Université de Jijel

- **Faculté des Sciences et de la Technologie** - **Département d'Electrotechnique**
- **2ème Année Licence en ELT et ELM (S3)** - **Matière : Probabilités & Statistiques (PS)**

Série de TD N°1 : Analyse Combinatoire

Exercice n°1 :

Dans tout l'exercice, on suppose qu'il n'y a pas de répétition.

1) Combien de nombres de **4** chiffres peut-on former à l'aide des **7** chiffres **1**, **2**, **4**, **5**, **6**, **8**, **9** ?
2) Combien de ces nombres sont inférieurs à **5000** ?
3) Combien de ces nombres sont pairs ?
4) Combien sont impairs ?
5) Combien sont des multiples de **5** ?

Exercice n°2 :

Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues.

1) Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.
2) Généraliser le résultat précédent dans le cas d'un système de **n** équations à **n** inconnues ayant un déterminant non nul.

Exercice n°3 :

Un clavier de **9** touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de **3** chiffres distincts ou non.

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
A	**B**	**C**

1) Combien de codes différents peut-on former ?
2) Combien y a-t-il de codes sans le chiffre **1** ?
3) Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre **1** ?
4) Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5) Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

Exercice n°4 :

Soit un lot de **7** pièces dont **4** sont bonnes et **3** défectueuses.

1) Combien d'échantillons de **3** pièces peut-on réaliser ?
2) Combien parmi ces échantillons contiennent **3** bonnes pièces ?
3) Combien au moins contiennent une pièce bonne ?

Exercice n°5 :

On appelle anagramme d'un mot, tout autre mot formé des mêmes lettres (par exemple : carte et trace).
C'est donc une permutation avec répétition des lettres de ce mot.
- Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot **COMMISSION** ?.

Exercice n°6 :

Montrer que pour tout entier **n** et **p**, tel que : $\mathbf{n \geq 2}$ et $\mathbf{1 \leq p \leq n-1}$, les relations suivantes sont vérifiées.

1) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$
2) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots C_p^{p-1} + C_p^p$

Formules classiques d'analyse combinatoire

1- Principe fondamental d'analyse combinatoire (PFAC)

Soit $A_1, A_2, \ldots A_p$ p ensembles distincts formés d'éléments complètement discernables. Le nombre de *p-uplet* $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ qu'on peut former à partir des ensembles $A_i, (a_i \in A_i, i = 1, \ldots, p)$ est :

$$N = card(A_1 \times A_2 \times \ldots A_p) = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p \text{ , ou } n_i = card(A_i)$$

2- Arrangement avec répétition

Le nombre d'arrangements avec répétition de *p-éléments* parmi *n* est :

$$A_n^p = n^p$$

3- Arrangement sans répétition

Le nombre d'arrangements sans répétition de *p-éléments* parmi *n* est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n.(n-1)....(n-p+1)$$

4- Permutation sans répétition

C'est un arrangement sans répétition de *n-éléments* parmi *n* :

$$P_n = A_n^n = n!$$

5- Permutation avec répétition

C'est une disposition ordonnée de *n-éléments*, ou le 1[er] élément figure n_1 fois, le 2[ème] élément figure n_2 fois,….. Le nombre de permutations avec répétition de n éléments :

$$P_n^{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \quad \text{Avec} \quad \left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$$

6- Combinaison avec répétition

Le nombre de combinaisons avec répétition de *p-éléments* parmi *n* $(0 \le p \le n)$ est :

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n-1+p)!}{p!(n-1)!}$$

7- Combinaison sans répétition

Le nombre de combinaisons de *p-éléments* parmi *n* éléments discernables $(0 \le p \le n)$ est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

8- Relations utiles

(i) Les coefficients C_n^p sont aussi appelés *coefficients binomiaux*. Si *p* set strictement supérieur à *n*, on convient que dans ce cas $C_n^p = 0$.

(ii) Pour tout entier *n* et tout entier *p* tel que $(0 \le p \le n)$, on a :

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \; ; \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n \; ; \quad C_n^p = C_n^{n-p}$$

(iii) (Relation de Pascal) : Pour tout entier $n \ge 2$ et tout entier *p* tel que $1 \le p \le n-1$, on a :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

(iv) (Formule du binôme de Newton) : Pour tous nombres complexes *a* et *b* et tout entier naturel *n* non nul :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$