Cours 03 : CHAPITRE II

CINEMATIQUE D'UN POINT MATERIEL

1. Introduction :

La cinématique est l'étude des mouvements (déplacement, vitesse, accélération …etc.) sans prendre en compte les causes responsables de ces mouvements (Forces par exemple). La notion du mouvement est relative. Un corps peut être à la fois en mouvement par rapport à un objet et au repos par rapport à un autre, d'où la nécessité du choix du référentiel.

2. Position, équation horaire

On définit la position d'un point matériel M dans un référentiel par le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ qui est fonction des coordonnées du point M dans le référentiel choisit (cartésien, polaire…) et O est l'origine de ce référentiel.

Une équation horaire du mouvement est une équation donnant les coordonnées d'un point matériel **en fonction du temps**. Exemple : $x(t) = 3t + 4; y(t) = t^2 - 2$

3. Trajectoire

On appelle une trajectoire la courbe décrite par le point mobile M lors de son déplacement. Son **équation** est une **relation** entre les coordonnées x, y du point M **indépendamment du temps** t.

Exemple : on donne $x(t) = 2t$; $y(t) = 3t$, trouver l'équation de la trajectoire.

$x(t) = 2t \Longrightarrow t = x/2$….(1)

$y(t) = 3t \Longrightarrow t = y/3$….(2)

On élimine t entre les deux équations en mettant (1)=(2), pour obtenir: $y = \frac{3}{2}x$. Cette équation est appelée l'équation de la trajectoire de M.

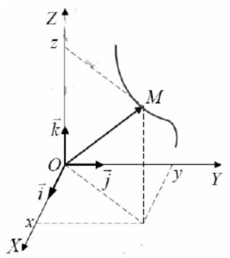
Si l'équation de la trajectoire est de la forme :

- $y = ax + b$: alors la nature de la trajectoire est rectiligne.
- $y = ax^2 + bx + c$: alors la nature de la trajectoire est parabolique.
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$: alors la nature de la trajectoire est un cercle de rayon r.

4. Repère cartésien

4.1 Vecteur position en coordonnées cartésiennes

La position d'un point *M* en fonction du temps t dans un repère $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est donnée par un vecteur position en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OM}(t) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

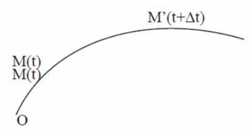


4.2 Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

On considère un mobile qui se trouve à l'instant t à la position M(t) et il évolue au point M(t+Δt) à l'instant (t+Δt). Sa **vitesse moyenne** est donnée par :

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(\mathrm{t})}{(\mathrm{t}+\Delta\mathrm{t}) - \mathrm{t}} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta\mathrm{t}}$$

Sa **vitesse instantanée** est donnée par :



$$\vec{V} = \lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta\mathrm{t}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{\mathrm{dt}} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$

4.3 Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

La variation de la vitesse d'un point M dans le temps ($v = f(t)$) engendre une accélération/ décélération. **L'accélération moyenne** s'écrit come :

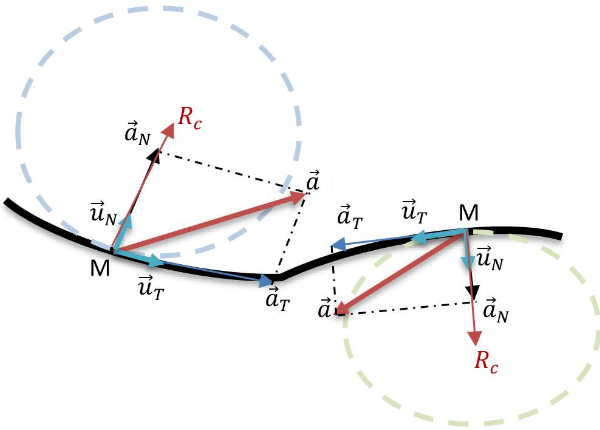
$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}\,(t+\Delta t) - \vec{v}\,(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta\vec{v}\,(t)}{\Delta t}$$

L'**accélération instantanée** est donnée par :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta\mathrm{t}\to 0} \frac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta\mathrm{t}} = \frac{d\vec{v}(t)}{\mathrm{dt}} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

5. Repère intrinsèque (Base de Frenet)

Dans le cas où le point mobile M effectue une trajectoire curviligne, l'accélération du mobile M sera composée d'une accélération tangentielle $\vec{a}_T$ liée à la partie rectiligne de la trajectoire et une accélération normale $\vec{a}_N$ lié à la partie circulaire de la trajectoire. Les accélérations tangentielle et normale du point M sont obtenues comme suit :



En utilisant la règle de Chasles, on obtient l'expression $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$ ou $\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$

De même, selon Pythagore, $a^2 = {a_T}^2 + {a_N}^2$, Avec :

$a_T = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$ est la composante tangentielle de l'accélération.

$a_N = \frac{v^2}{R_c}$ est la composante normale de l'accélération.

Et R_c représente le rayon de courbure.

Remarque : On peut déduire **la nature de la trajectoire** à partir du rayon du courbure.

-Si $R_c \to \infty$, la trajectoire est rectiligne, donc : $a_N = 0$ *et* $\vec{a} = a_T\vec{u}_T$.

-Si $R_c = cst$, la trajectoire est circulaire uniforme, donc : $a_T = 0$ et $\vec{a} = a_N\vec{u}_N$.

-Si $R_c = f(t)$, la trajectoire est curviligne, donc : $a_T \neq 0$ et $a_N \neq 0$, alors $\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N$.

Pour connaitre **la nature de mouvement**, on utilise :

$\vec{a}.\vec{v} > 0$: le mouvement est uniformément accéléré.

$\vec{a}.\vec{v} < 0$: le mouvement est uniformément retardé.