2. Introduction

Nous avons pour le moment considéré l'intégration de fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ compact. Or il existe des applications faisant intervenir des intégrales sur des segments non compacts ou bien sur des fonctions non continues par morceaux sur $[a,b]$, comme par exemple

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx \qquad \int_0^1 \ln x\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \ldots$$

On parlera d'*intégrale généralisée* ou bien d'*intégrale impropre.*

Définition 7.1. *Soit $a < b$ des bornes dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) et soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$). On dit que f est intégrable sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$) si la limite*

$$\lim_{\xi \to b} \int_a^{\xi} f(x)\,dx \qquad \left(resp.\ \lim_{\xi \to a} \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx \right)$$

existe et est finie. On dit aussi que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente et on note cette limite

$$\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Si l'intégrale n'est pas convergente, on dira qu'elle est divergente. Ce statut est appelé nature de l'intégrale.

Par définition, on a la proposition suivante.

2. Préposition

Soit $a < b$ des bornes dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit f une fonction

continue sur $[a,b[$ qui admet F comme primitive. Alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si et seulement si F admet une limite en b et alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to b} F(\xi) - F(a) := [F(x)]_a^b$$

où le dernier terme est une notation par convention.

Le cas $]a,b]$ est symétrique.

On notera que ces définitions sont cohérentes : si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ compact, alors elle est intégrable sur $[a,b]$ mais aussi sur $[a,b[$ et $]a,b]$.

On peut étendre ce principe à une situation qui a plusieurs problèmes.

Définition :

Soit $a < b$ des bornes dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_p = b \; .$$

Soit f une fonction continue par morceaux sur chacun des intervalles $]x_i,x_{i+1}[$. On dit que f est intégrable sur $]a,b[$ si f est intégrable au sens généralisé sur chaque intervalle $]x_i,m_i]$ et $[m_i,x_{i+1}[$ avec $m_i \in]x_i,x_{i+1}[$. On notera alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la somme de chaque intégrale généralisée obtenue, conformément à la relation de Chasles.

Quand on demande la nature d'une intégrale comme

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x-1} \ln x \,\mathrm{d}x$$

il faut commencer par repérer chacun des problèmes : soit une borne infinie soit un endroit où la fonction n'est pas continue par morceaux (typiquement explosion vers $\pm\infty$). Pour I, il y a trois soucis : 0 (explosion du log), 1 (division par 0) et $+\infty$ (borne infinie). Puis on étudie la convergence à chacun des points qui pose problème. Si on trouve le moindre cas de divergence à un de ces points, on s'arrête car alors l'intégrale est divergente. Si l'intégrale converge en tous ces points, alors on conclut que l'intégrale est convergente.

Exemple : On voudrait considérer $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Le seul problème est la borne infinie car $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. On calcule donc

$$\int_0^\xi e^{-x}\,\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^\xi = 1 - e^{-\xi}$$

dont la limite $\xi \to +\infty$ converge et est finie. Donc l'intégrale généralisée $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 \; .$$

Cette exemple montre que l'aire sous la courbe de la fonction e^{-x} sur tout $[0, +\infty[$ est finie, même si la surface n'est pas bornée.

Exemple : On voudrait considérer $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Comme $x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0,1]$, le seul souci est en $x = 0$. On a

$$\int_\xi^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_\xi^1 = -\ln \xi \; .$$

Quand $\xi \to 0$, la limite explose vers $+\infty$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est donc divergente. On peut parfois faire l'abus de notation $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$ dans ce cas et parler d'aire infinie.

Exemple : On voudrait considérer $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$. Le seul problème est la borne infinie. On a

$$\int_0^\xi \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^\xi = \sin \xi$$

qui n'a pas de limite quand $\xi \to +\infty$. Donc non seulement $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$ est divergente, mais on ne peut même pas parler d'aire infinie ou autre. Dans ce cas, $\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$ n'a aucun sens possible.

Exemples et propriétés fondamentales

Pour les intégrales impropres, on va procéder comme pour les séries : on disposera d'une liste de cas types pour lesquels la nature de l'intégrale est connue et on traitera les autres cas par des théorèmes de comparaisons ou des techniques plus fines.

Exponentielles

Une fonction du type $x \longmapsto e^{\lambda x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le seul cas qui pourrait donner une intégrale impropre est quand une des bornes est infinie.

Proposition

Soit $\lambda > 0$ et a et b dans $\mathbb{R}$. L'intégrale impropre $\int_a^\infty e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est diver-

Démonstration : Il suffit de voir qu'une primitive de $e^{\lambda x}$ est $e^{\lambda x}/\lambda$. Donc

$$\int_a^b e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda b} - e^{\lambda a}\right)\ .$$

Si $b \to +\infty$, alors $e^{\lambda b}$ tend vers $+\infty$ et l'intégrale diverge vers $+\infty$. Si $a \to -\infty$, alors $e^{\lambda a}$ tend vers 0 et l'intégrale converge vers $\frac{1}{\lambda}e^{\lambda b}$. $\square$

Bien entendu, on fera attention au signe de λ. Par la symétrie $x \mapsto -x$, on obtient que

Soit $\lambda > 0$ et a et b dans $\mathbb{R}$. L'intégrale impropre $\int_a^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est conver-

gente. L'intégrale impropre $\int_{-\infty}^b e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

Pour résumé, si on intègre une exponentielle, le seul soucis est en $\pm\infty$. Soit c'est le côté où l'exponentielle diverge et alors l'intégrale diverge évidemment, soit c'est le côté où l'exponentielle tend vers 0 et tout va bien. Notons aussi qu'une intégrale du type $\int_{\mathbb{R}} e^x\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty e^x\,\mathrm{d}x$ est forcément divergente puisque fait intervenir les deux extrémités.

Puissances

On veut intégrer une fonction du type $P(x)/Q(x)$ où P et Q sont deux polynômes. On peut rencontrer deux types de problèmes : une borne de l'intégrale est infinie ou bien la fonction n'est pas définie en un point x_0 car $Q(x_0) = 0$. Pour comprendre ce cas, on ne retiendra que les comportements types donnés par les cas suivants.

Soit $\alpha > 0$ et soit $a > 0$. L'intégrale impropre

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration : Il suffit de voir que, si $\alpha \neq 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) .$$

Pour $\alpha < 1$, $1/b^{\alpha-1} = b^{1-\alpha}$ avec $1-\alpha > 0$ et donc l'intégrale explose quand $b \to +\infty$. A l'inverse, si $\alpha > 1$, $1/b^{\alpha-1}$ tend vers 0 et l'intégrale converge.

Si $\alpha = 1$, on a

$$\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \ln b - \ln a$$

qui tend vers $+\infty$ quand b tend vers $+\infty$. □

On s'aperçoit que la borne $a > 0$ n'a pas d'importance. On pourra juste parler d'*intégrabilité ou non près de* $+\infty$.

Soit $\alpha > 0$ *et soit* $b > 0$. *L'intégrale impropre*

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration : C'est la même que la proposition précédente sauf qu'on regarde cette fois la limite quand a tend vers 0. Dans ce cas, $a^{1-\alpha}$ convergera si et seulement si $\alpha < 1$. Le log divergera toujours. □

En résumé : $1/x$ est toujours le cas critique et n'est jamais intégrable. Pour les autres, il faut se demander ce qui est mieux ou pire que $1/x$. Par exemple $1/x^2$ converge plus vite vers 0 que $1/x$ en $+\infty$ donc est intégrable près de $+\infty$. A l'inverse, il tend plus vite vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+ donc il n'est pas intégrable près de 0.

Seule l'intégrabilité proche de $+\infty$ se comporte comme les séries de Riemann par le théorème de comparaison série/intégrale. Bien se rappeler que le problème de l'intégrabilité près de 0 est quasiement l'inverse.

Par translation ou symétrie, on obtient les autres cas d'intégrabilité de fonctions puissances. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &\quad \text{est convergente}\\
\int_{-\infty}^{-5} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &\quad \text{est divergente}\\
\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &\quad \text{est convergente}\\
\int_{1}^{2} \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x &\quad \text{est divergente}\\
\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x &\quad \text{est divergente}
\end{aligned}$$

Le log

Dans le cas du log, comme il tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on s'attend à avoir une aire infinie sous la courbe. Du côté de 0, il faut voir qu'il tend vers $+\infty$ moins vite que tout puissance de x et est donc logiquement intégrable (nous allons voir ce genre de théorème bientôt).

Proposition 7.8. *Soit a et b strictement positifs.*

$$\begin{aligned}
\textit{L'intégrale} \quad \int_{a}^{\infty} \ln x\,\mathrm{d}x &\quad \textit{est divergente.}\\
\textit{L'intégrale} \quad \int_{0}^{b} \ln x\,\mathrm{d}x &\quad \textit{est convergente.}
\end{aligned}$$

Démonstration : Il suffit de voir qu'une primite du log est $x\ln x - x$. Quand b tend vers $+\infty$, $b\ln b - b = b(\ln b - 1)$ tend vers $+\infty$. Quand a tend vers 0, le terme $a\ln a$ tend aussi

vers 0 (un polynôme l'emporte sur le log) et donc la primite a bien une limite quand a tend vers 0. □

Exemples d'intégrales impropres Type Riemann et démonstrations

Exemple 1 :

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$$

b) Puisque $\frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$

et que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{s \to 0^+} \int_s^1 \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{s \to 0^+} \left[\ln |x| \Big|_s^1 \right]$$

$$= \lim_{s \to 0^+} [\ln 1 - \ln s]$$

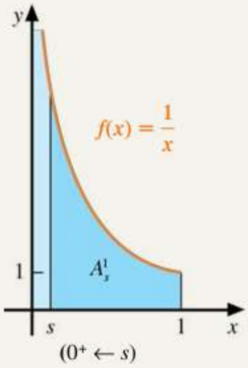
$$= 0 - (-\infty) \qquad \text{(en}$$

d'où $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

De plus, puisque $f(x) = \frac{1}{x} \geq 0$ sur $]0, 1]$

et que $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$,

l'aire de la région ci-contre est infinie.



Ainsi, $A_0^1 = +\infty$

Donc, cette intégrale impropre est divergente.

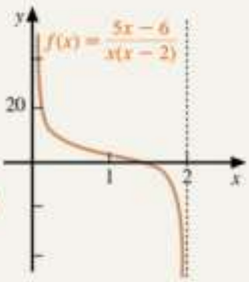
Exemple 2 :

Exemple 2 Déterminons si $\int_0^2 \frac{5x-6}{x(x-2)}\,dx$ est convergente ou divergente.

Puisque $\frac{5x-6}{x(x-2)}$ est continue sur $]0, 2[$

et que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{5x-6}{x(x-2)} = +\infty$ $\left(\text{forme } \frac{-6}{0^-}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{5x-6}{x(x-2)} = -\infty$, $\left(\text{forme } \frac{4}{0^-}\right)$

cette intégrale est une intégrale impropre.



Pour faciliter les calculs, choisissons $c = 1$, où $1 \in \,]0, 2[$, ainsi

$$\int_0^2 \frac{5x-6}{x(x-2)}\,dx = \lim_{s \to 0^+} \int_s^1 \frac{5x-6}{x(x-2)}\,dx + \lim_{t \to 2^-} \int_1^t \frac{5x-6}{x(x-2)}\,dx \qquad \text{(définition 5.3)}$$

Évaluons les deux limites précédentes.

$$\lim_{s \to 0^+} \int_s^1 \frac{5x-6}{x(x-2)}\,dx = \lim_{s \to 0^+} \int_s^1 \left[\frac{3}{x} + \frac{2}{x-2}\right] dx$$

$$= \lim_{s \to 0^+} \left[(3 \ln |x| + 2 \ln |x-2|) \Big|_s^1 \right]$$

$$= \lim_{s \to 0^+} [0 - (3 \ln s + 2 \ln |s-2|)]$$

$$= [+\infty - 2 \ln 2]$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{t \to 2^-} \int_1^t \frac{5x-6}{x(x-2)}\,dx = \lim_{t \to 2^-} \int_1^t \left[\frac{3}{x} + \frac{2}{x-2}\right] dx$$

$$= \lim_{t \to 2^-} \left[(3 \ln |x| + 2 \ln |x-2|) \Big|_1^t \right]$$

$$= \lim_{t \to 2^-} [(3 \ln t + 2 \ln |t-2|) - 0]$$

$$= [3 \ln 2 - \infty]$$

$$= -\infty$$

D'où l'intégrale est divergente,
car au moins une des limites utilisées pour calculer l'intégrale est infinie.

Exemple 3

a) Déterminons si $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ est convergente ou divergente.

Puisque f n'est pas continue en $x = 0$, où $0 \in]-1, 8[$,

et que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$ $\left(\text{forme } \frac{1}{0^-}\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$, $\left(\text{forme } \frac{1}{0^+}\right)$ nous avons

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} x^{\frac{-1}{3}}\,dx + \lim_{s \to 0^+} \int_{s}^{8} x^{\frac{-1}{3}}\,dx \qquad \text{(définition 5.5)}$$

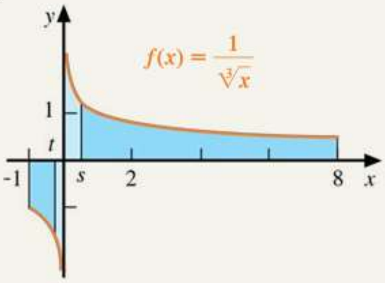
Évaluons les deux limites précédentes.

$$\lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} x^{\frac{-1}{3}}\,dx = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\Bigg|_{-1}^{t}\right] = \lim_{t \to 0^-} \left[\frac{3t^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3(-1)^{\frac{2}{3}}}{2}\right] = -1{,}5$$

$$\lim_{s \to 0^+} \int_{s}^{8} x^{\frac{-1}{3}}\,dx = \lim_{s \to 0^+} \left[\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}\Bigg|_{s}^{8}\right] = \lim_{s \to 0^+} \left[\frac{3(8)^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3s^{\frac{2}{3}}}{2}\right] = 6$$

d'où $\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = -1{,}5 + 6 = 4{,}5$ et elle est convergente.

b) Calculons l'aire A de la région ombrée suivante.



$$\begin{aligned} A &= A_{-1}^{0} + A_{0}^{8} \\ &= \int_{-1}^{0} \left(0 - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right) dx + \int_{0}^{8} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx \\ &= \lim_{t \to 0^-} \int_{-1}^{t} \left(-x^{\frac{-1}{3}}\right) dx + \lim_{s \to 0^+} \int_{s}^{8} x^{\frac{-1}{3}}\,dx \\ &= -(-1{,}5) + 6 \qquad \text{(voir a))} \end{aligned}$$

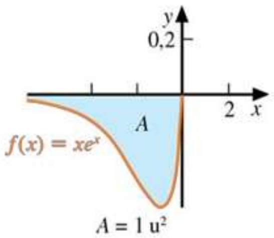
d'où $A = 7{,}5\ \text{u}^2$.

Exemple 4

Déterminons si $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$ est convergente ou divergente.

Borne d'intégration inférieure est $-\infty$

$u = x$	$dv = e^x\,dx$
$du = dx$	$v = e^x$



Puisque xe^x est continue sur $]-\infty, 0]$ nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to-\infty}\int_N^0 xe^x\,dx &= \lim_{N\to-\infty}\left[(xe^x - e^x)\Big|_N^0\right] && \text{(en intégrant par parties)}\\
&= \lim_{N\to-\infty}[(0-1)-(Ne^N - e^N)]\\
&= -1 - \lim_{N\to-\infty}(Ne^N - e^N)\\
&= -1 - \lim_{N\to-\infty} Ne^N + \lim_{N\to-\infty} e^N && \left(\lim_{N\to-\infty} Ne^N,\ \text{ind. } (-\infty)\cdot 0\right)\\
&= -1 - \lim_{N\to-\infty}\frac{N}{e^{-N}} + 0 && \left(\lim_{N\to+\infty}\frac{N}{e^{-N}},\ \text{ind. } \frac{-\infty}{+\infty}\right)\\
&\overset{\text{RH}}{=} -1 - \lim_{N\to-\infty}\frac{1}{-e^{-N}}\\
&= -1 && \left(\text{car } \lim_{N\to-\infty}\frac{1}{-e^{-N}} = 0,\ \text{forme } \frac{1}{-\infty}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^0 xe^x\,dx = -1$

d'où l'intégrale est convergente.

Test de comparaison pour les intégrales impropres

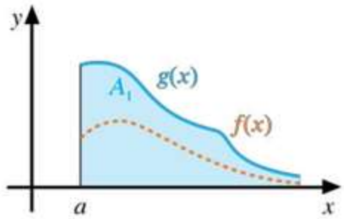
Énonçons maintenant un théorème que nous acceptons sans démonstration, mais que nous justifions graphiquement. Ce théorème permet de déterminer la convergence ou la divergence d'intégrales impropres lorsqu'il est difficile, voire impossible, de trouver une primitive.

Soit f et g, deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a, +\infty[$.

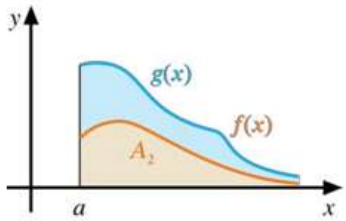
1) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente.

2) Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ est divergente.

Soit l'aire A_1 définie par $A_1 = \displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$



et l'aire A_2 définie par $A_2 = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$



En comparant graphiquement A_1 et A_2, nous constatons que $0 \leq A_2 \leq A_1$. Donc

1) si A_1 est finie, alors A_2 est finie, ainsi

$$\text{si } \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ est convergente, alors } \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ est convergente ;}$$

2) si A_2 est infinie, alors A_1 est infinie, ainsi

$$\text{si } \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ est divergente, alors } \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ est divergente.}$$

Formules d'intégration de base*

1. $\int k\,dx = kx + C$
2. $\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ Lorsque $n \neq -1$.
4. $\int \dfrac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \ln|x| + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ Lorsque $a > 0$ et $a \neq 1$.
7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
9. $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$
10. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C$
    ou $\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\ln|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x| + C$
11. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C$
12. $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$
13. $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$
14. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$
15. $\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$
16. $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$
17. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$
18. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcsec}|x| + C$
19. $\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$