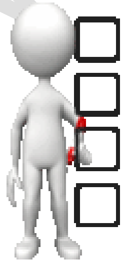
Chapitre 4 : Variables aléatoires

L'objectif du chapitre 4 est de :

- ✓ Découvrir les variables aléatoires.
- ✓ Apprendre à manipuler les variables aléatoires.
- ✓ Définir et calculer dans des cas simples la fonction de distribution d'une variable aléatoire discrète.
- ✓ Appréhender les Variables Aléatoires Continues (VAC).
- ✓ Définir la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire continue.
- ✓ Calculer l'espérance, variance et l'écart type.



Prérequis

Il est recommandé aux apprenants de connaître :

- ➢ Les calculs d'intégrales.
- ➢ Fonctions : limites et continuité.

Mots clés

Variables aléatoires, Densité, Espérance, Variance, Ecart type.

1. Définitions et propriétés

1.1.Introduction

Une variable aléatoire VA est une fonction définie sur l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, telle qu'il soit possible de déterminer la probabilité pour qu'elle prenne une valeur donnée ou qu'elle prenne une valeur dans un intervalle donné. À l'origine, une variable était une fonction de gain, qui représentait le gain obtenu à l'issue du résultat d'un jeu. Par exemple, lorsqu'on lance deux dés, on s'intéresse à la somme des chiffres égale à 7. les couples (1,6), (6,1), (5,2), (2,5), (3,4), (4,3) font que la somme est égale à 7. Comme cette somme dépend des valeurs aléatoires, il s'agit d'**une variable aléatoire**.

1.2.Définition

Soit (Ω, S, P) un espace de probabilités, une variable aléatoire X sur un ensemble fondamental Ω est une fonction de Ω sur ℝ

$X: \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega \to X(\omega)$

telle que l'image inverse de chaque intervalle de ℝ par X soit un événement de S.

$$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$$

$X^{-1}([a, b]) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in [a, b]\}$

X est appelée **variable aléatoire réelle**.

Exemple 11 :

Donnons un exemple simple du lancer de deux dés, ce qui est équivalent à lancer deux fois un dé. Une première variable aléatoire X_1donne le résultat du premier lancer, une deuxième X_2donne le résultat du deuxième lancer, c'est-à-dire $X_1(\omega) \in \{1,2,3,4,5,6\}$et $X_2(\omega) \in \{1,2,3,4,5,6\}$ que l'on note plus simplement $X_1 \in \{1,2,3,4,5,6\}$ et $X_1 \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Il est possible de s'intéresser à la somme des deux résultats, qui peut être notée par une variable aléatoire $S \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

1.3.Types de VA

Nous allons distinguer deux groupes de variables aléatoires : Les VA quantitatives et les VA qualitatives.

- Variables quantitatives :

Ici, nous retrouverons toutes les VA numériques. On distingue deux types de variables quantitatives :

- Variables discrètes VAD: Les valeurs sont discrètes, ce sont des nombres entiers (fini ou infini dénombrable).

$X \in D_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$(VAD finie)

$X \in D_x = \{x_1, x_2, \ldots\}$(VAD infinie)

- Variables continues VAC: Toutes les valeurs comprises dans un intervalle défini sont possibles. $X \in [a, b] \subset \mathbb{R}$

- Variable qualitatives :
- Variables nominales ou lexicales : Les différentes modalités de la variable ne peuvent être ordonnées.
- Variables ordinales : Les modalités de la variable possèdent la propriété d'ordre.

1.4.Probabilités d'une VA

Soit X une VA définie par une application : $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$pouvant prendre les valeurs dans $D_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Par définition la probabilité pour que X = x est la probabilité des éléments de Ω ayant pour image la valeur x dans l'application. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$,

avec $p_i = P(X = x_i)$: $i = \overline{1, n}$,

on a $p_i = P(X = x_i) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\})$.

2. Loi de probabilité d'une VA

2.1. Loi de probabilité d'une VAD

Soit x une VAD (finie). On appelle loi de probabilité de x la donnée :

- De l'ensemble des valeurs possibles : $D_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- De la probabilité de chaque valeur : $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} / p_i = P(X = x_i)$.

On désignera par f la loi de probabilité de x, ce qui s'écrit : $\forall x_i, f(x_i) = P(X = x_i)$.

La fonction f s'appelle fonction de distribution de la VAD x.

Remarque

$\forall i: f(x_i) = P(X = x_i) \geq 0$

- $\sum_{i=1}^{n(\infty)} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} P(X = x_i) = 1$
- $P(a \leqslant x \leqslant b) = \sum_{x_i \in [a,b]} f(x_i)$

Exemple 12 :

Soit x la VA donnée par le tableau suivant :

x_i	$P(x_i)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Tableau 15 : Exemple sur les probabilités

$P(0 \leqslant x \leqslant 2) = \sum_{x \in [0,2]} f(x_i) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

2.2.Loi de probabilité d'une VAC

Soit x une VAC. On appelle loi de probabilité de x ou densité de probabilité la fonction f telle que :

- $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Remarque

Soit X VAC de densité f :

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

C'est à dire l'aire sous la courbe de f entre a et b.

Exemple 13 :

Soit f une fonction densité d'une VAC x définie par : $f(x) = \begin{cases} kx, Si 0 \leq x \leq 1 \\ 0 Sinon \end{cases}$

1. Déterminer la valeur de k pour que f soit une densité.
2. Calculer $P(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1)$.

3. Fonction de répartition

3.1.Fonction de répartition d'une VAD

Définition

Soit x une VAD (finie ou infinie), On appelle fonction de répartition de x définie sur (Ω, S, P) la fonction $F_x$définie sur $\mathbb{R}$par :

$$F_x : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \to F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

3.2.Fonction de répartition d'une VAC

Définition

Soit x une VAC de densité f, On appelle fonction de répartition de x la fonction $F_x$définie par :

$$F_x(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Complément

- Le graphe de F_x est une fonction continue.
- $P(a \leqslant x \leqslant b) = F_x(b) - F_x(a)$(cas ou $F_x$est continue)

Remarque

Si $F_x$est continue sur $\mathbb{R}$et si f est continue, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $F_x$est dérivable et on a : $F_X'(x) = f(x)$.

4. Espérance mathématique (moyenne)

Soit x une VA de fonction de distribution f, l'ensemble mathématique de x que l'on note par E(x) est définie par :

- Pour VAD : $E(x) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_n f(x_n)$.
- Pour VAC : $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

5. Variance et moments

5.1.Variance

$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

- Pour VAD :$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i)$.
- Pour VAC : $E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$.

5.2.Moment non centré d'ordre k

$$m_k = \mathrm{E}(x^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

5.3.Moment centré d'ordre k

$$M_k = \mathrm{E}[(x - m_1)]^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k f(x) dx$$

Exercices série 5 :

Exercice 1 :

Soit x une variable aléatoire de probabilité définie pour $\lambda > 0$ par :

$$P(x = i) = \frac{C\,\lambda^i}{i!}\ , \forall\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Calculer P(x = 0) et P(x > 2).

N-B : C est une constante à déterminer. Pour cela, on utilise le développement en série de la fonction : $x \rightarrow e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie pour $\lambda > 0$ par :