Cours 02 : Analyse vectorielle

2.1 Introduction

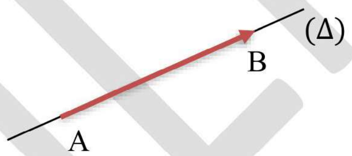
En physique, on distingue deux types de grandeurs : les grandeurs scalaires (par exemple, la masse, la longueur…etc.) et les grandeurs vectorielles (comme la vitesse $\vec{v}$ et la force $\vec{F}$).

- **Grandeur scalaire** : elle est caractérisée par un nombre (scalaire) et une unité (exemple m=5kg).
- **Grandeur vectorielle** : elle est définie par un nombre, une unité, et une direction (exemple : $\vec{v}$=5m/s $\vec{\imath}$).

2.2 Definition d'un vecteur:

Un vecteur est un segment de droite orienté présentant les caractéristiques suivantes :

- Origine : le point A
- Supprt : (Δ)
- Direction : de A vers B
- Module : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$



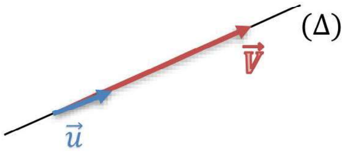
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ d'origines différentes sont :

-Egaux : si ils ont le meme module, le meme support ou des supports parallèles et le **meme sens.**

-**Opposés :** si ils ont le meme module, le meme support ou des supports parallèles et des **sens opposés.**

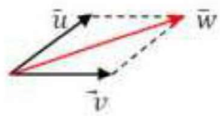
2.3 Vecteur unitaire :

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme (le module) est égale à 1 ($|\vec{u}| = 1$). Tout vecteur $\vec{V}$ peut être associé à un vecteur unitaire $\vec{u}$, tel que : $\vec{V} = |\vec{V}|\vec{u} = V\vec{u}$ ou le vecteur $\vec{u}$ partage les mêmes caractéristiques que $\vec{V}$: même origine, même direction, et même sens, à l'exception de sa norme.



2.4 Addition vectorielle :

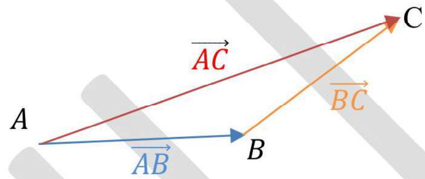
Graphiquement, la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{w}$ obtenue en utilisant le parallélogramme :



Règle de Chasles :

La règle de Chasles énonce que si A, B, et C sont trois points dans l'espace, alors le vecteur allant de A à C est la somme des vecteurs allant de A à B et de B à C :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



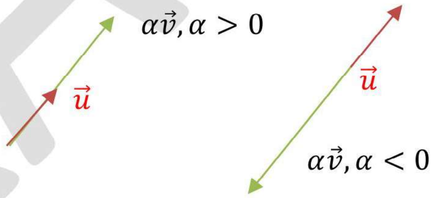
2.5 Produit d'un vecteur par un scalaire

Le produit d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire α donne le vecteur $\alpha\vec{v}$, ce vecteur a le meme support que $\vec{v}$.

Le sens de $\alpha\vec{v}$ est le meme de $\vec{v}$ si $\alpha \geq 0$ et l'opposés de $\vec{v}$ si $\alpha \leq 0$.

Le module de $\alpha\vec{v}$ est donné par $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$,

Le produit d'une somme de vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ par un scalaire $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ et le produit d'un vecteur $\vec{v}$ par une somme de scalaires $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.



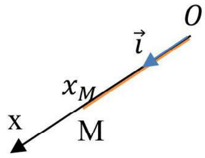
2.6 Système de coordonnées cartésiennes :

- **Système de coordonnées cartésiennes unidimentionnel** 1D :

Ce système permet de reperer un point sur un axe (Ox), muni d'un vecteur unitaire $\vec{\imath}$.

Exemple : Soit $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath}$.

Si $x_M = 5\ cm$, Donc $\overrightarrow{OM} = 5\vec{\imath}$



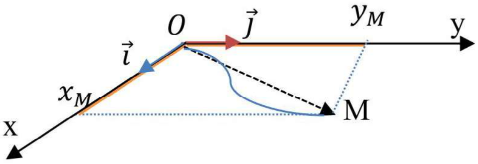
- **Système de coordonnées cartésiennes bidimentionnel** 2D :

Ce système permet de reperer un point dans le plan (Oxy), il est composé de deux axes (Ox) et (Oy) munis de deux vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Exemple : Soit $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath}$

Si $x_M = 5\ cm$, et $y_M = 6\ cm$,

Donc $\overrightarrow{OM} = 5\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$

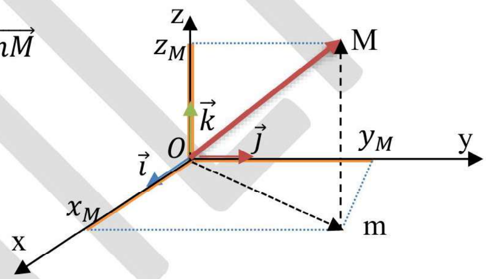


- **Système de coordonnées cartésiennes tridimentionnelles** 3D :

Ce système permet de reperer un point dans l'espace, il est composé de trois axes (Ox), (Oy) et (Oz) munis de trois vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

Soit x, y et z les projections du point M sur les axes Ox, Oy et Oz , respectivement. Le point m est la projection du point M sur le plan (Oxy).

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$



$$\begin{cases} \overrightarrow{Om} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{mM} = z_M\vec{k} \end{cases}$$

Donc : $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} + z_M\vec{k}$

Et x_M, y_M et z_M sont les coordonnées cartésiennes du point M.

Exemple : Soit $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} + z_M\vec{k}$

Si $x_M = 5\ cm,\ y_M = 6\ cm$ et $z_M = 8\ cm$

Donc $\overrightarrow{OM} = 5\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 8\vec{k}$

2.6.1 Somme de deux vecteurs

Dans un repère R(O,x,y,z) on definit deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, tels que $\vec{A} = x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath} + z_A\vec{k}$ et $\vec{B} = x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath} + z_B\vec{k}$. Donc :

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_A + x_B)\vec{\imath} + (y_A + y_B)\vec{\jmath} + (z_A + z_B)\vec{k}$$

Ou bien $\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \\ z_A + z_B \end{pmatrix}$

2.6.2 Produit scalaire de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ faisant entre eux un angle θ, Le produit scalalire $\vec{A}.\vec{B} = c$ avec c est un scalaire tel que $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\mathbf{cos}(\vec{A},\vec{B})$ et $(\vec{A},\vec{B}) = \theta$.

Si $\vec{A}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$. Alors, $\vec{A}.\vec{B} = x_A.x_B + y_A.y_B + z_A z_B$

- Le produit scalaire est **commutatif** $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

- $\vec{A}.\vec{A} = \vec{A}^2 = A^2$

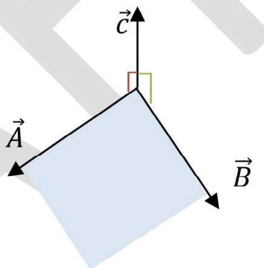
- $(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{C}+\vec{D}) = \vec{A}.\vec{C} + \vec{A}\vec{D} + \vec{B}\vec{C} + \vec{B}\vec{D}$

Remarque : le produit **scalaire** de deux vecteurs **unitaires identiques** est **égale à 1** : $\vec{\imath}.\vec{\imath} = 1$, $\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = 1$, $\vec{k}.\vec{k} = 1$. Le produit **scalaire** de deux vecteurs **unitaires differents est nul** : $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$, $\vec{\jmath}.\vec{k} = 0$, $\vec{k}.\vec{\imath} = 0$.

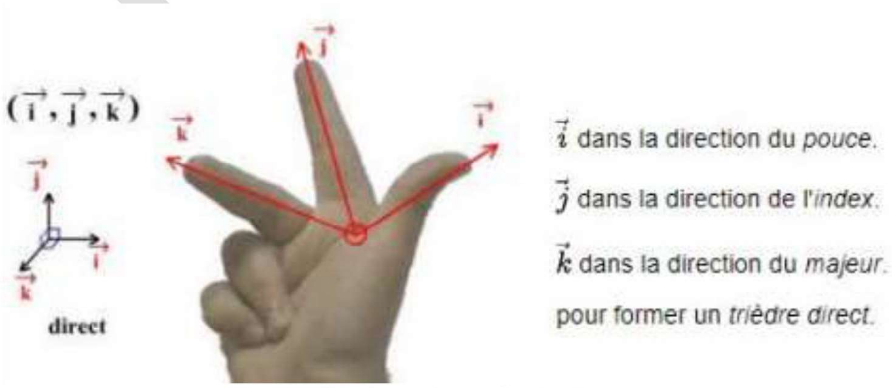
Exemple : $5\vec{\imath}.3\vec{\jmath} \neq 15\,\vec{\imath}.\vec{\jmath}$ plutôt $5\vec{\imath}.3\vec{\jmath} = 0$. De plus, $5\vec{\imath}.3\vec{\imath} = 15$.

2.6.3 Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$et s'ecrit $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$.



Le vecteur $\vec{C}$ est **perpondiculaire** au plan formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Sa direction est tel que le trièdre soit direct comme le montre la figure suivante :



Règle de la main droite

Le module du vecteur $\vec{C}$ est calculé comme suit : $C = |\vec{C}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\boldsymbol{sin}(\vec{A},\vec{B})$, il represente la **surface** du plan formé par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

- Le produit vectoriel **n'est pas commutatif** : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$ car $\sin(\vec{A},\vec{B}) = -\sin(\vec{B},\vec{A})$.

- $\vec{A} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = (\vec{A} \wedge \vec{B}_1 + \vec{A} \wedge \vec{B}_2)$

-$\vec{A} \wedge (\vec{B}_1 \wedge \vec{B}_2) \neq (\vec{A} \wedge \vec{B}_1) \wedge \vec{B}_2$

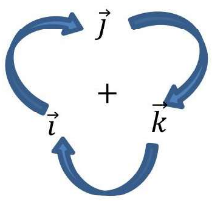
Remarque : dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, Le produit vectoriel de deux vecteurs **unitaires identiques** est **nul** : $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$.

Le produit vectoriel de deux vecteurs unitaires différents est donné par :

$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$,

$\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$

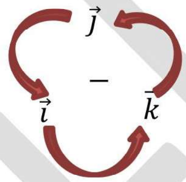
$\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$



$\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$

$\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$

$\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k}$



Pour calculer le produit vetoriel de deux vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{B}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$, on doit appliquer le determinent comme suit :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_A & z_A \\ x_B & z_B \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (y_A z_B - z_A y_B)\vec{\imath} - (x_A z_B - z_A x_B)\vec{\jmath} + (x_A y_B - y_A x_B)\vec{k}$$

Sachant que $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

Exemple :

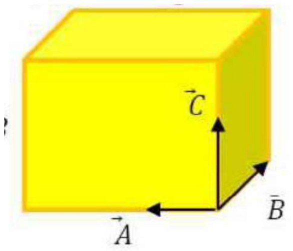
2.6.4 Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteur $\vec{A},\vec{B}$ et $\vec{C}$ est une quantité scalaire m donnée par :

$$m = (\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}$$

avec m est le volume du parallélogramme (cube) formé par ces trois vecteurs.

Le produit mixte est commutatif $(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C} = \vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$



Exemple :

Calculer le volume du parallélopipède de cotés $\vec{U} = (1,1,3)$, $\vec{V} = (2,1,4)$ et $\vec{W} = (5,1,-2)$

Solution : le volume du parallélopipède est donné par le module du produit mixte : $|\vec{U}.\vec{V} \wedge \vec{W}|$

$$\text{Volume} = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{matrix}\right\| = |-6 + 24 - 9| = 16cm^3$$

2.6.5 Dérivée d'un vecteur :

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$, sa dérivée par rapport au temps est donnée par : $\overrightarrow{V'}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\vec{y}(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d\vec{z}(t)}{dt}\vec{k}$

Exemple :

Soit le vecteur $\vec{V}(t) = 4t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, la dérivée de $\vec{V}(t)$ est donnée par :

$$\overrightarrow{V'}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = 4\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}$$

Cours 03 : Les opérateurs différentiels

3.1. Introduction

Les principaux opérateurs différentiels utilisés en physique sont :

- Le Gradient: $\overrightarrow{Grad}()$
- La Divergence : $div()$
- Le Laplacien $\Delta()$
- Le Rotationnel : Rot ()

3.2 Gradient

Soient le repère $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et le champ scalaire $f(x,y,z)$, le **gradient du champ scalaire** f est un **vecteur** défini par :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla}.f = \frac{df}{dx}\vec{\imath} + \frac{df}{dy}\vec{\jmath} + \frac{df}{dz}\vec{k}$$

Avec

$$\vec{\nabla} = \frac{d}{dx}\vec{\imath} + \frac{d}{dy}\vec{\jmath} + \frac{d}{dz}\vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{d}{dz} \end{pmatrix}$$

$\vec{\nabla}$ représente l'opérateur nabla en coordonnées cartésiennes.

3.3 Laplacien

Le **Laplacien** d'un **champ scalaire** $f(x,y,z)$ est un **champ scalaire** donné par :

$$\Delta f = \overrightarrow{\nabla^2}.f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2}$$

Le **Laplacien** d'un **champ vectoriel** $\vec{V}(V_x, V_y, V_z) = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_Z\vec{k}$ est un **vecteur** donné par :

$$\Delta\vec{V} = \overrightarrow{\nabla^2}.\vec{V} = \overrightarrow{\nabla^2}.V_x\vec{\imath} + \overrightarrow{\nabla^2}.V_y\vec{\jmath} + \overrightarrow{\nabla^2}.V_z\vec{k}$$

3.4 Divergence

La **divergence d'un vecteur** $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ est un **scalaire** exprimé par :

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\,(\vec{V}) = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} + \frac{dV_z}{dz}$$

3.5 Rotationnel

Le **rotationnel d'un vecteur** est un **vecteur** exprimé par :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{d}{dz} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

En résumé :

Symbole	Opération	Champ de départ	Champ d'arrivée
Gradient : $\overrightarrow{grad}\,(f)$	$\vec{\nabla}.f$	Scalaire	Vecteur
Laplacien : $\Delta(\vec{V})$	$\overrightarrow{\nabla^2}.f$ $\overrightarrow{\nabla^2}.\vec{V}$	Scalaire Vecteur	Vecteur Vecteur
Divergence : $\overrightarrow{\mathrm{div}}\,(\vec{V})$	$\vec{\nabla}.\vec{V}$	Vecteur	Scalaire
Rotationnel : $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$	Vecteur	Vecteur