# Partie B : Probabilités

## Chapitre 1 : Analyse Combinatoire

**L'objectif du chapitre 1 est de :**

- ✓ Rechercher les possibilités de valeurs d'une variable aléatoire.
- ✓ Savoir le nombre de possibilités d'objets à former à partir des éléments de base.
- ✓ Compter le nombre de possibilités pour une expérience aléatoire.



### Prérequis

Il est recommandé aux apprenants de connaître.

- ➢ Méthodes du raisonnement mathématique.
- ➢ Les ensembles, les relations et les applications.

### Mots clés

Arrangements, Permutations, Combinaisons, Ordre, Répétition.

### Introduction

L'analyse combinatoire est un ensemble de techniques mathématiques qui servent à compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini (souvent de cardinalité grande).

## 1. Principe de multiplication

Permet de compter le nombre de résultats d'expériences qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences.

**Principe :** Suppose qu'une expérience est la succession de m sous-expériences. Si la i-ème expérience à $n_i$ résultats possibles pour i=1, …, m alors le nombre total de résultats possibles de l'expérience globale est : $n = n_1\, n_2 \ldots n_m$

## 2. Arrangement (Expérience ordonnée)

Tirer P éléments parmi une totalité de n éléments et les trier, le résultat est $A_n^p$ possibilités d'arrangement.

### 2.1. Arrangement sans répétition : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

**Exemple 1 :** 15 candidats se présentent à un concours. De combien de façons différentes seront classées les trois premiers ?

Réponse : Il s'agit d'ordonner p = 3 candidats parmi n = 15 sans répétition, donc on a un arrangement sans répétition. $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = 2730$

### 2.2. Arrangement avec répétition : $A_n^p = n^p$

**Exemple 2 :** Combien de mots de 3 lettres peuvent être formés dans l'alphabet français de 26 lettres ?

Réponse : Remarquons ici que : n = 26 et p = 3.

L'ordre est important dans un mot.

On peut répéter une lettre dans un mot.

On a donc un arrangement avec répétition. $A_n^p = n^p = 26^3 = 17576$ cas possibles.

## 3. Permutation (Expérience ordonnée)

Pour le cas particulier p = n, l'arrangement est appelé permutation notée $P_n$.

### 3.1. Permutation sans répétition : $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(0)!} = n!$

**Exemple 3 :** Quel est le nombre de manières d'ordonner les trois chiffres {1; 2; 3} ?

Réponse : Le nombre de manières est $P_n = P_3 = 3! = 6$.

### 3.2. Permutation avec répétition : $P_n^{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ (n=$\sum_{i=1}^{k} n_i$)

**Exemple 4 :** Quel est le nombre de manières d'ordonner les lettres suivantes {A ; A ; B ; B ; B ; C} ?

Réponse : Le nombre de manières est $P_n^{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k} = P_6^{2,\ 3,\ 1} = \frac{6!}{2!3!1!} = 60.$

## 4. Combinaison (Expérience non ordonnée)

Tirer aléatoirement p éléments parmi une totalité de n éléments et former des objets aléatoires sans tenir compte de l'ordre des éléments combinés.

### 4.1.Combinaison sans répétition : $C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ avec p ≤ n

**Exemple 5 :** On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de résultats possibles ?

Réponse : $C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{32!}{5!\,(32-5)!}$

### 4.2.Combinaison avec répétition : $C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$

**Exemple 6 :** Les combinaisons avec répétition de 2 éléments pris dans {1; 2; 3} sont:

$$C_{n+p-1}^p = \frac{(3+2-1)!}{2!\,(3-1)!} = 6$$

## Méthode de travail

Pour toute expérience il faut connaitre :

1. L'effectif total n et le nombre de tirage p
2. Appliquer le schéma suivant

L'expérience est
- Ordonnée
  - Avec répétition
  - Sans répétition
- Non ordonnée
  - avec répétition
  - sans répétition