Chapitre N°3
Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

III.1. Introduction

Ce chapitre concerne l´étude des systèmes oscillatoires à un degré de liberté, dont leurs oscillations étudiées sont forcées, c´est à dire en présence de forces d´excitation.

III.2. Equation différentielle

III.2.1 Etude généralisée

L'équation de Lagrange des oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \beta\dot{q} = F(t) \tag{1}$$

Dans ce cas, l'équation differentielle du mouvement s´écrit sous la forme :

$$\mu\ddot{q} + \beta\dot{q} + \kappa q = F(t) \quad \Rightarrow \; \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = F(t) \tag{2}$$

III.2.2 Résolution de l´équation différentielle

La solution de l´équation differentielle (2) est la solution d´une equation differentielle du second ordre avec second membre :

$$q(t) = q_H(t) + q_P(t) \tag{3}$$

- $q_H(t)$ est la solution homogène :

  - $\delta > \omega_0$ **(**Système fortement amorti - régime apériodique**):**

$$q_H(t) = e^{-\delta t}\left[Ae^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,t} + Be^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\,t}\right] \tag{4}$$

  - $\delta = \omega_0$ **(**Système en amortissement critique - régime est critique**) :**

$$q_H(t) = e^{-\delta t}\,(A + Bt) \tag{5}$$

- $\boldsymbol{\delta < \omega_0}$ (Système faiblement amorti - régime pseudopériodique) :

$$q_H(t) = A\, e^{-\delta t}\, \cos(\omega_A t + \varphi_P) \tag{6}$$

Elle est toujours proportionnelle à $e^{-\delta t}$ (pour les trois cas de valeurs de δ).

Après un intervalle de temps :

$t \to \infty$ $e^{-\delta t} \to 0$ et $q_H(t) \to 0$ $alors$ $q(t) \to q_P(t)$: C´est **le régime permanent.**

Si la solution homogène n´est pas négligeable : le **régime est transitoire.**

- $q_P(t)$ est la solution particulière qui dépend de la forme de $F(t)$.

III.2.3 Excitation harmonique (sinusoïdale)

Une force d´excitation sinusoïdale est de la forme :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \Phi) \tag{7}$$

L´équation differentielle des oscillations s´écrit :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = F_0 \cos(\Omega t + \Phi) \tag{8}$$

La solution particulière de cette équation différentielle est donc :

$$q_P(t) = A_P \cos(\Omega t + \varphi_P) \tag{9}$$

La détermination de l´amplitude A_P et la phase initiale φ_P est possible grâce à la méthode des nombres complexes.

En utilisant les nombres complexes :

La force d´excitation s´écrit sous la forme :

$$F(t) = F_0 e^{i(\Omega t + \Phi)} \tag{10}$$

La solution particulière (permanente) s´écrit comme suit :

$$\underline{q_P}(t) = A_P e^{i(\Omega t + \varphi_P)} = A_P\, e^{i\varphi_P}\, e^{i\Omega t} = \underline{A_P}\, e^{i\Omega t} \tag{11}$$

$\underline{A_P} = A_P\, e^{i\varphi_P}$ est l´amplitude complexe.

En remplaçant dans l´équation (8), on trouve :

$$\boldsymbol{A_P} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2}} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\varphi_P} = \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{arctg}\left[\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right] \tag{13}$$

La solution permanente s´écrit donc :

$$\boldsymbol{q_P(t)} = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2}} \cos\left(\Omega t + \Phi - \mathrm{arctg}\left[\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right]\right) \tag{14}$$

III.2.4 Excitation périodique

Dans le cas ou $\boldsymbol{F(t)}$ est periodique de période **T,** nous utilisons son développement de Fourier :

$$\boldsymbol{F(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t) \tag{15}$$

L´équation differentielle s´écrit alors :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t) \tag{16}$$

La solution permanente peut être calculée sous la forme :

$$\boldsymbol{q_P(t)} = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\Omega t+\varphi) + b_n \sin(n\Omega t+\varphi)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2}} \tag{17}$$

III.3. Impédance mécanique

On appelle impédance mécanique, le rapport des amplitudes complexes de la force $\boldsymbol{F(t)}$ et de la vitesse $\boldsymbol{v(t)}$: $\boldsymbol{F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \Phi)}$ $\boldsymbol{v(t) = v_0 \cos(\Omega t + \theta)}$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{V}} = \frac{F_0}{v_0} e^{i(\theta-\Phi)} = \frac{F_0}{v_0}[\cos(\theta-\Phi) + i(\theta-\Phi)] \tag{18}$$

Cette impédance mécanique est donc sous la forme : $\underline{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{iX}$ où **R** est la partie réelle **résistive** et **X** est la partie imaginaire **réactive.**