Chapitre 1

Corps des nombres réels

Le résultat essentiel qui fait l'objet de ce chapitre est donné dans le théorème suivant :

Théorème 1.1 *L'ensemble des nombres réels, noté* $\mathbb{R}$*, est un corps commutatif, totalement ordonné, Archimédien et, satisfait à l'axiome de la borne supérieure.*

La suite du cours consiste à expliquer chaque notion voire les propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{R}$ introduite dans ce théorème.

1.1 Proriétés des nombres réels

1.1.1 Définition axiomatiques des nombres réels

Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ dans le quel sont définies deux lois de composition internes : L'addition (notée $+$) et la multiplication (notée $\cdot$) représentées par les schémas

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R} & ; & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R} \\ (x,y) \to x+y & & (x,y) \to x\cdot y \end{array}$$

et une relation d'ordre notée $x \leq y$ ou $(x \geq y)$ satisfaisant les axiomes suivants :

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **est un corps commutatif**

A_1) La loi $+$ est commutative : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=y+x$,

A_2) la loi $+$ est associative : $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)$,

A_3) la loi $+$ admet un élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R},\ x+0=0+x=x$,

A_4) tout élément de $\mathbb{R}$ admet un symétrique pour la loi $+$: $\forall x \in \mathbb{R},\ x+(-x)=(-x)+x=0$,

A_5) La loi $\cdot$ est commutative : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\cdot y=y\cdot x$,

A_6) la loi $\cdot$ est associative : $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$,

A_7) la loi $\cdot$ admet un élément neutre : $\forall x \in \mathbb{R},\ x\cdot 1=1\cdot x=x$,

A_8) tout élément de $\mathbb{R}^*$ admet un symétrique pour la loi $\cdot$: $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x\cdot \frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot x=1$,

A_9) La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z,$$

2. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ **est un corps totalement ordonné**

La propriété 2 signifie pour sa part que $\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que

A_{10}) la relation est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$,

A_{11}) la relation est antisymétrique : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leq y \textit{ et } y \leq x) \Rightarrow x=y$,

A_{12}) la relation est transitive : $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \leq y \textit{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

A_{13}) la relation $\leq$ est totale : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leq y)$ ou $(y \leq x)$

et que cette relation d'ordre est compatible avec les lois $+$ et $\cdot$, c'est-à-dire que

A_{14}) $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

A_{15}) $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leq y \textit{ et } z \geq 0) \Rightarrow x\cdot z \leq y\cdot z$.

Remarque 1.1 *Tous ces axiomes sont également vérifiés par l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Nous verrons dans la suite que ce qui le distingue de $\mathbb{R}$, est l'axiome de la borne supérieure.*

Remarque 1.2 *D'aprés ce qui précède on a :*

1) $\forall\, x, y, z, t \in \mathbb{R}, \quad \left.\begin{array}{r} x \leq y \\ z \leq t \end{array}\right\} \Rightarrow x + z \leq y + t$ (découle de A_{14}) ;

2) $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$; 3) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$;

4) $(z > 0) \wedge (x \leq y) \Rightarrow x \cdot z \leq y\, z$;

5) $(x \leq 0) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow x \cdot y \leq 0$;

6) $y > x > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$;

7) $\forall m \in \mathbb{N}^*, 0 < x < y \Rightarrow 0 < x^m < y^m$;

8) $\frac{x}{y} < 1 \nRightarrow x \leq y$; 9) $(x \leq y) \wedge (z \leq t) \nRightarrow x - z \leq y - t$.

Vérifions quelques propriétés telles que 3, 8 et 9.

Pour 3 : $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$, en effet, soit $x > 0$ et supposons que $\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow -x^{-1} > 0$

on a $\left.\begin{array}{r} x > 0 \\ -x^{-1} > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{(-x^{-1}) \cdot (x)}_{-1} > 0 \Longrightarrow -1 > 0$, contradiction d'où $\frac{1}{x} > 0$.

Pour 8 : D'abord si x, y sont positifs (8) est évidente sinon, soit $(x = 1) \wedge (y = -1)$ alors $\frac{1}{-1} \leq 1$ (impossible).

Pour 9 : Soient $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$, $t = -3$, on a : $x - z = 6 \nleq y - t = 5$, par contre $x + z = -4 < y + t = -1$

1.1.2 Majorant, minorant, maximum, minimum

Définition 1.1 *Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- *Un réel M est un majorant de E si $\forall x \in E$, $x \leq M$.*
- *Un réel m est un minorant de E si $\forall x \in E$, $x \geq m$.*

Remarque 1.3 *La partie E est dite majorée (resp. minorée) dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle possède au moins un majorant (resp. minorant) et bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.*

Proposition 1.1 *Une partie E de $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si, il existe un nombre $M \geq 0$ tel que*

$\forall x \in E, \; |x| \leq M$

La démonstration est à faire en exercice.

Définition 1.2 *Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$, on dit que.*

• *Le réel α est le plus grand élément (ou maximum) de E si $\alpha \in E$ et α est un majorant de E. Et on note* $\max(E) = \alpha$.

• *Le réel β est le plus petit élément (ou minimum) de E si $\beta \in E$ et β est un minorant de E. Et on note* $\min(E) = \beta$.

Proposition 1.2 *Les majorants et les minorants ne sont pas en général uniques, par contre un plus grand élément et un plus petit élément s'ils existent sont uniques.*

Preuve *Soient M_1 et M_2 deux plus grands éléments d'une partie E. Comme $M_1 \in E$ et M_2 est un majorant de E alors $M_1 \leq M_2$; inversement $M_2 \in E$ et M_1 est un majorant de E alors $M_2 \leq M_1$.Donc $M_1 = M_2$. De même, pour le minimum.* ■

1.1.3 borne supérieure, borne inférieure

Définition 1.3 *Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

• *Si E est majorée, on appelle borne supérieure de E et on note sup(E) le plus petit des majorants de E.*

• *Si E est minorée, on appelle borne inférieure de E et on note inf(E) le plus grand des minorants de E.*

Exemple 1.1 *Trouver la borne supérieure, la borne inférieure, l'ensemble des majorants et minorants, le maximum et le minimum s'ils existent des ensembles suivants :*

A) $E_1 = [0,1[$, B) $E_2 =]-\infty, 1[$, C) $E_3 = \left\{3 + \frac{(-1)^n}{n}, \; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Solutions :

A) 1. $\sup(E_1) = 1$: en effet, les majorants de E_1 sont les éléments de $[1, \infty[$. Donc le plus petit des majorants est 1, $\max(E_1)$ n'existe pas car $1 \notin E_1$

2. $\inf(E_1) = 0$: en effet, les minorants de E_1 sont les éléments de $]-\infty, 0]$. Donc le plus grand des minorants est 0, $\min(E_1)$ existe car $0 \in E_1$ et on a $\min(E_1) = 0 = \inf(E_1)$.

B) 1. $\forall x \in E_2,\ x < 1$ donc $\sup(E_2) = 1$, les majorants de E_2 sont les éléments de $]1, \infty[$, $\max(E_1)$ n'existe pas

2. Ensemble des minorants est vide et donc E_2 n'admet pas de borne inférieure.

C) Si n est pair ($n = 2k$ et $k \geq 1$) : $3 < 3 + \frac{1}{2k} \leq \frac{7}{2}$

Si n est impair ($n = 2k+1$ et $k \geq 0$) : $2 \leq 3 + \frac{1}{2k+1} < 3 < \frac{7}{2}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 \leq 3 + \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{7}{2}$, dès lors

$\sup(E_3) = \frac{7}{2} \in E_3$ ainsi $\max(E_3) = \frac{7}{2}$ et $\inf(E_3) = \min(E_3) = 2$ car $2 \in E_3$.

1.2 Axiome de la borne supérieure

Proposition 1.3 ***(Caractérisation de la borne supérieure)***

Soit E une partie majorée de $\mathbb{R}$, alors

$$M = \sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in E : \qquad x \leq M, \\ \qquad\qquad et \\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, x \in E;\ M - \epsilon < x \leq M \end{cases}$$

De même, si E une partie minorée de $\mathbb{R}$, alors

$$m = \inf(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in E : \qquad x \geq m, \\ \qquad\qquad et \\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, x \in E;\ m \leq x < m + \epsilon. \end{cases}$$

Proposition 1.4 *Soit E une partie majorée de $\mathbb{R}$*

- *Si E est majorée, alors $-E$ est minorée et : $inf(-E) = -sup(E)$.*
- *si E est minorée, alors $-E$ est majorée et : $sup(-E) = -inf(E)$.*

où $-E = \{-x \ / \ x \in E\}$.

On étend la définition de sup et inf aux parties non majorées et non minorées par la convention suivante

2. Si E n'est pas majorée, on écrit $\sup(E) = +\infty$.
3. Si E n'est pas minorée, on écrit $\inf(E) = -\infty$.

- Enonçons maintenant le dernier axiome de $\mathbb{R}$ qui fait la spécificité de ce dernier par rapport à $\mathbb{Q}$ à savoir l'axiome de la borne supérieure (A_{16}) qui se traduit en :
- Toute partie non vide et majorée $E \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée $E \subset \mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Exemple 1.2 *La partie $E = \{x \in \mathbb{Q}; \quad x^2 \leq 2\}$ de $\mathbb{Q}$ admet $\sqrt{2}$ comme borne supérieure dans $\mathbb{R}$, alors qu'elle n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.*

Preuve En effet, Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors $\exists\, (a,b) \in (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$ tel que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, a et b premiers

entre eux (c'est à dire n'ayant pas de diviseur commun autre que 1).

Il en résulte l'égalité $a^2 = 2b^2$ ce qui montre a^2 est pair, donc a est pair aussi et s'écrit $a = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

On a alors, $a^2 = 4p^2 = 2b^2$ d'où $b^2 = 2p^2$. Comme a^2, b^2 est pair donc b aussi qui s'écrit $b = 2q$, $q \in \mathbb{N}^*$.

On voit donc que a et b ne sont pas premiers entre eux (à cause du facteur commun 2) d'où une contradiction. ■

Disons aussi que dans cet exemple on a montré que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel et de ce fait on a :

Définition 1.4 *Les éléments de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont appelés nombres irrationnels.*

Autres exemples de nombres irrationnels : π, $\sqrt{5}$, e, *etc*

1.3 Valeur absolue et propriétés

On appelle valeur absolue, l'application définie par :

$$|\cdot| : \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$$

$$x \rightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En d'autres termes, $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \max(x, -x)$.

Propriétés

1) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|$

3) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq |x| + |y|$ (premiére inégalité triangulaire)

5) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||x| - |y|| \leq |x - y|$ (deuxième inégalité triangulaire)

6) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^{+} : |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq +a$

7) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^{+} : |x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq +a)$ où $(x \leq -a)$

8) $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$ et $|x|^2 = x^2$

Preuve Des inégalités 4 et 5. On sait que :

$$-|x| \leq x \leq |x| \, et - |y| \leq y \leq |y|.$$

En additionnant

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|),$$

puis en utilisant 6, on obtient

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Puisque $x = (x - y) + y$, on a d'aprés l'inégalité 4 :

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| .$$

Donc $|x| - |y| \leq |x - y|$, et en intervertissant les rôles de x et y, on a aussi

$$|y| - |x| \leq |y - x|$$

comme $|y - x| = |x - y|$, on a donc

$$||x| - |y|| \leq |x - y| .$$

■

Exercices Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer les relations suivantes :

1) $\max(-x, -y) = -\min(x, y)$; 2) $\min(-x, -y) = -\max(x, y)$;

3) $\max(x, y) = \frac{1}{2}[(x + y) + |x - y|]$; 4) $\min(x, y) = \frac{1}{2}[(x + y) - |x - y|]$.

Solutions

1) Si $-x < -y$ alors on a $\begin{cases} 1) \ \max(-x, -y) = -y \\ 2) \ y < x \text{ et } \min(x, y) = y \end{cases}$

et donc $-y = \max(-x, -y) = -\min(x, y)$.

2) Demonstration analogue

3) Supposons $x < y$. Alors on a

a) $\max(x, y) = y$ et $|x - y| = -(x - y)$ par conséquent

$\max(x, y) = y = \frac{1}{2}[(x + y) + -(x - y)] = \frac{1}{2}[(x + y) + |x - y|]$

b) $\min(x, y) = x$ et $|x - y| = (y - x)$ par conséquent

$\min(x, y) = x = \frac{1}{2}[(x + y) - (y - x)] = \frac{1}{2}[(x + y) - |x - y|]$

Identités remarquables bien utile

Proposition 1.5 *(Formule du binôme)*

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}, \quad \text{où } C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, *on a*

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots . b^{n-1}\right)$$

1.4 Propriété d'Archimède

Proposition 1.6 $\mathbb{R}$ *est Archimédien, ce qui signifie*

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists\, n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } nx \geq y.$$

Preuve Supposons par l'absurde que $\exists (x,y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$, tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ on ait $nx < y$.

Définissons la partie de $\mathbb{R}$ suivante $A := \{\, nx, \quad n \in \mathbb{N}^* \}$. Elle est une partie non vide et majorée par y. D'après l'axiome de la borne supérieure A possède une borne supérieure $a \in \mathbb{R}$, on a alors $nx \leq a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ en particulier pour $n+1$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^* : (n+1)\, x \leq a$, donc $nx \leq a - x$, ce qui signifie que $(a-x)$ est un majorant de A strictement inférieure à a (comme $x > 0$, $a - x < a$) contradiction puisque a est le plus petit des majorants.$\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{n} < x$, cas particulier de la proposition 1.7. ■

1.5 Partie entière

Proposition 1.7 *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $k \leq x < k+1$.*

Cet entier est appelé la partie entière de x et est noté $[x]$ ou $E(x)$.

Exemple 1.3 $E\left(\sqrt{2}\right) = 1$, $E(-\pi) = -4$, $E(0{,}67) = 0$.

Remarque 1.4 *Les deux majorations suivantes sont souvent utiles dans les exercices :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) \leq x < E(x) + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < E(x) \leq x$$

1.6 Densité dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ ce qui signifie :

Proposition 1.8 *Etant donnés deux réels x et y vérifiant $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]x, y[$.*

Preuve Soient x et y deux réels tels que $x \neq y$ et $x < y$, alors $y - x \in \mathbb{R}_*^+$, En applique la propriété d'Archimède (théorème 1.5) à ($y - x > 0$ et 1), on voit qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{y-x} < n$, on obtient $nx + 1 < ny$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, nx possède une partie entière, soit k cette quantité, on a alors :

$$k = E(nx) \leq nx < k + 1$$

on a alors

$$\frac{k}{n} \leq x < \frac{k}{n} + \frac{1}{n}$$

puisque

$$\frac{k}{n} \leq x \Rightarrow \frac{k}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n}$$

d'ou :

$$\frac{k}{n} \leq x < \frac{k}{n} + \frac{1}{n} < x + \frac{1}{n} < y$$

on voit bien qu' il existe un rationnel $r = \frac{k+1}{n}$ tel que $x < r < y$.

Remarquons que d'aprés ce qui précède on peut trouver un rationnel r appartenant à l'intervalle $]x + \sqrt{2}, y + \sqrt{2}[$, le nombre $r - \sqrt{2}$ est donc irrationnel qui appartient à $]x, y[$. ■

1.7 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.5 *(Droite numérique achevée)*

On appelle droite numérique achevée l'ensemble, noté $\overline{\mathbb{R}}$ obtenu en ajoutant deux éléments à $\mathbb{R}$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$