Chapitre 2 : Introduction aux probabilités

L'objectif du chapitre 2 est de :

- ✓ Explorer les espaces probabilisés.
- ✓ Comprendre les notions d'univers, expériences aléatoires, événement.
- ✓ Utiliser des notions élémentaires de probabilité.
- ✓ Exprimer la probabilité d'un événement ou issues.
- ✓ Calculer des probabilités lors d'expériences aléatoires à une ou deux épreuves.
- ✓ Connaître et savoir utiliser les formules des probabilités équiprobables.

Prérequis

Il est recommandé aux apprenants de connaître :

- ➢ La théorie des ensembles.
- ➢ Les espaces et ses propriétés.

Mots clés

Expériences aléatoires, Evénement, Probabilité.

1. Algèbre des évènements

Une épreuve est une expérience aléatoire " dont l'issue est incertaine. Les résultats éventuels d'une épreuve font généralement appel au hasard. L'ensemble des résultats éventuels (les résultats possibles, les éventualités) s'appelle ensemble fondamental.

2. Définitions

La théorie des probabilités constitue un cadre mathématique pour la description du hasard et de la variabilité, ainsi que pour le raisonnement en univers incertain.

L'objet de la théorie des probabilités est de fournir un formalisme mathématique précis, propre à décrire des situations dans lesquelles intervient le "hasard", c'est-à-dire des situations dans lesquelles un certain nombre de conditions étant réunies (les causes), plusieurs conséquences sont possibles (les effets) sans que l'on puisse a priori savoir laquelle sera réalisée.

Probabilités = "mathématisation du hasard".

La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude d'expériences dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude. En voici quelques exemples :

Expérience	**Résultat observable**
Lancer d'un dé	Un entier $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$
Questionnaire à 100 question binaires	Suite Ω de 100 réponses ω $\in \{oui, non\}^{100}$
Lancer d'une pièce jusqu'à la première obtention de pile	Un entier : le temps d'attente du premier succès

Tableau 13: Quelques exemples sur les expériences

3. Espaces probabilisés

3.1. Expérience aléatoire et événements

3.1.1. Expérience aléatoire : On appelle expérience aléatoire (ou événement) toute expérience dont le résultat est régi par le hasard, lorsqu' on répète l'expérience dans les même conditions.

Exemple 7 : Le jet d'un dé [2] à 6 faces et l'observation de la face supérieure est une épreuve.

3.1.2. Espace des événements : (ou ensemble fondamental)

C'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une épreuve, on le notera généralement par Ω.

Exemple 8 : Le jet d'un dé : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

3.1.3. Evénements élémentaires et composés

Un événement élémentaire est un sous-ensemble de Ω à un seul élément $A = \{6\}$.

Un événement composé est un ensemble d'événements élémentaires $B = \{2,4,6\}$.

3.2. Relations et opérations sur les événements :

Le tableau suivant représente la correspondance entre deux langages : langage ensembliste et langage probabiliste.

Notations	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
Ø	Ensemble vide	Événement impossible
Ω	Ensemble plein	Événement certain
Ω	Élément de Ω	Événement élémentaire
A	Sous-ensemble de Ω	Événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	L'événement A est réalisé
A = B	Ensembles A et B sont égaux	Les événements A et B sont identique
$A \subset B$	A inclus dans B (A implique B)	A ne peut être réalisé sans que B le soit
$A \cup B$	Réunion de A et B (A ou B)	Un au moins des deux événements est réalisé
$A \cap B$	Intersection de A et B (A et B)	Les deux événement sont réalisés
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	Les événements A et B sont incompatibles
$\bar{A} = \Omega - A ou A^c$	Complémentaire de A dans Ω	L'événement A n'est pas réalisé

Tableau 14 : Relations et opérations sur les événements

Remarque :

1. Les opérations logiques (et, ou, négation) sur les événements peuvent bien sur faire intervenir plus de deux événements.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements liés à une épreuve d'ensemble fondamental Ω:

- Réalisation de l'un au moins des événements A_i; $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.
- Réalisation dans tous les événements A_i; $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.
- Toutes les opérations sur les ensembles restent valables sur les modèles probabilistes (commutativité, associativité, distributivité, ...)

2.

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow \overline{\cup_{i=1}^{n} A_i} = \cap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow \overline{\cap_{i=1}^{n} A_i} = \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

3. Deux événements A et B sont dits incompatibles si la réalisation simultanée des événements A et B est impossible ($A \cap B = \emptyset$).

4. Système complet d'événements : une partiton de Ω est un système complet d'événement, Autrement dit, des événements $(A_i)_{i \in I}$forment un système complet si :

- $A_i \neq \emptyset; \forall\, i = 1,2,\ldots,n$.
- $A_i \cap A_j = \emptyset; \forall\, i \neq j (i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n})$ ⇒incompatibles.

- $\cup_{1=i}^{n} A_i = \Omega$.

4. Théorèmes généraux de probabilités

4.1. Introduction

Une fois défini l'ensemble d'événements auxquels on s'intéresse, on va essayer de traduire par un nombre leurs probabilités de réalisation.

4.2. Mesure de probabilités

4.2.1. Définition

Soit P(Ω) l'ensemble des sous-parties de Ω.

La probabilité est une application de chaque événement des parties de Ω dans ℝ. Cette application notée P s'appelle **« mesure de probabilité ».**

$P: P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$E_i \rightarrow P(E_i)$

Le nombre $P(E_i)$s'appelle probabilité de réalisation de l'événement E_i.

4.2.2. Complément

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Remarque

$\forall\ A \subset \Omega$:

- $P(A) = \frac{nombrede\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$
- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1; (\sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$)alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4.2.3. Sigma-algèbre

Soit Ω l'ensemble fondamental lié à une épreuve, un sous-ensemble S de P(Ω) ($S \subset P(\Omega)$)est dit σ-algébre de partie de Ω si :

- $\Omega \in S$
- $A \in S \Rightarrow \bar{A} \in S$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in S \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$