Chapitre 3 : Conditionnement et indépendance

L'objectif du chapitre 3 est de :

- ✓ Définir l'indépendance de deux événements.
- ✓ Appréhender les probabilités conditionnelles.
- ✓ Définir la formule de Bayes.

Prérequis

Il est recommandé aux apprenants de connaître :

- ➢ La théorie des ensembles.
- ➢ Les espaces et ses propriétés.

Mots clés

Indépendance, Probabilités conditionnelles, Bayes

1. Probabilités conditionnelle

Définition

Soit (Ω, S, P) un espace probabilisé, soient A, B deux événements, tels que $P(B) > 0$, La probabilités conditionnelle de A sachant B est définie par: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A.B)}{P(B)}$.

Remarque

- $P(A/B) \neq P(B/A)$
- $P(A/A) = 1$

Exemple 9 :

On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, les faces 3 et 6 sont blanches, les faces 1, 2 et 4 sont rouges, la face 5 est bleue. On suppose que le dé est truqué et on a les probabilités des événements élémentaires suivantes :

P({1}) = 0.1 ; P({2}) = P({3}) = P({4}) =0.2 ; P({5}) =P({6}) = 0.15.

Quelle est la probabilité d'obtenir une face avec un numéro pair sachant que la face est blanche?

Notons les événements :

N : « numéro pair »

B : « face blanche »

On cherche la probabilité P(N/B).

$$P(N/B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)}$$

On a : $P(B) = P(\{3\} \cup \{6\}) = P(\{3\}) + P(\{6\}) = 0.2 + 0.15 = 0.35$

$P(N \cap B) = P(\{6\}) = 0.15$

D'où $P(N/B) = \frac{0.15}{0.35} = 0.42$

2. Evénements indépendants

Définition

Dans un espace probabilisé (Ω, S, P), deux événements A et B sont dits indépendants si :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Complément

$$\text{A et B indépendants} \begin{array}{l} \Leftrightarrow A et \bar{B} indépendants. \\ \Leftrightarrow \bar{A} et B indépendants. \\ \Leftrightarrow \bar{A} et \bar{B} indépendants. \end{array}$$

3. Formule des probabilités totales

Soit $\{A_i; i \in I\}$un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Soit B un événement. Alors :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)P(B/A_i)$$

Cette formule permet de calculer la probabilité d'un événement B en le décomposant suivant un système complet d'événements.

4. Formule de Bayes

Soit (Ω, S, P) un espace probabilisé et $A_1, A_2, \ldots, A_n$une partition de Ω (système complet de Ω), si B est un autre événement alors :

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)} \forall i = \overline{1.n}$$

Exemple 10 :

Un laboratoire d'analyse chimique reçoit un lot de tube à essai, Ces tubes sont fournis par trois sociétés différentes $A_1, A_2 et A_3$dans les proportions suivantes: 50%, 30% et 20%.

2% des tubes fabriqués par A_1, 3% de ceux fabriqués par A_2et 4% de ceux fabriqués par A_3présentent des défauts. On choisit au hasard un tube à essai dans le lot reçu.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
2. Sachant que le tube choisi est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de la société A_1?

A_1, A_2, A_3 événements provient de l'usine A_1, A_2, A_3et D événement tube défectueux alors :

$$P(A_1) = 0.5; P(A_2) = 0.3; P(A_3) = 0.2$$
$$P(D/A_1) = 0.002; P(D/A_2) = 0.003; P(D/A_3) = 0.004$$

1. La probabilité qu'il soit défectueux est : (probabilité totale)

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i).P(D/A_i) = 0.5(0.002) + 0.003(0.3) + 0.004(0.2) = 0.0027$$

2. La probabilité qu'il provienne de la société A sachant que le tube choisi est défectueux est : (la formule de Bayes)

$$P(A_1/D) = \frac{P(A_1).P(D/A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i).P(D/A_i)} = \frac{0.5(0.002)}{0.0027} = 0.37$$