Chapitre 5

Fonctions réelles d'une variable réelle

5.1 Notion de la fonction

Définition 5.1. *Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$. En général, D est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle D le domaine de définition de la fonction f.*

Exemple 5.2. *La fonction inverse :*

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{1}{x}. \end{array}$$

5.1.1 Opérations sur les fonctions

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie D de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- La somme de f et g est la fonction $f + g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in D$;
- Le produit de f et g est est la fonction $f \times g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in D$;
- La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in D$.

5.1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 5.3. *Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :*

- $f \geq g$ *si* $\forall x \in D : f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ *si* $\forall x \in D : f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ *si* $\forall x \in D : f(x) > 0$;
- *f est dite constante sur D si :* $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in D :\ f(x) = a$;
- *f est dite nulle sur D si :* $\forall x \in D :\ f(x) = 0$.

Définition 5.4. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

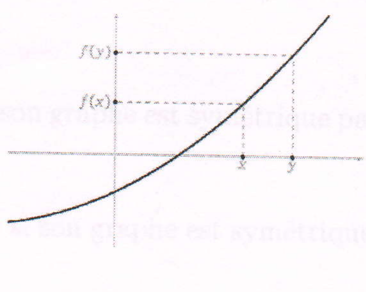
- *f est majorée sur D si* $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D :\ f(x) \leq M$;
- *f est minorée sur D si* $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in D :\ f(x) \geq m$;
- *f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée sur D, c'est-à-dire si* $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D\ |f(x)| \leq M$.

5.1.3 Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 5.5. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

- *f est croissante sur D si* $\forall x, y \in D :\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$;
- *f est strictement croissante sur D si* $\forall x, y \in D :\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$;
- *f est décroissante sur D si* $\forall x, y \in D :\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$;
- *f est strictement décroissante sur D si* $\forall x, y \in D :\ x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$;
- *f est monotone (resp. strictement monotone) sur D si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur D.*

Exemple 5.6.



f est une fonction croissante (et même strictement croissante).

Exemple 5.7.

- *La fonction*
$$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x},$$
est strictement croissante.

- *Les fonctions*
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad \text{et} \quad h :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x \qquad\qquad x \longmapsto \ln x,$$
sont strictement croissantes.

- *La fonction*
$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|,$$
n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction
$$k_+ : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|,$$
est strictement croissante .

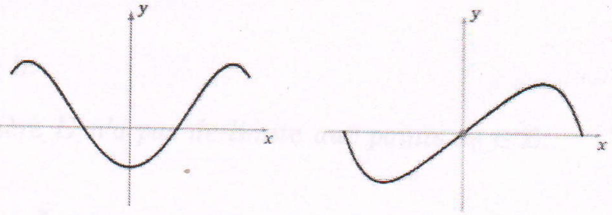
5.1.4 Parité et périodicité

Définition 5.8. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a, a[$, $a > 0$ ou $\mathbb{R}$).*
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

- *f est paire si $\forall x \in I$; $f(-x) = f(x)$,*
- *f est impaire si $\forall x \in I$; $f(-x) = -f(x)$.*

Interprétation graphique :

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).



- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$ est paire.
- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin x$ est impaire.

Définition 5.9. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$.*

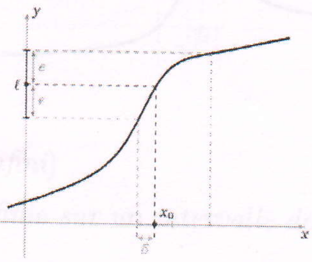
Exemple 5.10. *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.*

5.2 Limites

Définition 5.11. (*Limite en un point*)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$.

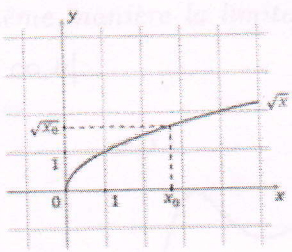


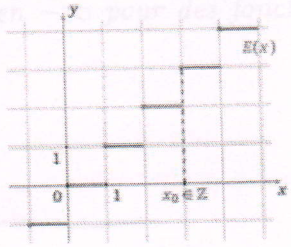
Remarque.

- *L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. L'inégalité $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.*

Exemple 5.12.

- $\lim_{x \longrightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$, $x_0 \geq 0$.
- *La fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.*





Définition 5.13. *Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $I =]a, x_0[\cup]x_0, b[$.*

- *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

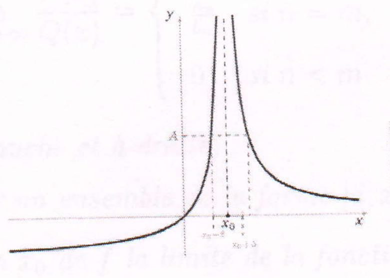
$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A,$$

On note alors $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

- *On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -A,$$

On note alors $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$.



Définition 5.14. (*Limite en l'infini*)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

- *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I,\ x > B \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

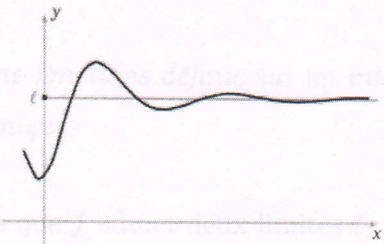
On note alors $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ *ou* $\lim_{+\infty} f = \ell$.

- *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I,\ x > B \Longrightarrow f(x) > A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.



Exemple 5.15. *On a les limites classiques suivantes pour tout $n > 1$:*

- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$.

Exemple 5.16. *Soit* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *avec* $a_n > 0$ *et* $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ *avec* $b_m > 0$.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > m, \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n < m. \end{cases}$$

Définition 5.17. *(Limite à gauche et à droite)*

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- *On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction $f_{|]x_0,b[}$ en x_0 et on la note* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$.
- *On définit de même la limite à gauche en x_0 de f la limite de la fonction $f_{|]a,x_0[}$ en x_0 et on la note* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$.

Remarque. *Si la fonction f a une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite en x_0 coïncident et valent $\lim\limits_{x_0} f$.*

Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et si ces limites valent $f(x_0)$ (si f est bien définie en x_0) alors f admet une limite en x_0.

Exemple 5.18. *Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$.*

- *Pour tout $x \in]2,3[$ on a $E(x) = 2$, on a $\lim_{x \longrightarrow 2^+} E(x) = 2$.*
- *Pour tout $x \in]1,2[$ on a $E(x) = 1$, on a $\lim_{x \longrightarrow 2^-} E(x) = 1$.*

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en 2.

5.2.1 Propriétés

Proposition 5.19. *Soit f une fonctions définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, Si f admet une limite alors cette limite est unique.*

Démonstration. Supposons que f admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 au point x_0, avec $\ell_1 \neq \ell_2$.
Choisisons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$.
Comme $\lim_{x_0} f(x) = \ell_1$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0,\ \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| \leq \varepsilon$$

De même $\lim_{x_0} f(x) = \ell_2$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0,\ \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon$$

Posons $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$, on a pour ce δ
$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| \leq 2\varepsilon < |\ell_1 - \ell_2|$. Alors $|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|$ qui est impossible, donc $\ell_1 = \ell_2$. ∎

Proposition 5.20. *Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.*

Si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

- *$\lim_{x_0} \lambda f = \lambda \cdot \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *$\lim_{x_0} (f + g) = \ell + \ell'$.*
- *$\lim_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell'$.*
- *Si $\ell \neq 0$, alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.*

De plus, si $\lim_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

Proposition 5.21. *Si $\lim_{x_0} f = \ell$ et $\lim_{\ell} g = \ell'$, alors $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$*

Exemple 5.22. *Soit* $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{(u(x))^2} + \ln u(x)}$ *avec* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} u(x) = 2$.
Vérifier, si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ *existe ?*

$$\begin{aligned} \text{On a } \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow x_0} \sqrt{1 + \frac{1}{(u(x))^2} + \ln u(x)} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} (u(x))^2} + \lim_{x \longrightarrow x_0} \ln u(x)} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \ln 2}. \end{aligned}$$

Remarque.

Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$*, alors on ne peut priori rien dire sur la limite de* $f + g$ *(cela dépend vraiment de* f *et de* g*). On raccourci cela en* $+\infty - \infty$ *est une forme indéterminée.*
Voici une liste de formes indéterminées :$+\infty - \infty$ *;* $0 \times \infty$ *;* $\frac{\infty}{\infty}$ *;* 1^∞ *;* ∞^0.

Proposition 5.23.

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim g = \ell' \in \mathbb{R}$*, alors* $\ell \leq \ell'$.
- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$*, alors* $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- *Si* $f \leq g \leq h$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$*, alors* g *a une limite en* x_0 *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

Exemple 5.24. *Vérifer, si* $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *existe.*

- *On a* $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$ *(forme indéterminée).*
  $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$
- *On a* $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^*.$
  D'où $\frac{-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^*,$
  passons à la limite lorsque x *tend vers* $+\infty$*, on obtient* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0.$

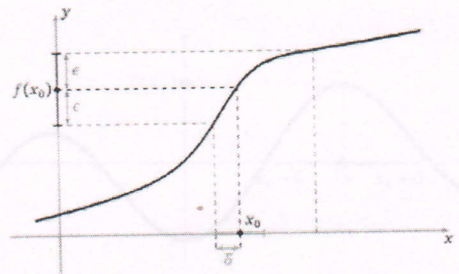
5.3 Continuité

Définition 5.25. *(Continuité en un point)*
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*

- *On dit que* f *est continue en un point* $x_0 \in I$ *si*

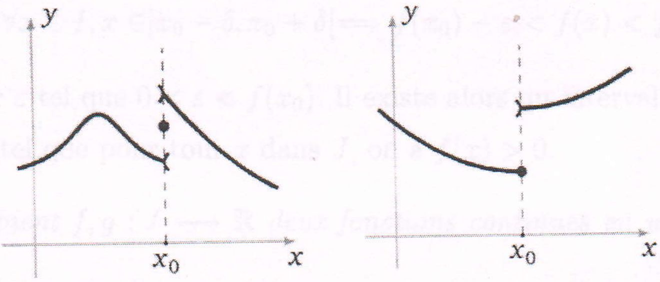
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in I, \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

  c'est-à-dire si f *admet une limite en* x_0 *(cette limite vaut* $f(x_0)$*).*
- *On dit que* f *est continue sur* I *si* f *est continue en tout point de* I.



Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative n'admet pas de sauts.

Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



Exemple 5.26. *Les fonctions suivantes sont continues :*

- *Une fonction constante sur un intervalle ;*
- *La fonction racine carrée* $x \longmapsto \sqrt{x}$ *sur* $[0, +\infty[$;
- *Les fonctions* sin *et* cos *sur* $\mathbb{R}$ *;*
- *La fonction valeur absolue* $x \longmapsto |x|$ *sur* $\mathbb{R}$ *;*
- *La fonction* exp *sur* $\mathbb{R}$ *;*
- *La fonction* ln *sur* $]0, +\infty[$.

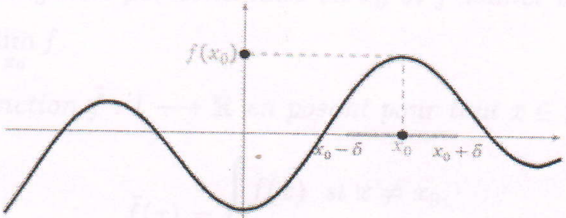
Par contre, la fonction partie entière E *n'est pas continue aux points* $x_0 \in \mathbb{Z}$, *puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Pour* $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, *elle est continue en* x_0.

5.3.1 Propriétés

La continuité assure par exemple que si une fonction est continue en un point (qui est une propriété ponctuelle) alors elle n'est pas nulle autour de ce point (propriété locale).

Lemme 5.27. *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un intervalle* I *et* x_0 *un point de* I. *Si* f *est continue en* x_0 *et si* $f(x_0) \neq 0$, *alors il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ f(x) \neq 0.$$



Démonstration. Supposons par exemple que $f(x_0) > 0$, le cas $f(x_0) < 0$ se montrerait de la même manière.

Écrivons ainsi la définition de la continuité de f en x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Longrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Il suffit donc de choisir ε tel que $0 < \varepsilon < f(x_0)$. Il existe alors un intervalle $J = I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tel que pour tout x dans J, on a $f(x) > 0$. ■

Proposition 5.28. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors*

- *$\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$) ;*
- *$f + g$ est continue en x_0 ;*
- *$f \times g$ est continue en x_0 ;*
- *Si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*

Exemple 5.29. *La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :*

- *Les fonctions puissance $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$;*
- *Les polynômes sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes) ;*
- *Les fractions rationnelles $x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.*

Propriétés 5.30. *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

5.3.2 Prolongement par continuité

Définition 5.31. *Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \backslash \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

- *On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim_{x_0} f$.*
- *On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq x_0, \\ \ell & si\ x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 5.32. *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0?*
En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1,$$

d'où

$$-x \leq \frac{1}{x} \leq x, si\ x > 0$$

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} (-x) \leq \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} xsin\frac{1}{x} \leq \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} (x).$$

Ce qui donne $\lim_{x \longrightarrow 0^+} xsin\frac{1}{x} = 0$. De manière similaire pour $x < 0$. On en déduit que f tend vers 0 en 0, Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

5.3.3 Suites et continuité

Proposition 5.33. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$*

Remarque. *On retiendra surtout l'implication si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. On l'utilisera intensivement pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est continue et $u_n \longrightarrow \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.*

Exemple 5.34. *Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Montrer que (u_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. À l'aide de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, calculer cette limite.*

On a f est une fonction continue sur $[0, +\infty[$. Supposons que (u_n) est une suite convergente de limite ℓ comme $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ et comme f est continue, alors $\ell = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n}$, et on a :

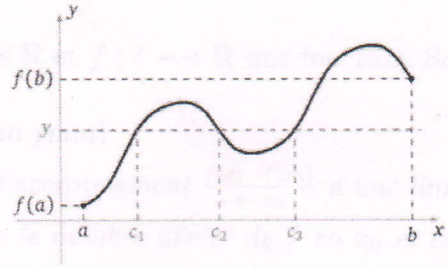
$$\ell = \sqrt{\ell} \text{ d'où } \ell^2 - \ell = 0$$

Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, et comme $u_n > 0$, $\forall n \geq 0$, alors $\ell = 1$.

Théorème 5.35. *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.*

Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarque. *Le réel c n'est pas nécessairement unique.*



5.3.4 Application du théorème des valeurs intermédiaires

Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 5.36. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*