Cours 01 : Rappels mathématiques

1. Introduction

Pour analyser un phénomène physique, tel que le déplacement d'un point A à un point B, il est important de prendre en compte les variables clés qui lui sont associées, notamment la distance parcourue, la vitesse de déplacement et le temps écoulé. La relation mathématique entre ces variables forme ce que l'on appelle une loi physique (par exemple, la vitesse est définie comme le rapport entre une distance et un temps). Si certains problèmes peuvent être résolus par une interprétation directe des lois physiques, d'autres cas nécessitent le recours à des méthodes de modélisation plus avancées, comme l'analyse dimensionnelle.

2. Analyse dimensionnelle التحليل البعدي

L'analyse dimensionnelle est un outil théorique utilisé pour interpréter les problèmes en fonction des dimensions des grandeurs physiques impliquées, telles que la longueur, le temps ou la masse. Elle permet notamment de :

- Vérifier la validité des équations dimensionnelles,
- Identifier la nature des grandeurs physiques,
- Assurer l'homogénéité des lois physiques,
- Déterminer l'unité d'une grandeur physique à partir des unités fondamentales (mètre, seconde, kilogramme, etc.).

3. Grandeurs physiques

En physique, certaines grandeurs physiques sont dites fondamentales, comme la longueur, le temps et la masse. D'autres, appelées grandeurs dérivées, telles que la vitesse, l'accélération ou la force, peuvent être exprimées en fonction de ces grandeurs fondamentales.

3.1. Unité

La valeur d'une grandeur physique est exprimée sous la forme du produit d'un nombre réel une unité.

$$X = x \text{ Unité}$$

Avec :

x : un réel,

Unité: l'unité choisie pour évaluer la grandeur.

Il y a deux types de n d'unités :

- Système SI MKSA (mètre, kilogramme, seconde, ampère), c'est le système le plus utilisé

- Système CGSA (centimètre, gramme, seconde, ampère),, il est moins utilisé

3.2. Dimension d'une grandeur

La dimension d'une grandeur représente sa nature. Il s'agit d'une notion plus générale que son unité, qu'on choisit en fonction de l'échelle du phénomène étudié (on peut changer l'unité mais pas la dimension d'une grandeur). Bien que la dimension et l'unité soient liées, il est essentiel de distinguer l'une de l'autre.

Exemple : une distance a pour dimension une longueur L mais peut s'exprimer dans différentes unités : m, cm, pouce, mille, parsec (échelle astronomique), angström (échelle atomique).

Dans le système international SI, les grandeurs physiques fondamentales ont les dimensions et les unités suivantes :

Grandeur fondamentale	Symbol	Dimension	Unité
Longueur	l	L	Mètre (m)
Masse	m	M	Kilogramme (kg)
Temps	t	T	Seconde (s)
Intensité du courant	i	I	Ampère (A)

Exemple: l'intensité d'un courant électrique est donnée par : i = dq/dt où dq représente une quantité de charges et dt un intervalle de temps. donc dq = i dt : 2 grandeurs fondamentales i et t, dq : est une grandeur dérivée

4. Equations aux dimensions

L'équation aux dimensions $G = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\delta}\ldots$ qui relie une grandeur dérivée G aux grandeurs fondamentales L M T… relie aussi l'unité de G aux unités des grandeurs L M T . La dimension est représentée par ce symbole : [ ]

Exemple : F = ma

$[F] = [m][a] = M\,LT^{-2}$

LMT^{-2} c'est l'équation aux dimensions de F = ma, avec [m] = M et $[a] = L/T^2 = LT^{-2}$.

Remarque importante : Certaines grandeurs n'ont pas de dimension comme certaines constantes (ex : [½]=[0.3]= [2]=1), attention pas toutes les constantes. Les fonctions mathématiques et leurs arguments x comme par exemple: [sin(x)]= [cos(x)]= [tan(x)]= [exp(x)]=[log(x)]=$[\pi]$ = $[\theta]$= 1 donc : [x] = 1.

Un angle n'a pas de dimension mais il a une unité dans le système international : le radian.

Exemple :

$x = x_0 \cos(wt + \emptyset)$ oscillation d'une masse ; [x] = [x0] ; [wt + Ø] = [wt]= [Ø]=1

4.1. Homogénéité des équations aux dimensions

Les deux membres d'une équation aux dimensions doivent avoir les mêmes dimensions puisqu'ils représentent des grandeurs de même nature.

$G=A\pm B\Rightarrow[G]=[A]=[B]$

$G=A*B\Rightarrow[G]=[A]*[B]$

$G=A/B\Rightarrow[G]=[A]/[B]$

$G=A^n\Rightarrow[G]=[A]^n$

4.2. Exemple :

Soit la vitesse d'un corps $v = At^3 - Bt$, ou t représente le temps. Trouver les dimensions des coefficients A et B et en déduire leurs unités dans le système SI.

Solution :

At^3 et Bt doivent etre homogènes à la vitesse v qui a pour dimension une longueur divisée par un temps $[At^3] = [Bt] = [v] = \frac{L}{T}$

Donc $[At^3] = [A][t]^3 = LT^{-1}$ et $[A]T^3 = LT^{-1}$ ce qui donne : $[A] = LT^{-4}$ et l'unité $m.s^{-4}$

$[Bt] = [B][t] = LT^{-1}$ et $[B]T = LT^{-1}$ ce qui donne : $[B] = LT^{-2}$ et l'unité $m.s^{-2}$

5. Calcul d'erreurs et d'incertitudes

La mesure d'une grandeur physique est souvent attachée d'erreur qu'on estime par l'incertitude. Les erreurs de mesure sont dues à l'instrument de mesure ou à l'opérateur. Il n'existe pas de mesure exacte, mais une mesure plus ou moins proche de la valeur « vraie » de la grandeur à mesurer.

5.1. Types d'erreurs et d'incertitudes

a) Erreur absolue e_a :

Elle représente la différence entre la valeur exacte (vraie) et la valeur mesurée $e_a = |X_m - X_v|$.

b) Erreur relative e_r :

C'est le rapport entre l'erreur absolue et la valeur mesurée $e_r = \frac{e_a}{X_m}$.

c) Incertitude absolue Δ_a :

C'est le maximum des erreurs absolues $\Delta_a = max|X_m - X_v|$. Elle possède la même unité que sa grandeur mesurée et on écrit le résultat de la mesure comme : $X = (X_m \pm \Delta x)$.Unité.

a) Incertitude relative e_r :

C'est le rapport entre l'incertitude absolue et la valeur mesurée, multipliée par 100. Et le résultat est donné en % : $\Delta_r = \frac{\Delta_a}{X_m}$x100%.

5.2. Calcul d'incertitudes

5.2.1. Somme et différence :

Soit une grandeur G qui est la somme des différentes grandeurs (x, y et z), telle que : $G = ax + by - cz$, l'incertitude absolue liée à G est la somme algébrique des incertitudes des différentes grandeurs, ainsi : $\Delta G = |a|\Delta x + |b|\Delta y + |-c|\Delta z$.

5.2.2. Produit et quotient :

Soit une grandeur G qui est le produit de deux grandeurs x et y, telle que : $G = Kx^{\alpha}y^{\beta}$, l'incertitude absolue liée à G est calculée en trois étapes comme suit :

Etape 01 : $\ln(G) = \ln\left(Kx^{\alpha}y^{\beta}\right) = \ln(k) + \alpha \ln(x) + \beta \ln(y)$,

Etape 02 : $d\ln(G) = d(\ln(k)) + \alpha\, d(\ln(x)) + \beta\, d(\ln(y))$,

$$\frac{1}{G}d\mathrm{G} = \frac{1}{k}dk + \alpha\,\frac{1}{x}d\mathrm{x} + \beta\frac{1}{y}dy$$

Etape 03 : $\frac{\Delta \mathrm{G}}{G} = 0 + |\alpha|\,\frac{\Delta \mathrm{x}}{x} + |\beta|\frac{\Delta \mathrm{y}}{y}$

Donc l'incertitude absolue sur G est : $\Delta \mathrm{G} = G(|\alpha|\,\frac{\Delta \mathrm{x}}{x} + |\beta|\frac{\Delta \mathrm{y}}{y})$

Et l'incertitude relative sur G est : $\frac{\Delta \mathrm{G}}{G} = |\alpha|\,\frac{\Delta \mathrm{x}}{x} + |\beta|\frac{\Delta \mathrm{y}}{y}$

5.3. Exemple 1:

On effectue la mesure du rayon d'un disque r = (2±0,1)m Quelle est l'incertitude absolue sur la surface du disque ? Quelle est l'incertitude relative ?

Solution :

On a S = πr^2 Alors : $\ln(S) = \ln(\pi r^2)$ et $\ln(S) = 2\ln(r)$, ensuite : $d\ln(S) = 2d(\ln(r))$, donc : $\frac{1}{S}dS = \frac{2}{r}dr$ et $\frac{\Delta S}{S} = 2\,\frac{\Delta \mathrm{r}}{r}$, on obtient : $\Delta S = 2\,S\,\frac{\Delta \mathrm{r}}{r}$ par application numérique on trouve : $\Delta S = 2\,(12{,}5)\,\frac{0{,}1}{2} = 1{,}25m$

Par suite l'incertitude relative sur la surface est donnée par $\frac{\Delta S}{S}\mathrm{x}100\% \approx 10\%$.

5.4. Exemple 2:

On considère deux résistances R_1 =30±0,1 Ω et R_2 =70±0,2 Ω. Si les deux résistances étaient placées en série, quelle serait l'incertitude absolue et relative de la résistance équivalente ?

Solution

On a $R_{eq} = R_1 + R_2$, donc : $\Delta R_{eq} = \Delta R_1 + \Delta R_2$, Alors : $\Delta R_{eq} = 0.1 + 0.2 = 0.3\Omega$.

L'incertitude relative est : $\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}} = \frac{0.3}{100} = 0.003 = 0.3\%$.