1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives.

Non satisfait de la théorie de l'intégration de Cauchy portant sur les fonctions continues qui lui paraît insuffisante pour manipuler certaines séries de Fourier (pour des fonctions « peu » régulières), il publie (1854) une rigoureuse théorie de l'intégration pour les fonctions bornées (continues ou non) sur un intervalle fermé. D'autres théories de l'intégration ont vu le jour plus tard : intégrale de Stiltjes, intégrale de Lebesgue…etc. On sait depuis Mercator (1620-1687) et Leibniz (1646-1716), que si une fonction est positive, l'intégrale de cette fonction sur un intervalle [a ; b] évalue l'aire « sous la courbe ». L'idée de Bernhard RIEMANN (1826-1866) (Allemagne) a été de repartir de cette évaluation de l'aire en montrant qu'elle pouvait se faire même pour des fonctions non continues… et qui donc ne possèdent pas de primitive.

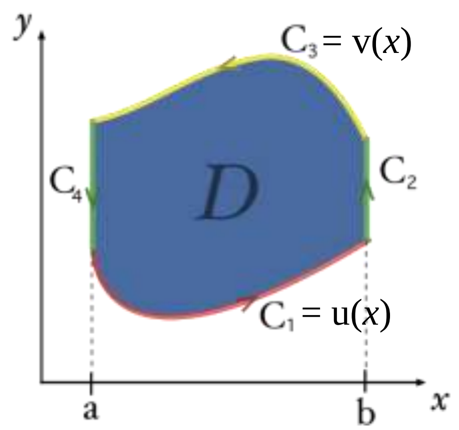
1.2 Intégrales doubles

1.2.1 Description hiérarchisée d'une partie fermée bornée de R^2

Définition : On appelle description hiérarchisée du domaine ***D***, une partie fermée bornée de R^2 : l'existence de 2 réels **a** et **b** et de **2** applications continues sur **[a,b]**, notées **u** et **v** tels que **a < b** et

$\forall x \in [a,b]$, $u(x) \leq v(x)$, avec

$$(x,y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}] \\ \mathbf{y} \in [\mathbf{u}(\mathbf{x}),\mathbf{v}(\mathbf{x})] \end{cases}$$



1.2.2 Intégrale double de f(x,y) dans le domaine D

On appelle intégrale double de f sur D (déjà défini par sa description hiérarchisé) :

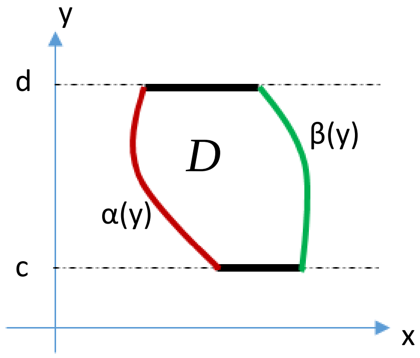
$$\boxed{I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy \right] dx}$$

NB. **L'integrale** contenant les deux **fonctions contours (v(x) et u(x))** doivent etre à **l'interieur**

<u>**Changement de bornes (Théorème de Fubini)**</u>

On peut réaliser la double intégration à partir de l'intervalle bornée sur l'axe y

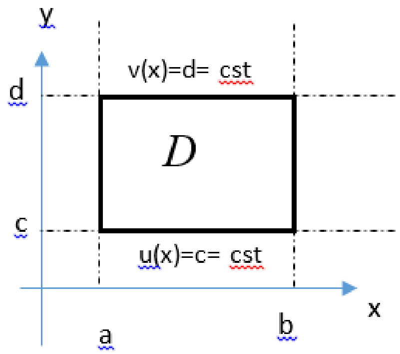
$$\boxed{I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right] dy}$$



1.2.3 Calcul des surfaces connues à partir des intégrales doubles

Pour le calcul des surfaces, la fonction est prise $\underline{\boldsymbol{f(x,y) = 1}}$.

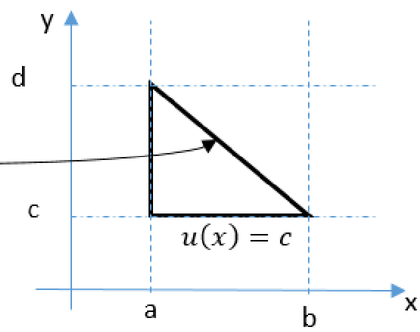
<u>Rectangle</u>



$$S_{rec} = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} 1\,dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_c^d 1\,dy \right] dx = (b-a)(d-c)$$

<u>Triangle</u>

$v(x) = \frac{(d-c)}{(b-a)}(b-x) + c$



$$S_{tri} = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} 1\,dy\right] dx = \int_a^b \left[\int_c^{\frac{(d-c)}{(b-a)}(b-x)+c} 1\,dy\right] dx$$

$$S_{tri} = \int_a^b [y]_c^{\frac{(d-c)}{(b-a)}(b-x)+c} dx = \int_a^b \frac{(d-c)}{(b-a)}(b-x) \quad dx = \left[\frac{(d-c)}{(b-a)}\left(bx - \frac{x^2}{2}\right)\right]_a^b$$

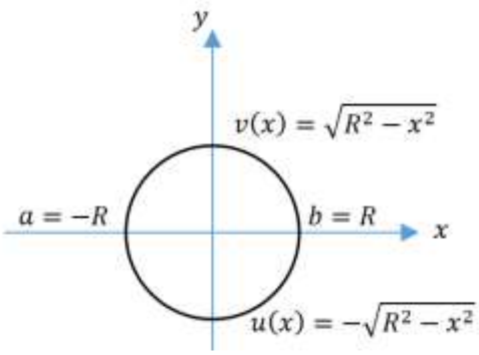
$$S_{tri} = \frac{(d-c)}{(b-a)}\left(b^2 - \frac{b^2}{2} - ba + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{(d-c)}{(b-a)}\frac{1}{2}(b^2 - 2ba + a^2)$$

Finalement

$$S_{tri} = \frac{(d-c)}{(b-a)}\frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{(d-c)(b-a)}{2}$$

D'où la surface du triangle est la moitié que celle d'un rectangle.

<u>CERCLE</u>



$$S_{Cerc} = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} 1\,dy\right] dx = \int_{-R}^{R} \left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\,dy\right] dx$$

$$S_{Cerc} = \int_{-R}^{R} [y]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dx = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \quad dx = \left[x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-R}^{R}$$

$$S_{Cerc} = 2R^2 \sin^{-1}(1) = R^2\pi$$

1.2.4 Changement de variables

Théorème : $\varphi : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.
D et Δ deux fermés bornés de $\mathbb{R}^2$, $D \subset \mathscr{U}$, et, $\Delta \subset \mathscr{V}$.
De plus : $\varphi(D) = \Delta$.
On suppose que les points de Δ qui ont plusieurs antécédents sont de surface nulle.
On note : $(x, y) = \varphi(u, v)$, $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ le jacobien de φ en (u,v), et, $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$ la valeur absolue du jacobien.
Alors : $\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} g(u,v)\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$

On notera la valeur absolue du jacobien et la pseudo-simplification.

On rappelle que :

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Notons qu'on fait un changement de variable :

- pour simplifier le domaine, ce qui est nouveau
- ou pour simplifier le calcul des primitives emboîtées. Notons enfin que le domaine change et donc sa description hiérarchisée aussi.

a. Changement de variables en coordonnées polaires

En coordonnées polaires, nous avons les relations suivantes

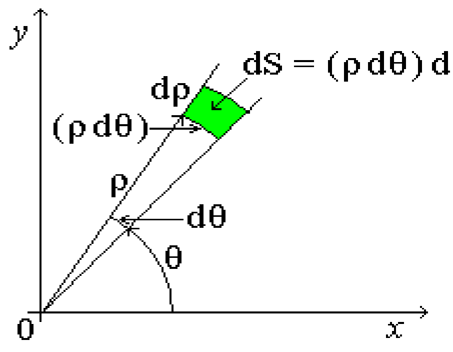
$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Le jacobien dans ce cas s'écrira sous cette forme

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho \geq 0$$

Le passage entre les intégrales doubles du cartésien en polaire se fera

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta g(\rho,\theta)\boldsymbol{\rho}\,d\rho\,d\theta = \iint_\Delta f(\rho\cos\theta\,,\rho\sin\theta)\boldsymbol{\rho}\,d\rho\,d\theta$$



<u>Exemple calcul de la surface d'un cercle en coordonnées polaire</u>

Le passage des coordonnées cartésien aux coordonnées polaires par changement de repère s'effectue comme suit :

$$S_{Cerc} = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} 1\,dy\right] dx = \int_0^R \int_0^{2\pi} 1\,\boldsymbol{\rho} d\theta d\rho$$

$$S_{Cerc} = \int_0^R \left[\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right] \boldsymbol{\rho} d\rho = 2\pi \int_0^R \boldsymbol{\rho} d\rho = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

<u>NB</u>

Le calcul de la surface d'un cercle par les coordonnées polaire est beaucoup plus simple car les variables et les bornes d'intégration sont simultanément indépendants contrairement au même cas en coordonnées cartésienne (passage de D à Δ.

1.3 Intégrales triples

1.3.1 Description hiérarchisée d'une partie fermée bornée de R^3

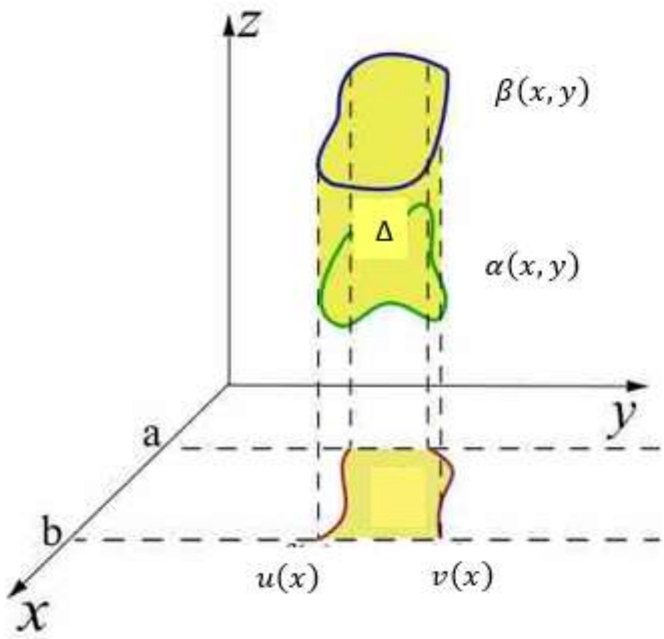
Δ un fermé borné de R^3, une description hiérarchisée de Δ est de la forme :

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \Delta \leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}] \\ \mathbf{y} \in [\mathbf{u}(\mathbf{x}),\mathbf{v}(\mathbf{x})] \\ \mathbf{z} \in [\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x},\mathbf{y})] \end{cases}$$

On peut avoir les variables dans un autre ordre, l'important est que les bornes de chacune ne soient définies qu'en fonction des précédentes.

On définit alors l'intégrale triple de f continue sur Δ par :

$$I = \iiint_{\Delta} f(x,y,z)\,dx\,dydz = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right] dx$$



1.3.2 Changement de variables

Sous les mêmes hypothèses que celle en 2D

$$(x, y, z) = \varphi(u, v, w), \qquad (x, y, z)\epsilon D \ \leftrightarrow \ (u, v, w)\epsilon\Delta, et\ f(x, y, z) = g(u, v, w)$$

On a alors

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dydz = \iiint_\Delta g(u, v, w)\left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| du\, dvdw$$

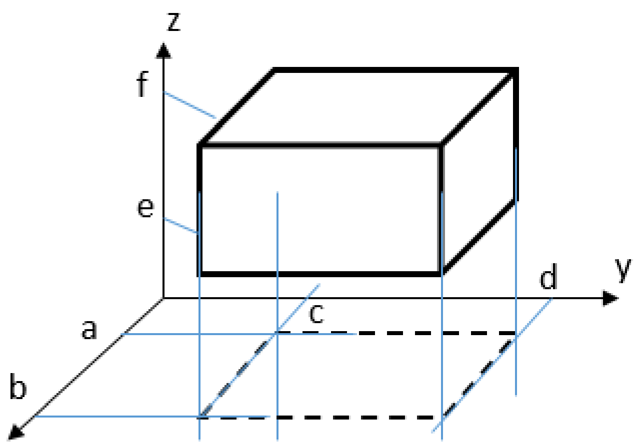
Le Jacobien dans ce cas

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

1.3.3 Calcul des volumes à partir des intégrales triples

Pour le calcul de volume, la fonction est prise $\underline{\boldsymbol{f(x, y, z) = 1}}$.

<u>Cube</u>

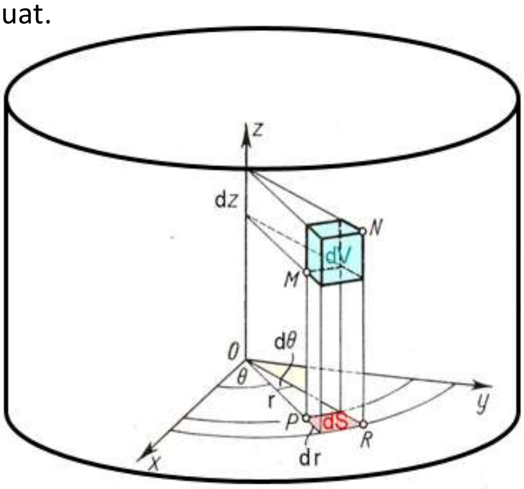


$$S = \iiint_\Delta 1\, dx\, dydz = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f 1\, dz\right] dy\right] dx = (b - a)(d - c)(f - e)$$

Cylindre

Pour le cylindre, on adopte le changement de variable adéquat.

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$



Le jacobien dans ce cas :

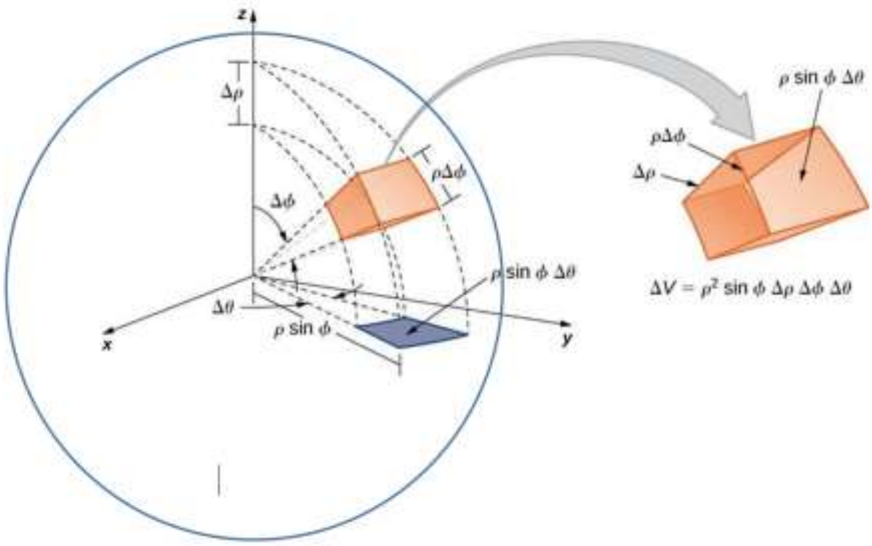
$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\rho}$$

$$\iiint_D 1\,dx\,dydz = \iiint_\Delta 1\boldsymbol{\rho}\,d\rho\,d\theta dz = \int_0^h \left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \rho\,d\rho\right]d\theta\right]dz = h\pi R^2$$

Sphère

Pour la sphère, on a

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$



En appliquant le jacobien:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \boldsymbol{\rho^2\sin\varphi}$$

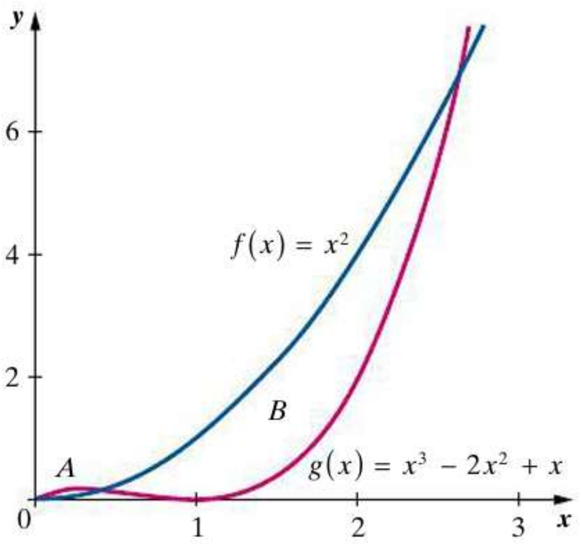
$$\iiint_D 1\,dx\,dydz = \iiint_\Delta 1\boldsymbol{\rho^2}\sin\varphi\;d\rho\,d\theta d\varphi = \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \rho^2\,d\rho\right]d\theta\right]\sin\varphi\,d\varphi = 4\pi\frac{R^3}{3}$$

Exemples Associées à ce chapitre

Exemple 1

On veut évaluer l'aire de la surface que délimitent les courbes décrites par les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3 - 2x^2 + x$ entre les trois points d'intersection des deux courbes. On commence par esquisser les graphiques des deux courbes dans un plan cartésien

Surface délimitée par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3 - 2x^2 + x$



Les points d'intersection des deux courbes se trouvent là où les deux fonctions sont égales, c'est-à-dire lorsque $f(x) = g(x)$. Or,

$$\begin{aligned} x^2 = x^3 - 2x^2 + x &\Rightarrow x^3 - 3x^2 + x = 0 \\ &\Rightarrow x\left(x^2 - 3x + 1\right) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0,\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $\left[0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$, la fonction $g(x) = x^3 - 2x^2 + x$ domine, alors que sur l'intervalle $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$, c'est la fonction $f(x) = x^2$ qui domine.

Par conséquent, on obtient l'aire cherchée en additionnant les aires des surfaces A et B. On a ainsi

$$\iint_{Aire} 1\, d\,xdy = \int_{0}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \left[\int_{x^2}^{x^3-2x^2+x} 1\, dy \right] dx + \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \left[\int_{x^3-2x^2+x}^{x^2} 1\, dy \right] dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \left(x^3 - 2x^2 + x - x^2\right)dx + \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \left(x^2 - x^3 + 2x^2 - x\right)dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \left(x^3 - 3x^2 + x\right)dx + \int_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \left(-x^3 + 3x^2 - x\right)dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \left(-\tfrac{1}{4}x^4 + x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

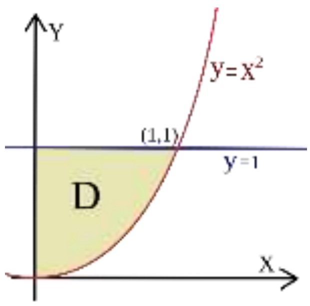
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$- \frac{1}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^4 + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\approx 2{,}82$$

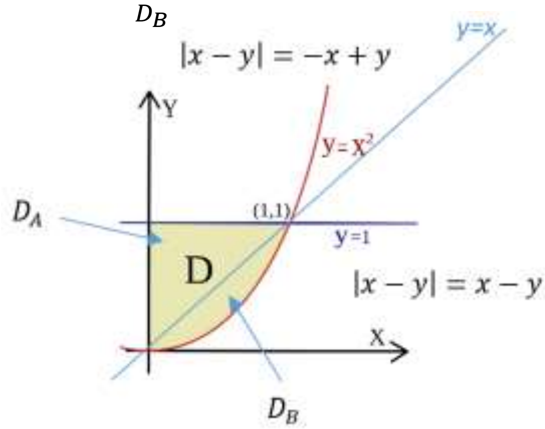
<u>Exemple 2 Fonction à intégrer est en valeur absolue</u>

- $f(x,y) = |x - y|$ sur le domaine $D_1 = \{(x,y) | x \geq 0, x^2 \leq y \leq 1\}$



Solution

$$I_6 = \iint_{D_1} |x-y|\, dxdy = \iint_{D_A} (-x+y)\, dxdy + \iint_{D_B} (x-y)\, dxdy$$



$$I_6 = \int_0^1 \int_x^1 (-x+y)dydx + \int_0^1 \int_{x^2}^x (x-y)dydx$$

$$I_{6A} = \int_0^1 \int_x^1 (-x+y)dydx = \int_0^1 \left[-xy + \frac{y^2}{2}\right]_x^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$I_{6A} = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$I_{6B} = \int_0^1 \int_{x^2}^x (x-y)dydx = \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx$$

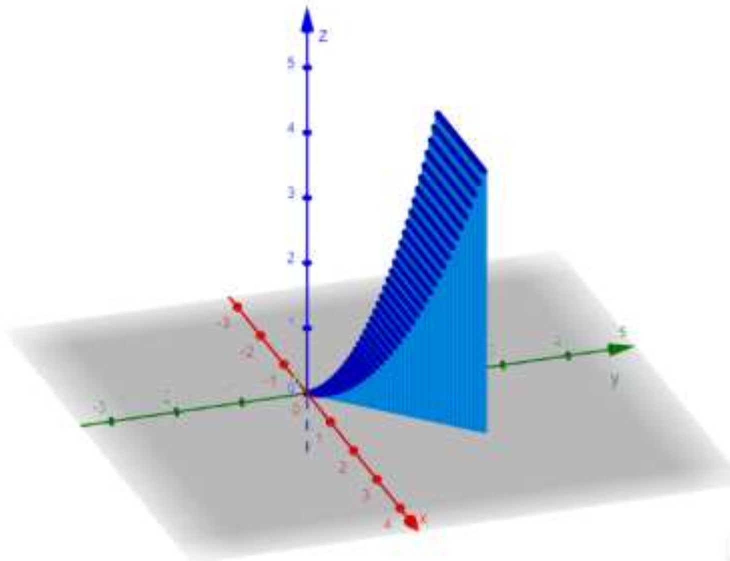
$$I_{6B} = \left[\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

$$I_6 = I_{6A} + I_{6B} = \frac{1}{6} + \frac{1}{60} = \frac{11}{60}$$

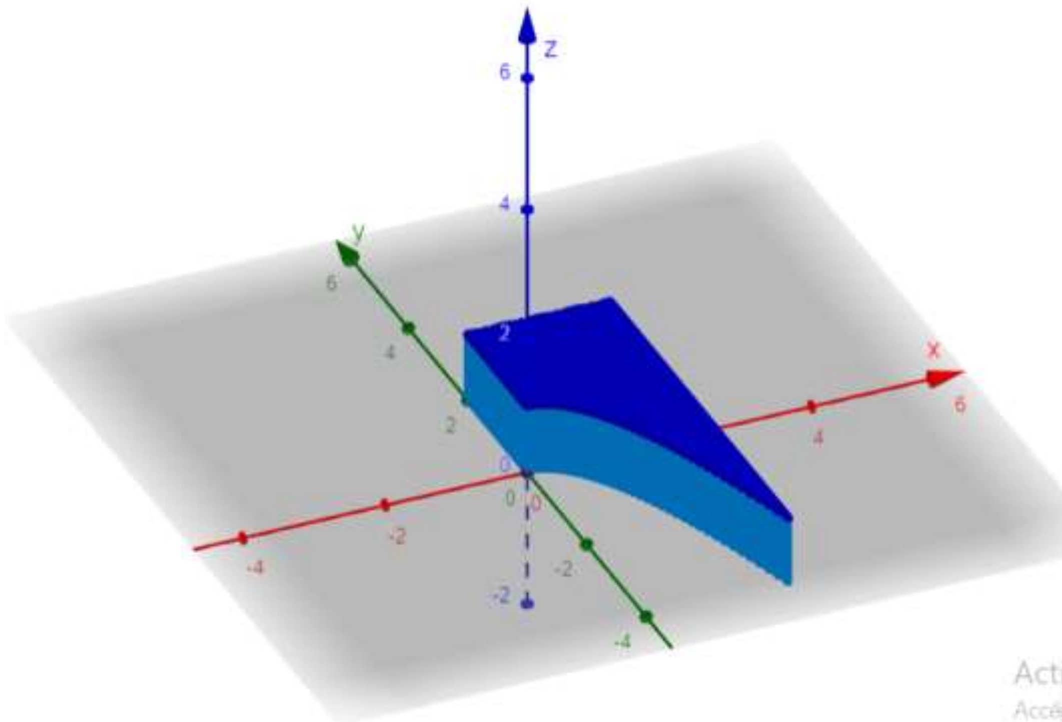
Exemple 3 Interprétation de volumes

Tracer les volumes suivants

- $\Delta_1 = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2,\ \ x \leq y \leq 2,\ \ 0 \leq z \leq y^2\}$



- $\Delta_2 = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 2,\ -x^2 \leq y \leq 2,\ \ 0 \leq z \leq 2\}$



Exemples de calcul des fonctions dans les volume

1- $$f(x,y,z) = 4x^2 + y + z$$

Dans le domaine

$$\Delta_1 = \{(x,y,z)|0 \le x \le 2,\ \ x \le y \le 2,\ \ 0 \le z \le y^2\}$$

$$I = \int_0^2 \int_x^2 \int_0^{y^2} (4x^2 + y + z)dzdydx = \int_0^2 \int_x^2 \left[4x^2 z + yz + \frac{z^2}{2}\right]_0^{y^2} dydx$$

$$I = \int_0^2 \int_x^2 \left(4x^2y^2 + y^3 + \frac{y^4}{2}\right) dydx = \int_0^2 \left[\frac{4x^2y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{10}\right]_x^2 dx$$

$$I = \int_0^2 \left[\frac{32x^2}{3} + 4 + \frac{16}{5} - \frac{4x^5}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right] dx = \int_0^2 \left[-\frac{43x^5}{30} - \frac{x^4}{4} + \frac{32x^2}{3} + \frac{36}{5}\right] dx$$

$$I = \left[-\frac{43x^6}{180} - \frac{x^5}{20} + \frac{32x^3}{9} + \frac{36x}{5}\right]_0^2 = \left[-\frac{43 \times 64}{180} - \frac{32}{20} + \frac{256}{9} + \frac{72}{5}\right]$$

$$= \left[-\frac{688}{45} - \frac{72}{45} + \frac{1280}{45} + \frac{648}{45}\right] = \frac{1168}{45}$$

2-

$f(x,y,z) = x - y$ dans

$$D_7 = \{(x,y,z)|0 \le x \le 2, \quad -x^2 \le y \le 2,\ \ 0 \le z \le 2\}$$

$$I = \int_0^2 \int_{-x^2}^2 \int_0^2 (x-y)dzdydx = \int_0^2 \int_{-x^2}^2 [(x-y)z]_0^2 dydx$$

$$I = \int_0^2 \left[2\left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\right]_{-x^2}^2 dx = 2\int_0^2 \left(2x - 2 + x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx$$

$$I_5 = \left[2x^2 - 4x + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{72}{5}$$