Série de TD N°3 : Variables Aléatoires Réelles

Exercice n°1 :

1) Soit X une variable aléatoire de probabilité définie pour $\lambda > 0$ par :

$$P(X = i) = \frac{C \cdot \lambda^i}{i!}, \forall i = 0,1,2, \dots \dots$$

– Calculer $P(X = 0)$ et $P(X > 2)$.

N-B : C est une constante à déterminer. Pour cela, on utilise le développement en série de la fonction :

$$\mathrm{x} \to e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$$

2) Soit f la fonction définie pour $\lambda > 0$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda . e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

– La fonction f est-elle une densité de probabilité d'une variable aléatoire X ?

– Calculer$P(X > 1)$.

Exercice n°2 :

La fonction de répartition d'une V-A X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ (x-2)^2 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

1) Calculer : $P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right); P\left(\frac{5}{2} \leq X \leq \frac{7}{2}\right); P\left(\frac{5}{2} \leq X \leq 3\right)$.

2) Déterminer la densité de probabilité de la V-A X.

Exercice n°3 :

On jette deux dés symétriques. Soient X_1 et X_2 les **v-a** correspondant à la somme et le produit des points obtenus.

1) Construire les suites de répartitions de X_1 et X_2.

2) Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.

Exercice n°4 :

Une v-a X est distribuée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} & , \quad |x| \leq a \\ 0 & , \quad |x| \geq a \end{cases}, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ des réels strictement positif}$$

1) Déterminer la relation que doivent vérifier les réels a et b.

2) Calculer $E(X), \mathrm{Var}(X)$ et trouver la fonction de répartition $F(x)$ de X.

Exercice n°5 :

1) Inégalité de Markov :

Montrer que si X est une variable aléatoire positive alors

$$\forall a > 0, \qquad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

2) Inégalité de Chebyshev :

Montrer que si X est une variable aléatoire de moyenne finie μ et de variance σ^2, alors

$$\forall k > 0, \qquad P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

3) Application **:**

Soit X le nombre de pièces que fabrique une usine pendant une semaine. On suppose que la moyenns. X est égale à 500.

- Que peut-on dire sur la probabilité que la production de cette semaine ne dépasse pas 750.
- Si la variance de la production est connue et est égale à 250, que peut-on dire sur la probabilité que cette semaine la production soit entre 400 et 600.

N-B : Démontrer l'inégalité de Markov, uniquement pour un des deux cas :

$$X \equiv VAC \ \text{ ou } \ X \equiv VAD$$

On note : $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$