Faculté des Sciences et de la technologie
Départements : ELT, AUT, GP

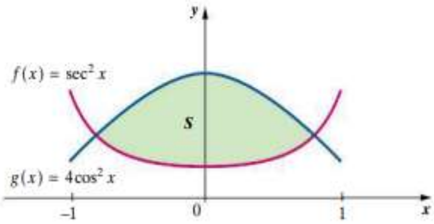
Série d'exercices N ° 1

Intégrales Multiples

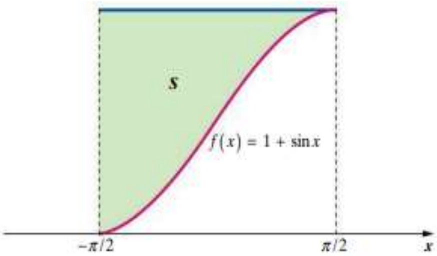
Exercice 1 : **Intégrales doubles**

- Donner les expressions mathématiques des domaines bornés et fermés représentés ci-dessous

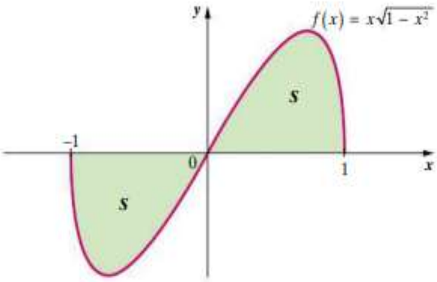
a)



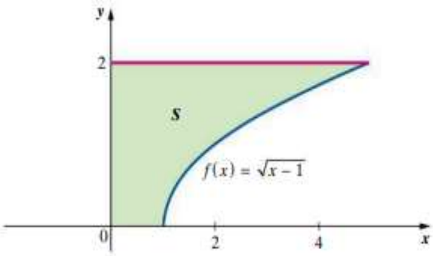
b)



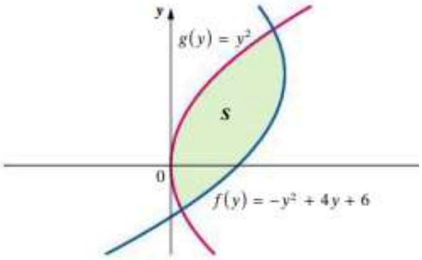
c)



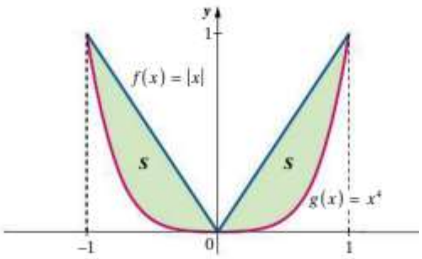
d)



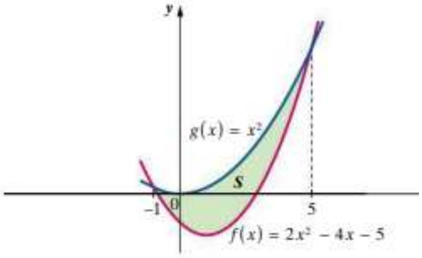
e)



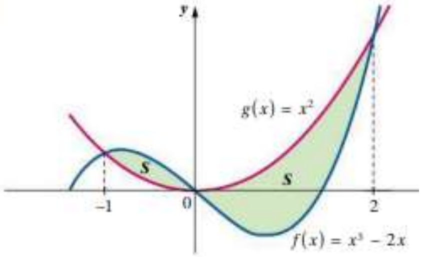
f)



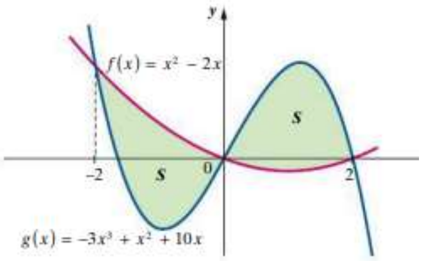
g)



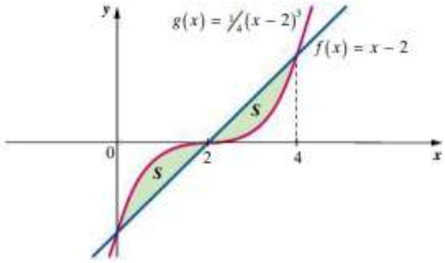
h)



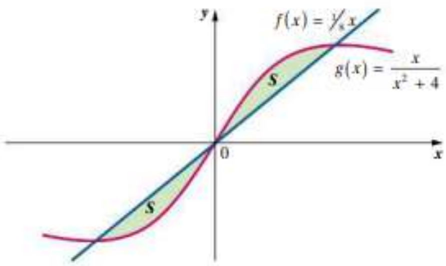
i)



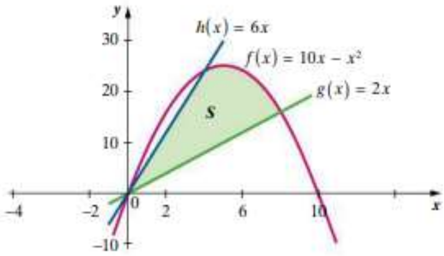
j)



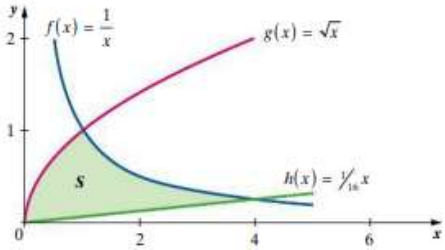
k)



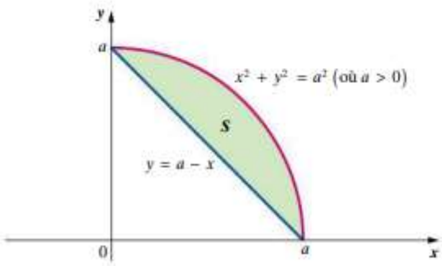
l)



m)



n)



- Calculer l'intégrale de chaque fonction par rapport à son domaine choisi :
  $f(x,y) = x + 2y$ pour (n)
  $f(x,y) = 5x - y$ pour (l)
  $f(x,y) = 1$ pour (e) calcul de la surface
  $f(x,y) = 1$ pour (m) calcul de la surface
  $f(x,y) = |3x - y|$ pour (d) (à résoudre en cours)
  $f(x,y) = |x^2 - 3y|$ pour $D_1 = \{(x,y)|0 < x < 1,\ 0 < y < 2\}$ (à résoudre en cours)

Exercice 2 : **<u>Le Jacobien pour les intégrales doubles</u>**

1- Tracer les domaines bornés suivants

- $D_1 = \{(x,y)|a^2 < x^2 + y^2 < b^2, x \geq 0\}$ avec $b > a > 0$
- $D_2 = \left\{(x,y)\ \middle|y - 1 < x < y + 3, -\frac{x}{2} + 2 < y < -\frac{x}{2} + 4\right\}$

2- On propose les changements de variables suivants :
$x = \rho\, cos\theta$ et $y = \rho\, sin\theta$ pour le domaine D_1
$u = x - y$ et $v = \frac{x}{2} + y$ pour le domaine D_2
Retracer les domaines D_1 et D_2 avec les nouvelles variables.

3- Calculer les intégrales suivantes :

$$\iint_{D1} (x^2 + y^2) dydx$$

$$\iint_{D2} (3x - 5y) dydx$$

Exercice 3 : **<u>les intégrales triples</u>**

1- Calculer les intégrales suivantes sur leurs domaines définis en coordonnées cartésienne :
$f(x,y,z) = x - y + 2z$ $\Delta_1 = \{(x,y,z)|0 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq y^2\}$
(à résoudre en cours)
$f(x,y,z) = ze^x + y$ $\Delta_2 = \{(x,y,z)|0 \leq x \leq 2,\ -x^2 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2\}$

2- Calculer les intégrales suivantes sur un volume d'un cylindre de rayon R=1 et d'hauteur H=2 (la base du cylindre est centrée à l'origine)

$$f(\rho,\theta,z) = \rho\sin\theta + z$$
$$f(x,y,z) = \sqrt{(x^2 + y^2)^{-1}}$$
$$f(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

3- Calculer les intégrales suivantes sur un volume d'une sphère centrée à l'origine de rayon R=1.5

$$f(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos\theta + \varphi$$
$$f(x,y,z) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$
$$f(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$$

Série d'exercice N°1

Exercice 1

Les expressions mathématiques de domaines :

a) l'intersection de la fonction $\sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ave $4\cos^2 x$

donne $\frac{1}{\cos^2 x} = 4\cos^2 x \Rightarrow \cos^4 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$x = \pm 0,785$

$D_a = \left\{ (x,y) \mid \underbrace{-\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{-0,785} \leq x \leq \underbrace{\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{+0,785},\ 4\cos^2 x \leq y \leq \sec^2(x) \right\}$

0

---

e) Les deux fonctions $g(y) = y^2$ et $f(y) = -y^2 + 4y + 6$ auront des intersections pour $y^2 = -y^2 + 4y + 6$

donc $2y^2 - 4y - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0$

$\Delta = 16$ et $\sqrt{\Delta} = 4$ $\qquad y_1 = \frac{2-4}{2} = -1$

$y_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

le Domaine (e) s'écrira

$D_e = \{ (x,y) \mid y^2 \leq x \leq -y^2 + 4y + 6,\ -1 \leq y \leq 3 \}$

b) $D_b = \{ (x,y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 1 + \sin(x) \leq y \leq 2 \}$

c) $D_{c_1} = \{ (x,y) \mid -1 \leq x \leq 0,\ x\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0 \}$

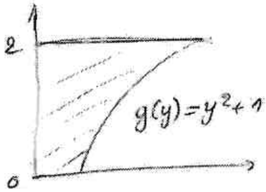
$D_{c_2} = \{ x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\sqrt{1-x^2} \}$

$D_c = D_{c_1} \cup D_{c_2}$

D) Application du théorème de Fubbini

$f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow y = \sqrt{x-1} \Rightarrow y^2 = x - 1 \Rightarrow x = y^2 + 1 = g(y)$

$D_D = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq y^2 + 1,\ 0 \leq y \leq 2 \}$



F) $D_f = \{ (x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ x^4 \leq y \leq |x| \}$

g) $D_g = \{ (x,y) \mid -1 \leq x \leq 5,\ 2x^2 - 4x - 5 \leq y \leq x^2 \}$

h) $D_{h_1} = \{ (x,y) \mid -1 \leq x \leq 0,\ x^2 \leq y \leq x^3 - 2x \}$

$D_{h_2} = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ x^3 - 2x \leq y \leq x^2 \}$

$D_h = D_{h_1} \cup D_{h_2}$

i) $D_{i_1} = \{ (x,y) \mid -2 \leq x \leq 0,\ -3x^3 + x^2 + 10x \leq y \leq x^2 - 2x \}$

$D_{i_2} = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ x^2 - 2x \leq y \leq -3x^3 + x^2 + 10x \}$

$D_i = D_{i_1} \cup D_{i_2}$

j) $D_{j_1} = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ x - 2 \leq y \leq \frac{1}{4}(x-2)^3 \}$

$D_{j_2} = \{ (x,y) \mid 2 \leq x \leq 4,\ \frac{1}{4}(x-2)^3 \leq y \leq x - 2 \}$

$D_j = D_{j_1} \cup D_{j_2}$

k)

l'intersection de $\frac{x}{8}$ et $\frac{x}{x^2+4}$ donne $\frac{x}{x^2+4} = \frac{x}{8}$

$$\Rightarrow x^2+4 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

$D_{k_1} = \left\{ (x,y) \mid -2 \leq x \leq 0 \,,\ \frac{x}{x^2+4} \leq y \leq \frac{x}{8} \right\}$

$D_{k_2} \left\{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 2 \,,\ \frac{x}{8} \leq y \leq \frac{x}{x^2+4} \right\}$

$$D_k = D_{k_1} \cup D_{k_2}$$

l)

on a l'intersection $h(x) = 6x$ avec $f(x) = 10x - x^2$ conduit à

$$6x = 10x - x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

la deuxième intersection $g(x) = 2x$ avec $f(x) = 10x - x^2$ conduit aussi

$$2x = 10x - x^2 \Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$$

$D_{1l} = \left\{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 4 \,,\ 2x \leq y \leq 6x \right\}$

$D_{2l} = \left\{ (x,y) \mid 4 \leq x \leq 8 \,,\ 2x \leq y \leq 10x - x^2 \right\}$

$$D_l = D_{1l} \cup D_{2l}$$

m)

la fonction $\frac{1}{x}$ croisera $\sqrt{x}$ dans le point $x = 1$ $\left(\frac{1}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = 1,\ x = 1 \right)$

la fonction $\frac{1}{x}$ " $\frac{1}{16}x$ au point $x = 4$ $\left(\frac{1}{16}x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 16,\ x = 4 \right)$

donc

$D_{1m} = \left\{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \,,\ \frac{1}{16}x \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$

$D_{2m} = \left\{ (x,y) \mid 1 \leq x \leq 4 \,,\ \frac{1}{16}x \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$

$$D_m = D_{1m} \cup D_{2m}$$

n) $D_n = \left\{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq a \,,\ a - x \leq y \leq a^2 - x^2 \right\}$ $a > 0$

B- Calcul des intégrales par rapport au domaine choisi :

$f(x,y) = x + 2y$ pour le domaine (n)

$D_n = \left\{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq a \,,\ a - x \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \right\}$

$$\iint_{D_n} x + 2y \, dD_n = \int_0^a \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} x + 2y \, dy \, dx = \int_0^a xy + y^2 \Big|_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 - x^2 - x(a-x) - (a-x)^2 \, dx$$

$$= \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2} - x^2 + ax \, dx$$

$$= -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} \Big|_0^a$$

$$= -\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} = \boxed{\frac{a^3}{2}}$$

$f(x,y) = 5x - y$ pour D_l

$$\iint_{D_l} 5x - y \, dD_l = \underbrace{\int_0^4 \int_{2x}^{6x} (5x - y) \, dy \, dx}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_4^8 \int_{2x}^{-x^2+10x} (5x - y) \, dy \, dx}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} = \int_0^4 5xy - \frac{y^2}{2} \Big|_{2x}^{6x} dx = \int_0^4 \left(30x^2 - 18x^2 - 10x^2 + 2x^2 \right) dx = \int_0^4 4x^2 \, dx$$

$$\text{I} = \frac{4}{3}x^3\Big|_0^4 = \boxed{\frac{256}{3}}$$

$$\text{II} = \int_4^8\int_{2x}^{-x^2+10x}(5x-y)\,dy\,dx = \int_4^8 5xy - \frac{y^2}{2}\Big|_{2x}^{-x^2+10x} dx$$

$$= \int_4^8 -\frac{x^4}{2} + 5x^3 - 8x^2 = \left[-\frac{x^5}{10} + \frac{5}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3\right]_4^8$$

$$= -\frac{8^5}{10} + \frac{5\times 8^4}{4} - \frac{8}{3}8^3 - \frac{4^5}{10} - \frac{5}{4}4^4 + \frac{8}{3}4^3 = \boxed{\frac{6464}{15}}$$

donc $$\iint_{D_\ell}(5x-y)\,dD_\ell = \frac{256}{3} + \frac{6464}{15} = \boxed{\frac{7744}{15}}$$

$f(x,y) = 1$ pour $De = \{(x,y) \mid y^2 \leq x \leq -y^2+4y+16 \, ; \, -1 \leq y \leq 3\}$

$$\iint_{De} 1\,dDe = \int_{-1}^{3}\left[\int_{y^2}^{-y^2+4y+6} 1\,dx\right]dy$$ (Théorème Fubbini)

$$= \int_{-1}^{3} x\Big|_{y^2}^{-y^2+4y+6} dy = \int_{-1}^{3} -2y^2+4y+6\,dy$$

$$= -\frac{2y^3}{3} + 2y^2 + 6y\Big|_{-1}^{3} = \boxed{\frac{64}{3}}$$

$$\iint_{D_m} 1\,dD_m = \underbrace{\int_0^1\int_{\frac{x}{16}}^{\sqrt{x}} 1\,dy\,dx}_{\text{I}} + \underbrace{\int_1^4\int_{\frac{x}{16}}^{\frac{1}{x}} 1\,dy\,dx}_{\text{II}}$$

$$\text{I} = \int_0^1 y\Big|_{\frac{x}{16}}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1\left(\sqrt{x} - \frac{x}{16}\right)dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{32}\right]_0^1$$

$$\text{I} = \frac{2}{3} - \frac{1}{32} = \boxed{\frac{61}{96}}$$

$$\text{II} = \int_1^4\int_{\frac{x}{16}}^{\frac{1}{x}} 1\,dy\,dx = \int_1^4 y\Big|_{\frac{x}{16}}^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^4\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{16}\right)dx = \left[\ln(x) - \frac{x^2}{32}\right]_1^4$$

$$= \ln(4) - \frac{1}{2} - \cancel{\ln(1)} + \frac{1}{32} = \boxed{\ln(4) - \frac{15}{32}}$$

---

l'exemple $f(x,y) = |3x-y|$ pour Dd

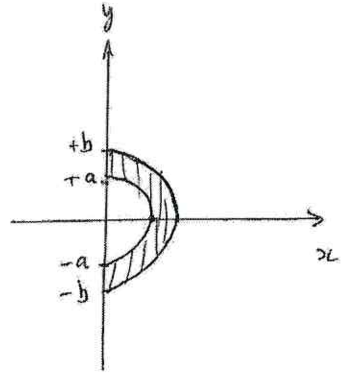
et $f(x,y) = |x^2-3y|$ pour $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

sont à resoudre aux séance du Cours

EXERCICE 2

Traçage des domaines :

$D_1 = \{(x,y) \mid a^2 < x^2+y^2 < b^2, \; x \geq 0\}$

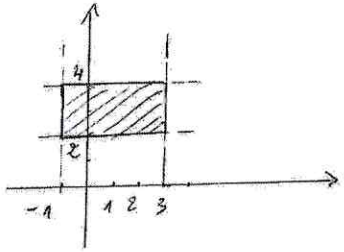


On appliquant les changements de variables pour D_2 $\begin{cases} u = x - y \\ v = \end{cases}$

$y-1 < x < y+3 \Rightarrow -1 < x-y < +3 \Rightarrow -1 < u < 3$

$-\frac{x}{2}+2 < y < -\frac{x}{2}+4 \Rightarrow +2 < y+\frac{x}{2} < 4 \Rightarrow 2 < v < 4$

$D_2 = \{(u,v) \mid -1 < u < 3 ,\ 2 < v < 4\}$



3- calcul des intégrales

nous avons besoin du jacobien pour les deux intégrales

1- en coordonnée polaire $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho$ (voir cours)

$$\iint_{D_1} (x^2+y^2)\, dD_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_a^b \rho^2 \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_a^b \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \frac{\rho^4}{4}\Big|_a^b \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boxed{\pi \frac{(b^4-a^4)}{4}}$$

- pour calculer le jacobien pour le domaine D_2 il faut exprimer x et y en fonction de u et v

on a $\begin{cases} u = x - y \\ v = \frac{x}{2} + y \end{cases}$ après manipulation $\begin{cases} x = \frac{2}{3}(u+v) \\ y = \frac{2}{3}\left(\frac{-u}{2}+v\right) \end{cases}$

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}$$

on appliquant le jacobien on aura

$$\iint_{D_2} (3x-5y)\, dy\, dx = \iint_{\Delta_2} \left(3\Big(\overbrace{\tfrac{2}{3}(u+v)}^{x}\Big) - 5\Big(\overbrace{\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{-u}{2}+v\right)}^{y}\Big)\right) \overset{\text{déterminant}}{\frac{2}{3}}\, du\, dv$$

$$= \int_{-1}^{3}\int_{2}^{4} \left(\frac{11u}{3} - \frac{4v}{3}\right)\frac{2}{3}\, dv\, du = \frac{2}{3}\int_{-1}^{3} \frac{11}{3}uv - \frac{4}{6}v^2 \Big|_2^4$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{3}\left(\frac{22}{3}u - 8\right) du = \frac{2}{3}\left[\frac{11}{3}u^2 - 8u\right]_{-1}^{3} = \boxed{\frac{-16}{9}}$$

Exercice 3

- calcul d'intégrale

$f(x,y,z) = x - y + 2z$ dans $\Delta_1 = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 2,\ x \le y \le 2,\ 0 \le z \le y^2\}$

$$\int_0^2\int_x^2\int_0^{y^2} x - y + 2z \, dz\, dy\, dx = \int_0^2\int_x^2 (x-y)z + z^2 \Big|_0^{y^2}$$

$$= \int_0^2\int_x^2 xy^2 - y^3 + y^4 \, dy\, dx = \int_0^2 \frac{xy^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}\Big|_x^2 dx$$

$$= \int_0^2 \frac{8x}{3} - 4 + \frac{32}{5} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{-x^5}{5} - \frac{x^4}{18} + \frac{8x}{3} + \frac{12}{5}\, dx = -\frac{x^6}{30} - \frac{x^5}{60} + \frac{4x^2}{3} + \frac{12x}{5}\Big|_0^2 = \boxed{\frac{112}{15}}$$

———— o ————

$f(x,y,z) = ze^x + y \quad D_2 = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 2,\ -x^2 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 2\}$

(est à resoudre dans la séance du Cours)

———— o ————

2) Calcul sur le cylindre de Rayon 1 de hauteur $h = 2$
la base du cylindre est centrée à l'origine
- Le jacobien en coordonnées cylindrique est égale à ρ

la première intégration ne nécessite pas de jacobien (on n'a pas transformé)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \rho \sin\theta + z \, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R z\rho\sin\theta + \frac{z^2}{2}\Big|_0^h$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R h\rho\sin\theta + \frac{h^2}{2}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} h\frac{\rho^2}{2}\sin\theta + \frac{h^2\rho}{2}\Big|_0^R$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{hR^2}{2}\sin\theta + \frac{h^2}{2}R\, d\theta = \Big[-\frac{hR^2}{2}\underbrace{\cancel{\cos\theta}}_{0} + \frac{h^2}{2}R\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{h^2}{2}R2\pi = \boxed{h^2R\pi}$$

$$\iiint_{\text{cylindre}} \sqrt{(x^2+y^2)}^{-1}\, dV_c = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \frac{1}{\rho}\, \overset{\text{jacobien}}{\rho}\, dz\, d\rho\, d\theta \quad ; \ \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$= z\Big|_0^h\ \rho\Big|_0^R\ \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R h$$

———— o ————

$$\iiint_{\text{cylindre}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dV_{\text{cylindre}} = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h \frac{\rho\sin\theta}{\cancel{\rho}}\, \cancel{\rho}\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^R\ z\Big|_0^h\ \underbrace{-\cos\theta\Big|_0^{2\pi}}_{0} = 0$$

———— o ————

Volume de sphère

le jacobien est $\boxed{\rho^2 \sin\varphi}$

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^R (\rho\cos\theta + \varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2}\cos\theta + \rho\varphi\Big|_0^R d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2}\cos\theta + R\varphi\, d\theta\, d\varphi = \int_0^\pi \frac{R^2}{2}\sin\theta + R\varphi\theta\Big|_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \int_0^\pi 2\pi R\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi R}{2}\varphi^2\Big|_0^\pi = \boxed{\pi^3 R}$$

———— o ————

$$\iiint_{\text{Sphère}} \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\, dV_s = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^3(\rho^2\sin\varphi)\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^6}{6} \sin\varphi \Big|_0^R \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{R^6}{6} \sin\varphi \times \theta \Big|_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi R^6}{3} \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi R^6}{3} \cos\varphi \Big|_0^{\pi} = +\frac{2\pi R^6}{3}$$

$$\iiint_{\text{Sphere}} \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}} \, dV_s = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\rho\cos\theta \sin\varphi}{\rho} \left(\rho^2 \sin\varphi\right) d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho^2 \cos\theta \sin^2\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3} \cos\theta \sin^2\varphi \Big|_0^R d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{R^3}{3} \sin^2\varphi \sin\theta \Big|_0^{2\pi} d\varphi = \boxed{0}$$