Chapitre 3

Problèmes directs et inverses d'estimation des paramètres

3.1 Problème direct

Lorsque les propriétés de l'aquifère telles que la transmissivité, la perméabilité, la porosité et les coefficients d'emmagasinement sont connues, la résolution de l'équation aux dérivées partielles modélisant la conservation de la masse d'eau en la variable hauteur piézométrique nous permet d'obtenir, moyennant la définition des conditions aux limites et des conditions initiales, la distribution des hauteurs piézométriques au sein du milieu poreux à chaque instant. On dit alors qu'on résout le problème direct. En effet, le calcul direct produit des variables d'état en sortie (charges piézométriques) sur la base de paramètres hydrogéologiques définies en tous points du modèle.

FIGURE 3.1 – Schématisation des problèmes direct et inverse en hydrogéologie (Rambourg, 2022)

3.1.1 Problème continu

L'équation d'écoulement de l'eau dans une nappe captive résulte de la combinaison de la loi de Darcy qui relie l'amplitude et l'orientation du flux hydraulique avec le principe de conservation de la masse :

$$S\frac{\partial \Phi}{\partial t} - div(T\nabla\Phi) = Q \tag{3.1}$$

dans Ω x (0, t_f)
$\Phi = \Phi_d$ sur Γ_D x (0, t_f)
$(-T\nabla\Phi)$.n = Φ_N sur Γ_N x (0, t_f)
Φ (0) = Φ_0 dans Ω

Avce T transmisivité, S coefficient d'emmagnasinement, Q terme source, Φ hauteur piézométrique.
Ω est ouvert de R^2, de classe $C^{i}nfty$. $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ bornée avec Γ_D frontière où on a des conditions de Dirichlet et Γ_N frontière où on a des conditions de Neuman, et la variable

de temps t appartient à l'intervalle $(0\,;\,t_f)$ Les équations précédentes forment le problème direct où l'inconnue est Φ et les coefficients S et T sont donnés. C'est le problème direct sous sa forme continue dont sa résolution consiste à déterminer la distribution des charges hydrauliques Φ connaissant les paramètres S et T, le terme source Q, les conditions aux limites $\Phi - d$ et q_N et la condition initiale.

3.1.2 Problème discret

Le problème direct est résolu numériquement en utilisant des méthodes de discrétisation telles que la méthode des différences finies, des éléments finis ou des volumes finis. Ces méthodes permettent la résolution de l'équation aux dérivées partielles de l'écoulement sur une grille de discrétisation. Elles ramènent le problème de recherche de solution de dimension infinie à une dimension finie qu'est la maille. Le problème discret, permettant d'approcher la solution continue est défini sur la grille de discrétisation ou de maillage. Les variables et les paramètres discrétisés sont définis au niveau des mailles et des noeuds du maillage. Ainsi l'équation aux dérivées partielles continue, qui détermine la distribution des hauteurs piezométriques sur l'ensemble du système est remplacée par un nombre déterminé d'équations algébriques. Ce système d'équations algébriques est résolu par des techniques de résolution de systèmes matriciels (Riahi, 2018).

3.2 Problème inverse

la connaissance des propriétés physiques de l'aquifère est rarement exhaustive, et pour cause, les mesures de la perméabilité et de la porosité (essais de pompage, carottages et essais en laboratoires) sont à la fois coûteuses et limitées dans leur représentativité spatiale. En réponse à ces limitations, l ?approche inverse (Poeter et Hill, 1997) propose de déduire tout ou partie des paramètres du modèle sous contrainte d ?observations des sorties).

Le problème inverse d'estimation des paramètres liés aux équations d'écoulement dans les aquifères consiste à chercher des paramètres T et S en utilisant des mesures des hauteurs piézométriques (h). En permutant les rôles des inconnues et des paramètres, le modèle utilise des paramètres supposés connus (difficilement mesurables : T et S), pour retrouver la variable d'état : les hauteurs piézométriques. En partant de mesures des hauteurs piezométriques mesurées dans une nappe, peut on déterminer les répartitions des paramètres dans la nappe.

Le calage manuel est le précurseur de l'inversion en hydrogéologie. Consistant en une succession d'essais-erreurs visant à faire concorder calculs et mesures de terrain de la piézométrie, il repose principalement sur l'expertise du modélisateur et n'aboutit qu'à une description unique du champ de paramètres. À cette pratique peuvent se substituer des calages automatiques, rendus possibles par le développement des méthodes numériques et de la puissance des calculateurs.

3.2.1 Méthodes inverses directes

Parmi les techniques numériques, les méthodes d'inversions dites directes (à ne pas confondre avec le problème direct) proposent de résoudre la calibration de manière non-itérative, en limitant les inconnus aux seuls paramètres (Neuman, 1973, Yeh, 1986). Pour cela, les charges piézométriques sont interpolées, à partir des observations, en tous points du modèle, puis dérivées, réduisant l'expression du problème à une équation linéaire. Cette méthode est sensible aux erreurs induites par l'interpolation.

On cherche à estimer la transmissivité hydraulique dans un régime permanent sur un domaine Ω :

$$\nabla(-T\nabla\Phi) = Q \tag{3.2}$$

Le principe des méthodes inverses directes est de résoudre l'équation dont l'inconnu est la transmissivité T. Sachant que la hauteur piezométrique Φ est connue sur tout Ω. L'équation devient :

$$-\nabla T\nabla\Phi - (\Delta\Phi)T = Q \tag{3.3}$$

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre en Ω qui se transforme en une équation aux dérivées partielles du premier ordre en T. Cette méthode nécessite la connaissance de Φ dans tout le domaine ainsi que ses dérivées première et seconde. Comme on ne dispose que d'un nombre réduit de mesures de Φ on les complète par interpolation sur tout le domaine. Cette interpolation induit une erreur relativement importante sur les données qui s'ajoute à l'erreur due au mesures expérimentales de Φ. Cette méthode est qualifiée directe puisque le problème d'estimation de paramètre peut être résolu directement et de manière non itérative.

3.2.2 Méthodes inverses indirectes

Les variables d'état demeurent des inconnues au même titre que les paramètres. La calibration repose, comme dans le calage manuel, sur des itérations mais cette fois-ci orientées par un algorithme afin de minimiser une fonction objectif synthétisant l'écart quadratique entre le calcul et les données observées (intégrées comme contraintes). Ces techniques sont indépendantes d'une quelconque interpolation des variables d'états. L'avantage des ces méthodes est que la formulation du problème d'identification du paramètres est applicable aux situations où le nombre d'observations est très réduit. Aucune erreur d'interpolation n'est ajoutée. L'effort de calcul supplémentaire, induit par le caractère non-linéaire du problème, est réputé produire de meilleurs résultats que les méthodes d'inversion directes. Dans l'estimation des paramètres, les méthodes inverses indirectes cherchent à minimiser un critère basé sur la différence entre les variables d'état observées et celles calculées aux points d'observations avec des paramètres courants. L'approche générale pour ces méthodes d'estimation de paramètres est la suivante :

- Initialisation : Choisir les valeurs initiaux.
- Résolution : Résoudre le problème direct avec les paramètres courants.
- Comparaison : Comparer l'écart entre les mesures et les valeurs calculées en 2.
- (a) Si l'écart est proche de zéro = solutions trouvées. (b) Si non : Modification des paramètres et on revient a l'étape 2.

1. Méthodes géostatistiques

L'approche considère les paramètres comme des fonctions aléatoires, permettant ainsi de décrire leur variabilité spatiale et de les déterminer dans tout le domaine à partir de leurs valeurs mesurées en quelques points. A l'instar de l'approche bayésienne du Maximum à Posteriori, l'approche du maximum de vraisemblance, l'approche des points pilotes.