

Chapitre 3

Les fonctions réelles à variable réelle

3.1 Notions de fonction

3.1.1 Définitions:

Définition 3.1.1.

Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$.

En général D est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle D le domaine de définition de f .

Exemple 3.1.1:

$$f:]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

* Le graphe d'une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\Gamma_f = \{ (x, f(x)) : x \in D \}$$

3.1.2 Opérations sur les fonctions:

Soient $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie D de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes:

* La somme de f et g est la fonction $f+g: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ pour tout } x \in D$$

* Le produit de f et g est la fonction $f \times g: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \text{ pour tout } x \in D$$

* La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout $x \in D$.

3.1.3 Fonctions majorées, minorées, bornées :

Définition 3.1.2

Soient $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- 1) $f \geq g$ si $\forall x \in D \quad f(x) \geq g(x)$
- 2) $f \geq 0$ si $\forall x \in D \quad f(x) \geq 0$
- 3) $f > 0$ si $\forall x \in D \quad f(x) > 0$
- 4) f est dite constante sur D si $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in D \quad f(x) = a$
- 5) f est dite nulle sur D si $\forall x \in D \quad f(x) = 0$

Définition 3.1.3

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- 1) f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D \quad f(x) \leq M$
- 2) f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D \quad f(x) \geq m$
- 3) f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée sur D
c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D \quad |f(x)| \leq M$.

3.1.4 Fonctions croissantes, décroissantes :

Définition 3.1.4

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- 1) f est croissante sur D si $\forall a, b \in D \quad a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
- 2) f est strictement croissante sur D si $\forall a, b \in D \quad a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- 3) f est décroissante sur D si $\forall a, b \in D \quad a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
- 4) f est strictement décroissante sur D si $\forall a, b \in D \quad a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$
- 5) f est monotone (resp strictement monotone) sur D si f est croissante ou décroissante (resp strictement croissante ou strictement décroissante)

Exemple 3.1.2 :

• La fonction $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante

• Les fonctions $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto e^x$ et $\ln:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \ln x$ sont strictement croissantes

• la fonction $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto g(x) = |x|$ est strictement croissante.

3.1.5 Parité et périodicité :

Définition 3.1.5 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $] -a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

1) f est paire si $\forall x \in I: f(-x) = f(x)$

2) f est impaire si $\forall x \in I: f(-x) = -f(x)$

Exemple 3.1.3

La fonction $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \cos x$ est paire

$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$ est impaire

Définition 3.1.6

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$

Exemple 3.1.4

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période $T = 2\pi$

3.2. Limites

3.2.1 Limite en un point

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I .

Définition 3.2.1

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \text{ tel que } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 .

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

(3)

Remarque 3.2.1

L'égalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

L'inégalité $|f(x) - l| < \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

Définition 3.2.2

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[$ ou $x_0, b[$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

3.2.2 Limite en l'infini :

Définition 3.3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \quad x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I \quad x > B \Rightarrow f(x) > A$$

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $] -\infty, a[$

Exemple 3.2.5

$$\forall n \geq 1 \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (4)$$

La limite à gauche et à droite

Définition 3.3.4

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$

On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction $f|_{]x_0, b[}$ en x_0 et on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

On définit de même la limite à gauche en x_0 de f : la limite de la fonction $f|_{]a, x_0[}$ en x_0 et on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Dire que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

3-3 Unicité de la limite

proposition 3.3.1

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique

proposition 3.3.2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

exemple 3.3.1

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

ona $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$. Dans ce cas f n'admet pas une limite en point 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

proposition 3.3.3

Soient f, g deux fonctions. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm \infty$

si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, alors :

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) = l+l'$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = l l'$$

$$4) \text{ si } l \neq 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$$

$$\text{de plus si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty) \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\text{si } h \text{ une fonction une fonction bornée et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} (h f)(x) = 0$$

proposition 3.3.4 : (Composition de limites)

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow l} g(x) = l' \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l'$$

proposition 3.3.5 :

$$1) \text{ si } f \leq g \text{ et si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R} \text{ alors } l \leq l'$$

$$2) \text{ si } f \leq g \text{ et si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

Théorème des gendarmes :

$$\text{si } f \leq g \leq h \text{ et si } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \in \mathbb{R} \text{ alors } g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

Remarque :

Voici une liste de formes indéterminées

$$+\infty - \infty, 0 \times +\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^\infty, \infty^0$$

3.4 Continuité en un point :

Définition 3.4.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\text{c'est à dire } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

On note $C(I, \mathbb{R})$ ou $C^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.4.2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est continue à droite en point $x_0 \in I$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\text{c'est à dire } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(6)

On dit que f est continue à gauche en point $x_0 \in I$ si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
 c'est à dire $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Exemple 3.4.1

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$. Au point $x_0 = 0$, la fonction f est continue à gauche,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 = f(0)$$

et elle n'est pas continue à droite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$

Donc f n'est pas continue en 0

proposition 3.4.1:

Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- 1) $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$)
- 2) $f + g$ est continue en x_0
- 3) $f \times g$ est continue en x_0
- 4) si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0

proposition 3.4.2:

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Définition 3.4.3: (Prolongement par continuité)

Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

* On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0 .

Notons alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

* On définit alors la fonction $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 (7)

Exemple 3.4.2.

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

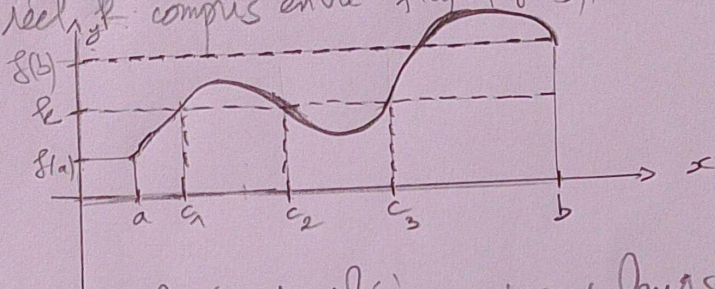
le prolongement $\tilde{f}$ est définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Théorème 3.4.1. (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$: $f(c) = k$



La version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires est la suivante.

Théorème 3.4.2.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$

si $f(a) < f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a, b[$: $f(c) = 0$

3.5 Dérivée.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$

Définition 3.5.1.

f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0 .

La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque 3.5.1.

Autre écriture de la dérivée

f est dérivable en x_0 ($\Leftrightarrow$) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie

Définition 3.5.2.

f est dérivable sur I si et dérivable en tout point $x_0 \in I$.

La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f , elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$

Exemple 3.5.1

La fonction définie par $f(x) = x^3$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0} = x^2 + x x_0 + x_0^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 3x_0^2$$

on a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $3x_0^2$, autrement dit

$$f'(x) = 3x^2$$

Définition 3.5.3

• f est dérivable à droite en x_0 , si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$

• f est dérivable à gauche en x_0 , si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$

• f est dérivable en x_0 ($\Leftrightarrow$) f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

Proposition 3.5.1:

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

- si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0
- si f est dérivable sur I alors f est continue sur I

Remarque La réciproque est fausse.

Proposition 3.5.2:

Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fcts dérivables sur I . Alors pour tout $x \in I$

1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

2) $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ ou λ un réel fixé

3) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

4) $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$ (si $f(x) \neq 0$)

5) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

• Dérivées des fonctions usuelles

V représente une fonction $x \mapsto V(x)$

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^a	$ax^{a-1} \quad (a \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
U^n	$n U' U^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{U}$	$-\frac{U'}{U^2}$
$\sqrt{U}$	$\frac{1}{2} \frac{U'}{\sqrt{U}}$
U^a	$a U' U^{a-1} \quad (a \in \mathbb{R})$
e^U	$U' e^U$
$\ln U$	$\frac{U'}{U}$
$\cos U$	$-U' \sin U$
$\sin U$	$U' \cos U$
$\tan U$	$U' (1 + \tan^2 U) = \frac{U'}{\cos^2 U}$

Proposition 3.5.3

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 de dérivée $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$

Exemple 3.5.2 :

calculons la dérivée de $\ln(1+x^2)$

On a $g(x) = \ln x$ donc $g'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = 1+x^2$ donc $f'(x) = 2x$

$$\begin{aligned} \text{donc } (\ln(1+x^2))' &= (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x) = \frac{1}{f(x)} f'(x) \\ &= \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

* Dérivées successives

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f .

Plus généralement on note

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Si la dérivée n -ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I on dit que f est de classe $C^n(I, \mathbb{R})$.

Théorème 3.5.1 Rolle

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Théorème 3.5.2 (Accroissement finis)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in]a, b[: f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

preuve :

Posons $l = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $g(x) = f(x) - l(x - a)$

Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$

par le théorème de Rolle, $\exists c \in]a, b[: g'(c) = 0$

or $g'(x) = f'(x) - l$. Ce qui donne $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Corollaire 3.5.1

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- 1) $\forall x \in]a, b[: f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante
- 2) $\forall x \in]a, b[: f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ est décroissante
- 3) $\forall x \in]a, b[: f'(x) = 0 \Rightarrow f$ est constante
- 4) $\forall x \in]a, b[: f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante
- 5) $\forall x \in]a, b[: f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante

Corollaire 3.5.2 (Règle de l'Hôpital)

Soient $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$.

On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ (ou } \infty)$$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ (} l \in \mathbb{R} \text{) alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Exemple 3.5.3:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \frac{0}{0} \text{ C.T.D.}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan^2 x)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \sec^2 x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \tan^2 x) \tan x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \tan^2 x) \sin x}{\cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \tan^2 x)}{\cos x} = 2$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = 2$$