres des systèmes non amorties ($\beta = 0$)

II.3.1 Etude généralisée

L´équation différentielle régissant de tels systèmes est de la forme :

$$\mu\ddot{q} + \kappa q = 0 \quad \Rightarrow \; \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (3)$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ **:** La pulsation propre du système.

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ **:** Fréquence propre des oscillations.

La solution de l´équation differentielle (3) est une fonction sinusoïdale du temps :

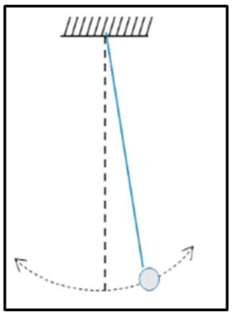
$$q(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (4)$$

A et φ représentent respectivement, l´amplitude des oscillations et la phase initiale, qui sont calculées à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t) = \dot{q}_0 \end{cases}$$

II.3.2 Exemples

- **Pendule simple filaire**

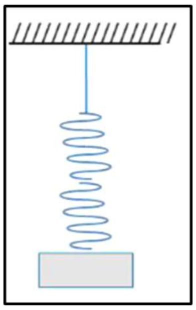


$$E_C = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad E_P = mgl(1-\cos\theta)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

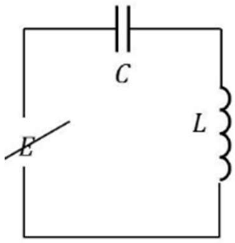
- **Pendule simple à ressort**



$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \qquad E_P = \frac{1}{2}ky^2 \qquad L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}ky^2$$

$$\ddot{y} + \frac{\kappa}{m}y = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

- **Circuit électrique LC**



$$E_C = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 \qquad E_P = \frac{1}{2C}q^2 \qquad L = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2C}q^2$$

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

II.4. Oscillations libres des systèmes amortis ($\beta \neq 0$)

II.4.1 Equation de Lagrange

Dans le cas d´oscillations libres de systèmes amortis (présence de forces de frottement), l´equation de Lagrange s´écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\beta\dot{q} \qquad (5)$$

II.4.2 Equation differentielle

L´equation differentielle qui régit les systèmes amortis dans le cas d´oscillations libres s´écrit sous la forme :

$$\mu\ddot{q} + \beta\dot{q} + \kappa q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (6)$$

$\boldsymbol{\delta > 0}$ **:** Facteur d´amortissement défini par : $\delta = \frac{\beta}{2\mu}$

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ **:** La pulsation propre du système.

II.4.3 Résolution de l´équation differentielle

La résolution de l´équation differentielle (6) permet de trouver différentes solutions qui dépend de la valeur de δ par rapport à ω_0 :

- $\boldsymbol{\delta > \omega_0}$ **: Système fortement amorti**

Dans ce cas, la solution de l´equation differentielle (6) s´écrit :

$$q(t) = e^{-\delta t}\left[Ae^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,t} + Be^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,t}\right] \qquad (7)$$

hafsaoui@univ-jijel.dz

A et B sont des constantes déterminées par les conditions initiales .

Dans le cas des conditions initiales : $\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(t=0) = A + B = q_0 \\ \dot{q}(t) = \dot{q}_0 \end{cases}$

$q(t)$ est une fonction exponentielle qui tend vers zéro. Le système est **non oscillant** et le **régime est apériodique** (fig. II.1).

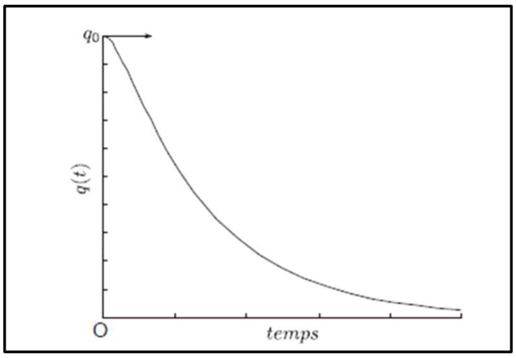


Fig. II.1 : q(t) cas du régime apériodique

- $\boldsymbol{\delta = \omega_0}$ **: Système en amortissement critique**

Dans ce cas, la solution générale de l´equation differentielle (6) est de la forme :

$$q(t) = e^{-\delta t}\,(A + Bt) \qquad \textbf{(8)}$$

Dans le cas des conditions initiales : $\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t) = 0 \end{cases}$ $q(t)$ est une fonction exponentielle qui tend vers zéro. Le système est **non oscillant** et le **régime est critique** (fig. II.2).

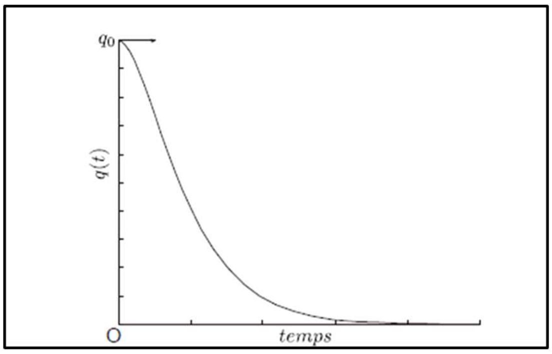


Fig. II.2 : q(t) cas du régime critique

- $\boldsymbol{\delta < \omega_0}$ **: Système faiblement amorti**

Dans ce cas, la solution générale de l´equation differentielle (6) est de la forme :

$$\boldsymbol{q(t) = A\, e^{-\delta t}\, \cos(\omega_A t + \varphi)} \qquad \textbf{(9)}$$

$\boldsymbol{\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ **,** A et φ sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

Dans le cas des conditions initiales : $\begin{cases} \boldsymbol{q(t=0) = q_0} \\ \boldsymbol{\dot{q}(t) = 0} \end{cases}$ $\boldsymbol{q(t)}$ est une fonction sinusoïdale qui varie entre les deux valeurs $\boldsymbol{-A\, e^{-\delta t}}$ et $\boldsymbol{A\, e^{-\delta t}}$. Le système est en **régime pseudopériodique** (fig. II.3).

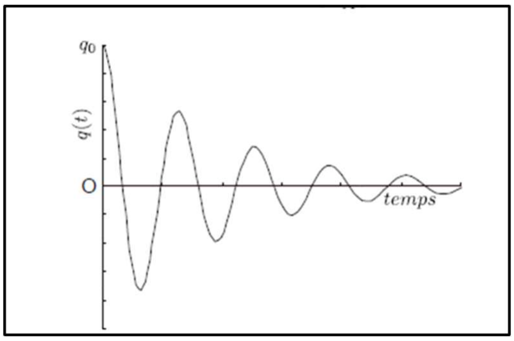


Fig. II.3 : q(t) cas du régime pseudopériodique

Remarque : On définit le **décrément logarithmique** qui représente la rapidité de décroissance des élongations par:

$$\boldsymbol{\xi = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}}. \qquad \textbf{(10)}$$