Exemple 5.34. *Soit la suite définie par* $u_0 > 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. *Montrer que* (u_n) *admet une limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$. *À l'aide de la fonction* $f(x) = \sqrt{x}$, *calculer cette limite.*

On a f *est une fonction continue sur* $[0, +\infty[$. *Supposons que* (u_n) *est une suite convergente de limite* ℓ *comme* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$ *et comme* f *est continue, alors* $\ell = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n}$, *et on a :*

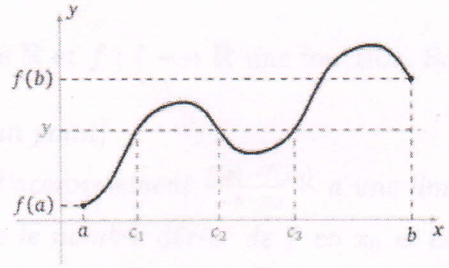
$$\ell = \sqrt{\ell} \text{ d'où } \ell^2 - \ell = 0$$

Donc $\ell = 0$ *ou* $\ell = 1$, *et comme* $u_n > 0$, $\forall n \geq 0$, *alors* $\ell = 1$.

Théorème 5.35. *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un segment.*

Pour tout réel y *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe* $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = y$.

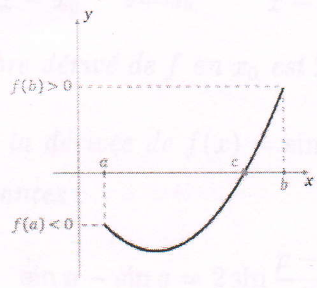
Remarque. *Le réel* c *n'est pas nécessairement unique.*



5.3.4 Application du théorème des valeurs intermédiaires

Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 5.36. *Soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un segment.*
si $f(a).f(b) < 0$, *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = 0$.



Démonstration. Il s'agit d'une application du théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$.
L'hypothèse $f(a).f(b) < 0$ signifiant que $f(a)$ et $f(b)$, sont de signes opposés. ■

Exemple 5.37.
Soient $p(x) = x^5 - 3x - 2$ et $f(x) = x^3 + x - 1$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. *L'équation $p(x) = 0$ a au moins une racine dans $[1, 2]$. En effet :*
   $p(1) = -4 < 0$ et $p(2) = 24 > 0$ avec f est continue sur $[1, 2]$, et on conclut grâce au corollaire précédent.

2. *L'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine dans $[0, 1]$. En effet :*
   $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ avec f est continue sur $[0, 1]$, et on conclut grâce au corollaire précédent.

5.4 Dérivabilité

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 5.38. (*Dérivée en un point*)
f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Définition 5.39. *f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.*

Exemple 5.40. *La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{x - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \longrightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x_0) = 2x_0$.

Exemple 5.41. *Montrons que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f'(x) = \cos x$. Nous allons utiliser les deux assertions suivantes :*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad et \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2}, \forall p, g \in \mathbb{R}.$$

Remarquons déjà que la première assertion prouve que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *et donc f est dérivable en* $x_0 = 0$ *et* $f^{'}(0) = 1$.

Pour x_0 *quelconque on écrit :*

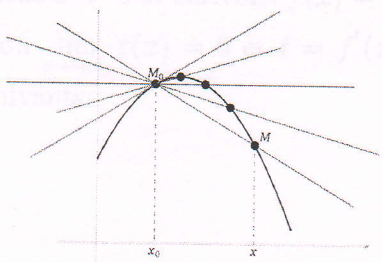
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cos \frac{x - x_0}{2}.$$

Lorsque $x \longrightarrow x_0$ *alors, d'une part* $\cos \frac{x+x_0}{2} \longrightarrow \cos x_0$ *et d'autre part, en posant* $u = \frac{x-x_0}{2}$ *alors* $u \longrightarrow 0$ *et on a* $\frac{\sin u}{u} \longrightarrow 1$. *Ainsi* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow \cos x_0$ *et donc* $f^{'}(x) = \cos x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

5.4.1 Équation de la tangente

La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. À la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f^{'}(x_0)$. Une équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$y = (x - x_0)f^{'}(x_0) + f(x_0).$$



Autres écritures de la dérivée

Voici deux autres formulations de la dérivabilité de f en x_0.

Proposition 5.42.

- *f est dérivable en* x_0 *si et seulement si* $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}$ *existe et est finie.*
- *f est dérivable en* x_0 *si et seulement s'il existe* $\ell \in \mathbb{R}$ *(qui sera* $f^{'}(x_0)$*) et une fonction* $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ *avec*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x).$$

Démonstration. Il s'agit juste de reformuler la définition de $f'(x_0)$. Par exemple, après division par $x - x_0$, la deuxième écriture devient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell + \varepsilon(x).$$

■

Proposition 5.43. *Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Démonstration. Supposons f dérivable en x_0 et montrons qu'elle est aussi continue en ce point. Voici une démonstration concise : partant de l'écriture alternative donnée dans la proposition 4.42, nous écrivons

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Donc $f(x) \longrightarrow f(x_0)$ lorsque $x \longrightarrow x_0$ et ainsi f est continue en x_0.

On reprend cette démonstration sans utiliser les limites mais uniquement la définition de continuité et dérivabilité : fixons $\varepsilon' > 0$ et écrivons $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x)$ grâce à la proposition 4.42, où $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ et $\ell = f'(x_0)$. Choisissons $\delta > 0$ de sorte qu'il vérifie tous les points suivants :

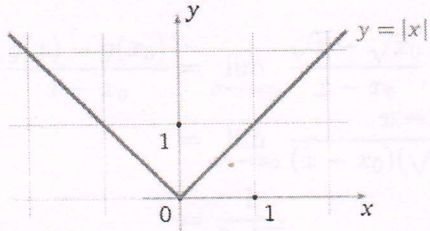
- $\delta \leq 1$,
- $\delta|\ell| < \varepsilon$,
- si $|x - x_0| < \delta$ alors $|\varepsilon(x)| < \varepsilon'$ (c'est possible car $\varepsilon(x) \longrightarrow 0$).

Alors l'égalité ci-dessus devient :

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= |(x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x)| \\
&\leq |x - x_0||\ell| + |x - x_0||\varepsilon(x)| \\
&\leq \delta|\ell| + \delta\varepsilon' \text{ pour } |x - x_0| < \delta \\
&\leq \varepsilon' + \varepsilon' = 2\varepsilon'.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que si $|x - x_0| < \delta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < 2\varepsilon'$, ce qui exprime exactement que f est continue en x_0. ■

Remarque. *La réciproque est fausse : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.*



En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ *en* $x_0 = 0$ *vérifie :*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0, \\ -1 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Donc f *n'est pas dérivable en* x_0.

Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

Exemple 5.44. *1. Montrer que la fonction* $f(x) = x^3$ *est dérivable en tout point* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et que* $f'(x_0) = 3x_0^2$.

2. Montrer que la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ *est dérivable en tout point* $x_0 > 0$ *et que* $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Solution

1. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \longrightarrow x_0} x^2 + xx_0 + x_0^2 = 3x_0^2. \end{aligned}$$

La limite existe et est unique alors f est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et on a $f'(x_0) = 3x_0^2$.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.\end{aligned}$$

De même, la limite existe et est unique alors g et dérivable en tout point $x_0 > 0$, et on a $g^{'}(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

5.5 Calcul des dérivées

Proposition 5.45. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:*

- $(f+g)^{'}(x) = f^{'}(x) + g^{'}(x)$;
- $(\lambda f)^{'}(x) = \lambda f^{'}(x)$ *où λ est un réel fixé;*
- $(f \times g)^{'}(x) = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x)$;
- $\left(\frac{1}{f}\right)^{'}(x) = -\frac{f^{'}(x)}{(f(x))^2}$ *(si $f(x) \neq 0$);*
- $\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(x) = \frac{f^{'}(x)g(x)-f(x)g^{'}(x)}{(g(x))^2}$ *(si $g(x) \neq 0$).*

Démonstration. Prouvons par exemple que $(f \times g)^{'}(x) = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x)$. Fixons $x_0 \in I$. Nous allons réécrire le taux d'accroissement de $f(x)g(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)\\ &\longrightarrow f^{'}(x_0)g(x_0) + g^{'}(x_0)f(x_0).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, la fonction $f \times g$ est dérivable sur I de dérivée $(f \times g)^{'}(x) = f^{'}(x).g(x) + f(x).g^{'}(x)$.

De la même manière ou peut démontrer les autres. ■

5.5.1 Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable.Dans le tableau de droite, u représente une fonction $x \longmapsto u(x)$.

Fonction	Dérivée
x^n	nx^{n-1} $(n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}, (x > 0)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha < 1 \text{ et } x \neq 0) \vee (\alpha \geq 1)$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu^{'}u^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u^{'}}{u^2}, (u \neq 0)$
$\sqrt{u}$	$\frac{u^{'}}{2\sqrt{u}}$ $(u \neq 0)$
u^α	$\alpha u^{'}u^{\alpha-1}, (\alpha < 1 \text{ et } u \neq 0) \vee (\alpha \geq 1)$
e^u	$u^{'}e^u$
$\ln u$	$\frac{u^{'}}{u}$
$\cos u$	$-u^{'}\sin u$
$\sin u$	$u^{'}\cos u$
$\tan u$	$u^{'}(1 + \tan^2 u) = \frac{u^{'}}{\cos^2 u}$

Remarque.
Si vous devez dériver une fonction avec un exposant dépendant de x il faut absolument repasser à la forme exponentielle. Par exemple si $f(x) = 2^x$ alors on réécrit d'abord $f(x) = e^{x\ln 2}$ pour pouvoir calculer $f^{'}(x) = \ln 2.e^{x\ln 2} = \ln 2.2^x$.

5.5.2 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 5.46. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I, g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(I)$, et x_0 un point de I. Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et l'on a*

$$(g \circ f)^{'}(x_0) = g^{'}[f(x_0)].f^{'}(x_0).$$

Démonstration. f étant dérivable en x_0, on a

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon_1(x)] \text{ avec } \lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

g étant dérivable en $y_0 = f(x_0)$, on a

$$g(y) - g(y_0) = (y - y_0)[g'(y_0) + \varepsilon_2(y)] \text{ avec } \lim_{y \longrightarrow y_0} \varepsilon_2(y) = 0 \text{ et } y \in f(I)$$

En remarquant que $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$, on a alors

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon_1(x)][g'(y_0) + \varepsilon_2(y)],$$

ou encore

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = (x - x_0)[g'(y_0)f'(x_0) + \varepsilon(x)]$$

avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)g'(y_0) + \varepsilon_2(y)f'(x_0) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(y)$ et $\varepsilon \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow x_0$.
Le théorème est prouvé.

■

Exemple 5.47. *Calculer la dérivée de* $\ln(1 + x^2)$.
Nous posons $g(x) = \ln x$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$, *et* $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$.
Alors la dérivée de $\ln(1 + x^2) = (g \circ f)(x)$ *est*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = g'(1 + x^2).2x = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Remarque. *En général si* $f(x) = u(x)^{v(x)}$ *où* u *et* v *sont deux fonctions, on écrit* $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$ *ensuite on dérive.*

5.5.3 Dérivée de la fonction réciproque

Théorème 5.48. *Soit* f *une application bijective et continue sur un intervalle* I *et dérivable en un point* x_0 *de* I *telle que* $f'(x_0) \neq 0$. *Alors la fonction réciproque* f^{-1} *est dérivable au point* $f(x_0)$ *et admet pour dérivée*

$$(f^{-1})'[f(x_0)] = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration. Notons $h = f^{-1}$. Soit $y_0 \in f(I)$ et $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Pour $y \neq y_0$, on a

$$\frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = Q(x) \text{ avec } x = h(y)$$

Lorsque $y \longrightarrow y_0$ alors $x = h(y) \longrightarrow h(y_0) = x_0$ (h est continue) et donc $Q(x) \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$.
Ainsi

$$h'(y_0) = (f^{-1})'[f(x_0)] = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

■

5.5.4 Dérivées successives

Définition 5.49. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On définit les dérivées successives de f de proche en proche (c-à-d : par récurrence), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

- *$f^{(1)}$ est l'application dérivée de f c-à-d $f^{(1)} = f'$.*
- *Pour $a \in I, f^{(n)}(a)$ est, si elle existe, la dérivée de $f^{(n-1)}$ en a.*
- *$f^{(n)}$ est l'application dérivée de $f^{(n-1)}$.*

On appelle application dérivée n-ème de f l'application $x \longmapsto f^n(x)$.

On dit que f est n fois dérivable sur I si et seulement si $f^{(n)}$ est définie sur I.

On dit que f est indéfiniment dérivable sur I si et seulement si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque. *1. On note : $f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f''$ et $f^{(n)} = (f^{(n-1)})', n \in \mathbb{N}^*$.*

2. Si f est n fois dérivable sur I, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n, f$ est p fois dérivable sur I et, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p + q \leq n$, on a $(f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$.

3. Il se peut que les ensembles de définition de $f, f', f'', \cdots$ soient distincts.

Théorème 5.50. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, et soient $f, gI :\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables n fois dérivables sur I. Alors $\forall m \leq n$:*

1. *$f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f + g)^{(m)} = f^{(m)} + g^{(m)}$;*
2. *λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(m)} = \lambda f^{(m)}$;*
3. *fg est n fois dérivable sur I et $(f.g)^{(m)} = \sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k)} g^{(m-k)}$ (formule de Leibniz);*
4. *Si $(\forall x \in I, g(x) \neq 0)$, alors $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I.*

Démonstration. 1,2 et 3 se montrent aisément par récurrence sur m pour $m \leq n$.
Montrons par exemple 3. Soit $m \leq n$

• Pour $m = 1$ on retrouve $(f.g)' = f'g + fg'$.

• Pour $m = 2$, on a $(f.g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$. supposons la propriété vraie au rang $m < n$ et soient f, g $(m+1)$ fois dérivable sur I. D'après l'hypothèse de récurrence, $f.g$ est m fois dérivable sur I. Et

$$(f.g)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k)} g^{(m-k)}$$

. Alors $(f.g)^{(m)}$ est dérivable sur I et :

$$\begin{aligned}
((f.g)^m)' = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k)} g^{(m-k)}\right)' &= \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k+1)} g^{(m-k)} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k)} g^{(m-k+1)} \\
&= \sum_{l=1}^{m+1} C_m^{l-1} f^{(l)} g^{(m+1-l)} + \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(k)} g^{(m+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{m} (C_m^{k-1} + C_m^k) f^{(k)} g^{(m+1-k)} + f^{(m+1)} g^{(0)} + f^{(0)} g^{(m+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k f^{(k)} g^{(m+1-k)}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant 4 par récurrence sur m.

• Pour $m = 1$, on a $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Supposons la propriété vraie au rang m. Comme f, f', g, g' sont m fois dérivables sur I, $(f'g - fg')$ et g^2 sont aussi, d'après l'hypothèse de récurrence, il en résulte que $\frac{f'g-fg'}{g^2}$ est m fois dérivable sur I, et finalement $\frac{f}{g}$ est $(m+1)$ fois dérivable sur I. ■

Exemple 5.51. *Calculer la dérivée n-ème de la fonction* $h(x) = e^x.(x^2+1), \forall n \geq 0$.

Notons $f(x) = e^x$ *et* $g(x) = x^2 + 1$.

On a $f'(x) = e^x, f'' = e^x, \cdots, f^{(k)}(x) = e^x, \forall k \in \mathbb{N}$.

$g'(x) = 2x, g''(x) = 2$ *et pour* $k \geq 3$ $g^{(k)}(x) = 0$.

Appliquons la formule de Leibniz :

$h^{(n)}(x) = (f.g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + C_n^1 f^{(n-1)}(x) g^{(1)}(x) + C_n^2 f^{(n-2)}(x) g^{(2)}(x) + \sum_{k=3}^{n} (C_n^k(x) f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Donc : $(f.g)^{(n)}(x) = e^x(2nx + n(n-1) + 1)$.

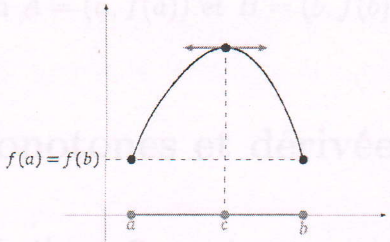
Théorème 5.52. (*Théorème de Rolle*)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a,b]$, *dérivable sur* $]a,b[$ *et telle que* $f(a) = f(b)$. *Alors il existe un point* $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si f est constante sur $[a,b]$, le résultat est trivial puisque

$$\forall x \in [a,b] : f'(x) = 0.$$

Sinon il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$. Alors f est continue sur $[a,b]$, qui est fermé et borné, donc elle admet un maximum en un point $c \in [a,b]$. Mais $f(c) \geq f(x_0) > f(a)$ donc $c \neq a$. De même comme $f(a) = f(b)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a,b[$. En c, f est donc dérivable et, admet un maximum donc $f'(c) = 0$. ■



Interprétation géométrique :
géométriquement, le théorème dit qu'il existe au moins un point c, distinct de a et b, pour lequel la tangente à la courbe en ce point est horizontale.

Exemple 5.53.

1. *Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - x + 1$.*
   Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$, puis déterminer cette constante.
   On a f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $]0,1[$, et on a $f(0) = f(1) = 1$.
   Donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]0,1[$: $f'(c) = 0$.
   On a $f'(c) = 3c^2 - 1$ d'où $c = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$.
   Comme $-\frac{1}{\sqrt{3}} \notin]0,1[$, alors $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Théorème des accroissements finis

Théorème 5.54. (*Théorème des accroissements finis*)
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Démonstration. Posons $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Le théorème de Rolle implique l'existence d'un point $c \in]a,b[$ tel que

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

Ainsi, f est croissante sur $[a,b]$.

De façons analogue, si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur $[a,b]$.

Évidemment si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), alors f sera strictement croissante(resp. strictement décroissante). ■

Remarque. *La réciproque de* (4) *et* (5) *est fausse. Par exemple la fonction* $f(x) = x^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *sur tout intervalle* $[a,b]$ *contenant* 0, *mais* f' *s'annule en* 0.

Exemple 5.56. *Considérons*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \frac{x}{1+x^2}. \end{array}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+ : f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, donc on a : f est strictement croissante si $x \in [0,1]$.

f est strictement décroissante si $x \in [1,+\infty[$.

Corollaire 5.57. *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur un intervalle ouvert* I. *S'il existe une constante* M *telle que pour tout* $x \in I, |f'(x)| \leq M$ *alors*

$$\forall x,y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

Démonstration. Fixons $x < y \in I$ alors il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$, et comme $|f'(c)| \leq M$, alors $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$. ■

Exemple 5.58. *Soit* $f(x) = \sin x$. *Comme* $f'(x) = \cos x$ *alors* $|f'(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. *L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :*

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, |\sin x - \sin y| \leq |x-y|.$$

Si $y = 0$ *alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|.$$

5.7 Règle de l'Hospital

Théorème 5.59. (*Règle de l'Hospital*)

Soient $f,g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables et soit* $x_0 \in I$. *On suppose que* $f(x_0) = g(x_0) = 0$, *et* $g'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I \backslash \{x_0\}$.

$$Si \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \; alors \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell, \; (\ell \in \mathbb{R}).$$

Démonstration. Fixons $a \in I\backslash\{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$. Soit $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors h est continue sur $[a, x_0] \subset I$, dérivable sur $]a, x_0[$ et $h(x_0) = h(a) = 0$, d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, x_0[$ tel que $h'(c) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ donc $g(a)f'(c) - f(a)g'(c) = 0$. Comme $g'(x) \neq 0, \forall x \in I\backslash\{x_0\}$ cela conduit à $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. En passant à la limite lorsque $a \longrightarrow x_0$, et $c \longrightarrow x_0$ (puisque $a < c < x_0$), on obtient

$$\lim_{a \longrightarrow x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \longrightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \longrightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \ell.$$

■

Exemple 5.60.

1. *Calculer* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$*.Posons* $f(x) = \ln(x+1)$ *et* $g(x) = \sqrt{x}$*,on a*
   - $f(0) = 0$ *et* $f'(x) = \frac{1}{x+1}$.
   - $g(0) = 0$ *et* $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

   Soit $I = [0, 1]$ *et soit* $x_0 = 0$, *alors* $g'(x) \neq 0, \forall x \in]0, 1]$. *Donc*

   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 0.$$

2. *Calculer* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \sin s}{x}$. *Posons* $f(x) = x - \sin x$ *et* $g(x) = x$, *on a*
   - $f(0) = 0$ *et* $f'(x) = 1 - \cos x$.
   - $g(0) = 0$ *et* $g'(x) = 1$.

   Soit $I = [0, 1]$; *et soit* $x_0 = 0$, *alors* $g'(x) \neq 0, \forall x \in]0, 1]$. *Donc*

   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \sin s}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} 1 - \cos x = 0 \textit{ alors } \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x} = 0.$$