

Chapitre 1

Méthodes du raisonnement mathématique

Logique:

Définition: Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple 1.1.1

- 1) $3+3=6$ est une assertion vraie.
- 2) $3 \times 3 = 10$ est une assertion fausse.
- 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
- 4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|x| = 1$ est une assertion fausse.

1.1.2 Les opérateurs logiques mathématique:

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et Q .

* L'opérateur logique "et" ($\wedge$) (conjonction)

L'assertion " P et Q " est vraie, si P est vraie et Q est vraie, et elle est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

* L'opérateur logique "ou" ($\vee$) (disjonction)

L'assertion " P ou Q " est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion (P ou Q) est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.1.2 La négation "non" ($\bar{P}$)

L'assertion $\bar{P}$ est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

1.1.3 L'implication $\Rightarrow$

L'assertion ($\bar{P}$ ou Q) est notée $P \Rightarrow Q$. Sa table de vérité est donc la suivante:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.1.4 L'équivalence ($\Leftrightarrow$)

L'équivalence est définie par l'assertion $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$, elle est notée $P \Leftrightarrow Q$. On dit (P est équivalent à Q) ou (P est équivaut à Q) ou (P si et seulement si Q). Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraie simultanément, ou lorsque P et Q sont fausse simultanément. Sa table de vérité est:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.1.3 Quantificateurs

1.1.3.1 Le quantificateur "∀" pour tout

L'assertion " $\forall x \in E, P(x)$ " est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E .

On dit pour tout x appartenant à E $P(x)$ est vraie

Exemple 1.1.2:

1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est vraie, par exemple $x = 1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 2$ est fausse.

• Quantificateur " $\exists$ " il existe

L'assertion " $\exists x \in E, P(x)$ " est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie)

Exemple 1.1.3:

1) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ est vraie, par exemple $x = 0$

2) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ est fausse

La négation des quantificateurs

La négation de $(\forall x \in E, P(x))$ est $(\exists x \in E, \overline{P(x)})$

La négation de $(\exists x \in E, P(x))$ est $(\forall x \in E, \overline{P(x)})$

Exemple 1.1.3:

1) La négation de $(\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{x^2 \geq 0}_{P(x)})$ est $(\exists x \in \mathbb{R}, \underbrace{x^2 < 0}_{\overline{P(x)}})$

2) La négation de $(\exists x \in \mathbb{R}, \underbrace{x < 3}_{P(x)})$ est $(\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{x \geq 3}_{\overline{P(x)}})$

Négation d'une proposition quantifiée:

Quand on forme la négation d'une proposition quantifiée, on remplace le quantificateur universel $\forall$ par l'existentiel $\exists$ et vice versa, la propriété $P(x)$ par sa négation $\overline{P(x)}$

Exemple 1.1.4:

1) $(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 = 0)$ sa négation $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 \neq 0)$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x + y \geq z^2)$ sa négation est $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x + y < z^2)$

Remarque:

On peut combiner plusieurs quantificateurs dans une proposition quantifiée seulement il ne faut pas changer leurs dispositions s'ils sont de natures différentes

Exemple: 1.1.5:

1) $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x+y=2)$ et $(\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, 2x+y=2)$ sont deux propositions quantifiées différentes

2) $(\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x+y=2)$ et $(\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, 2x+y=2)$ sont deux propositions quantifiées équivalentes.

1.2 Méthodes de raisonnement.

1.2.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre alors que Q est vraie

Exemple 1.2.1:

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $a=b \Rightarrow \frac{a+b}{2} = b$

Soit $a=b$ alors $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$ donc $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$

1.2.2 Raisonnement par contraposition:

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante
 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \Rightarrow Q$, on montre que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 1.2.2: Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrer que $(n \text{ est pair}) \Rightarrow (n^2 \text{ est pair})$
par contraposition ceci est équivalent $(n \text{ est impair}) \Rightarrow (n^2 \text{ est impair})$

Supposons que n est impair donc $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1$. Alors

$$\begin{aligned} n = 2k+1 &\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2k'+1 \mid k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc n^2 est impair. Alors $(n \text{ est impair}) \Rightarrow (n^2 \text{ est impair}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1.2.3 Raisonnement par l'absurde:

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $P \Rightarrow Q$, repose sur le principe suivant: on suppose à la fois que P est vraie et Q est fausse et on cherche une contradiction.

Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \Rightarrow Q$ est vraie

Exemple 1.2.3

Montrer que $\forall x \in \mathbb{N} \quad x+1 \neq 0$

On suppose que P est fausse : $\exists x \in \mathbb{N} \quad x+1=0$ donc $x=-1$ et $x \in \mathbb{N}$
contradiction avec la définition de $\mathbb{N}$

1.2.4 Raisonnement par contre exemple:

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $(\forall x \in E \quad P(x))$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse

Exemple 1.2.4 :

Montrer que l'assertion $(\forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2)$ est fausse

Un contre exemple pour $a=1$ et $b=(-1)$: $(1+(-1))^2 = 0 = 1^2 + (-1)^2 = 2$
est fausse

1.2.5 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n , est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes

1) On prouve $P(0)$ est vraie.

2) On suppose $n \geq 0$ donné par $P(n)$ vraie et on montre alors que l'assertion $P(n+1)$ est vraie

Remarque: si on doit démontrer qu'une propriété vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0

Exemple 1.2.5 : Montrer que $\forall n \geq 1 \quad 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Notons que $P(n) : \forall n \geq 1 \quad 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

1) Pour $n=1$ nous avons $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$, donc $P(1)$ est vraie

2) Soit $n \geq 1$ Supposons que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie

$$\underbrace{1+2+\dots+n}_{P(n)} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = (n+1) \frac{(n+2)}{2}$$

$$\text{donc } 1+2+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Alors $P(n+1)$ est vraie

(5)