

Chapitre 1 : Notions de corrélation et de convolution

1. Rappels sur les systèmes linéaires

1.1. Introduction

Un système physique est une interconnexion de dispositifs et d'éléments régis par les lois de la physique. Un système qui opère sur des signaux analogiques est dit système analogique ou système à temps continu. Un système qui opère sur des signaux échantillonnés (discrets) est dit système numérique ou système à temps discret. Le signal à traiter par le système forme l'excitation ou l'entrée du système. Le signal traité est la réponse ou sortie du système.

1.2. Systèmes continus

Un système continu peut être modélisé par un opérateur $T[.]$ qui agit sur une entrée $x(t)$ continue et délivre une sortie continue $y(t)$.

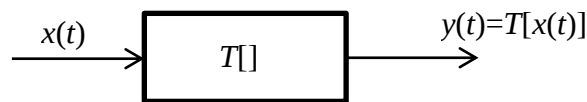


Figure 1 : Système continu

Linéarité

Un système est dit linéaire si l'opérateur $T[.]$ est linéaire, c-a-d, il satisfait au principe de superposition.

Pour un système continu

Si $T[x_1(t)] = y_1(t)$ et $T[x_2(t)] = y_2(t)$ alors $T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système continu est la réponse du système lorsqu'il est excité par une impulsion de Dirac :

$$h_\tau(t) = T[\delta(t - \tau)]$$

$$y(t) = T[x(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)T[\delta(t - \tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_\tau(t)d\tau$$

Invariance dans le temps

L'invariance dans le temps aussi appelée invariance par décalage implique que la forme de la réponse $y(t)$ dépend uniquement de la forme de l'entrée $x(t)$ et non de l'instant où elle est appliquée. Si l'entrée est $x(t - t_0)$ (décalage de t_0), la réponse est égale à $y(t - t_0)$ et est décalée de la même quantité.

Stabilité et causalité

Un système est stable si à une entrée bornée il fait correspondre une sortie bornée. Le système est stable si sa réponse impulsionnelle est absolument intégrable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty$$

Un système est causal si sa sortie dépend de l'instant présent et des instant passé mais pas des instant futurs : $y(t_0) = T[x(t); t \leq t_0]$

Le système est causal si $h(t)=0$ pour $t < 0$:

Signal causal : $x(t)=0$ pour $t < 0$

Systèmes continus caractérisés par des équations linéaires à coefficients constants

Une classe importante des systèmes linéaires continus est celle caractérisée par une équation différentielle à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Déterminons la réponse en fréquence du système.

En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation différentielle, il vient

$$TF \left[\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right] = TF \left[\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]$$

En appliquant les propriétés de linéarité et de dérivation, on obtient

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

Soit donc

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

où $X(\omega)$, $Y(\omega)$ sont les transformées de Fourier de l'entrée $x(t)$, la sortie $y(t)$ et $H(\omega)$ est la réponse en fréquence du système.

1.3. Systèmes échantillonnés (discrets)

Un système discret peut être modélisé par un opérateur $T[.]$ qui agit sur une séquence d'entrée $x(n)$ et délivre à sa sortie une séquence $y(n)$.

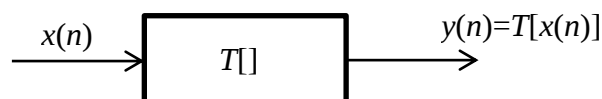


Figure 2 : Système discret

Linéarité

Pour un système discret

Si $T[x_1(n)] = y_1(n)$ et $T[x_2(n)] = y_2(n)$ alors $T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$

Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système discret est la réponse du système lorsqu'il est excité par une impulsion unité :

$$h_k(n) = T[\delta(n-k)]$$

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h_k(n)$$

Invariance dans le temps

L'invariance temporelle implique que la forme de la réponse $y(n)$ dépend uniquement de la forme de l'entrée $x(n)$ et non de l'instant où il est appliqué. Si l'entrée est décalée vers $x(n - n_0)$, la réponse est égale à $y(n - n_0)$ et est décalée de la même quantité.

Stabilité et causalité

Un système discret est stable si sa réponse impulsionnelle est absolument sommable :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) < \infty$$

Un système est causal si sa sortie dépende de l'instant présent et des instant passé mais pas des instant futurs :

$$y(n_0) = T[x(n); n \leq n_0]$$

Le système est causal si $h(n)=0$ pour $n<0$.

Signal causal : $x(n)=0$ pour $n<0$

Systèmes discrets caractérisés par des équations aux différences à coefficients constants

Une classe importante des systèmes linéaire discrets est celle caractérisée par une équation aux différences à coefficients constants

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (17)$$

En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation aux différences et en utilisant la propriété de linéarité et de translation temporelle, il vient:

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(\omega)$$

$$\text{Soit} \quad H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}} \quad (19)$$

où $X(\omega)$, $Y(\omega)$ sont les transformées de Fourier de l'entrée $x(n)$ et la sortie $y(n)$ et $H(\omega)$ est la réponse en fréquence du système.

2. Le produit de convolution

2.1. Définition pour les signaux analogiques

Soient $x(t)$ et $h(t)$ deux signaux continus à énergie finie. Le produit de convolution de $x(t)$ et $h(t)$ noté $y(t)$ est défini par

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

Etapes de calcul du produit de convolution

1. Remplacer t par τ
2. Obtenir la symétrie de $x(\tau)$ par rapport à l'axe des ordonnées $x(\tau) \rightarrow x(-\tau)$
3. Décaler $x(-\tau)$ de t $x(-\tau) \rightarrow x(t-\tau)$
4. Calculer le produit $h(\tau)x(t-\tau)$

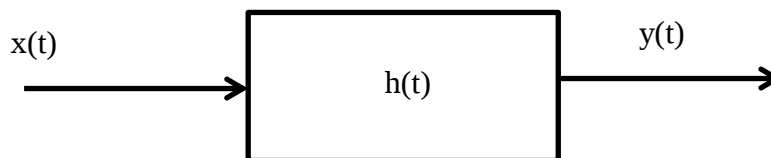
5. Calculer l'intégrale $\int h(\tau)x(t - \tau)d\tau$

Le produit de convolution est une fonction de t calculé pour $-\infty < t < +\infty$

Application de la convolution

La convolution est une application directe des systèmes linéaires invariants dans le temps. Si $h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant dans le temps excité par le signal d'entrée $x(t)$ alors la sortie du système est donnée par

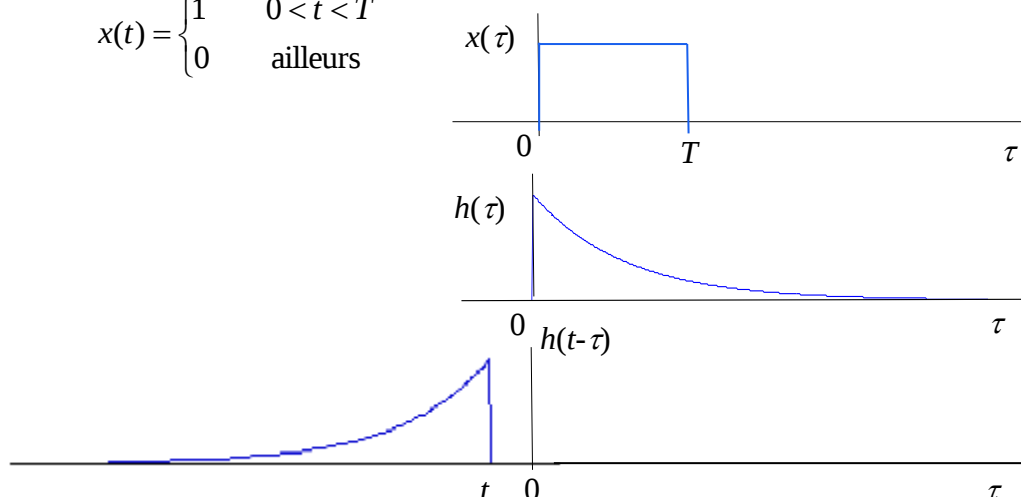
$$y(t) = x(t) * h(t)$$



Exemple

Soit le système linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-t}u(t)$, où $u(t)$ dénote l'échelon unité. Déterminons la réponse du système à l'entrée $x(t)$ donnée par

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

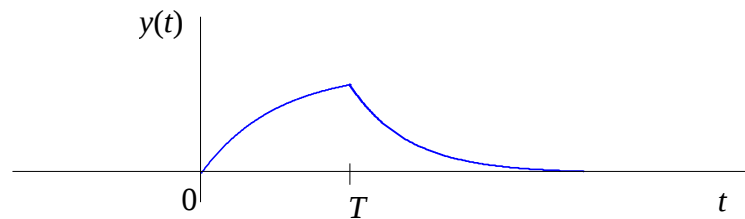


- $t < 0 \quad y(t) = 0$
- $0 < t < T$

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-t} (e^t - 1) = 1 - e^{-t}$$

- $t \geq T$

$$y(t) = \int_0^T e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^T e^{\tau} d\tau = e^{-t} (e^T - 1)$$



Propriétés de la convolution

Commutativité

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Associativité

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

Distributivité

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

2.2. Définition pour les signaux discrets

Soient $x(n)$ et $h(n)$ deux signaux discrets à énergie finie. La convolution discrète de $x(n)$ et $h(n)$ noté $y(n)$ est défini par

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k)$$

Etapes de calcul de la convolution discrète

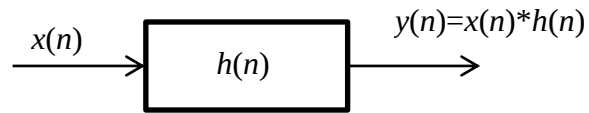
1. Remplacer n par k
2. Obtenir la symétrie de $x(k)$ par rapport à l'axe des ordonnées $x(k) \rightarrow x(-k)$
3. Décaler $x(-k)$ de n $x(-n) \rightarrow x(n-k)$
5. Calculer la somme des produits $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k)$

La convolution discrète est une fonction de n calculée pour $-\infty < n < +\infty$

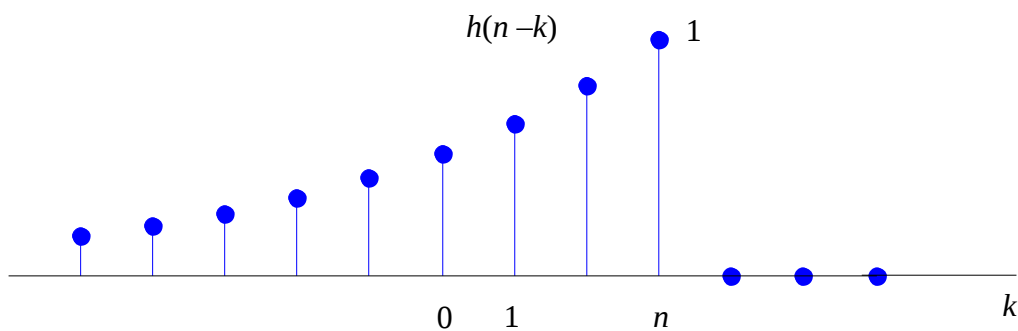
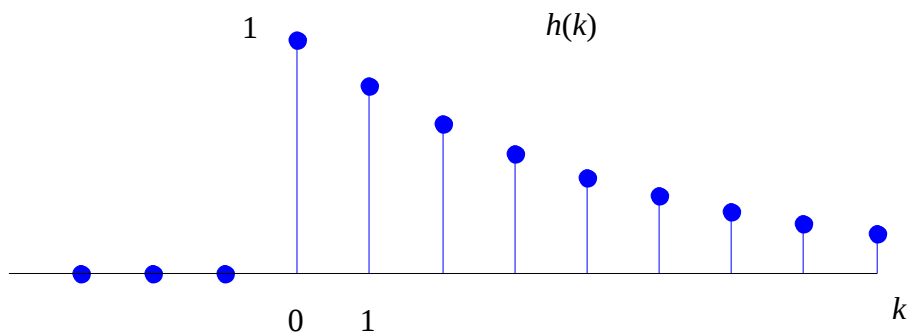
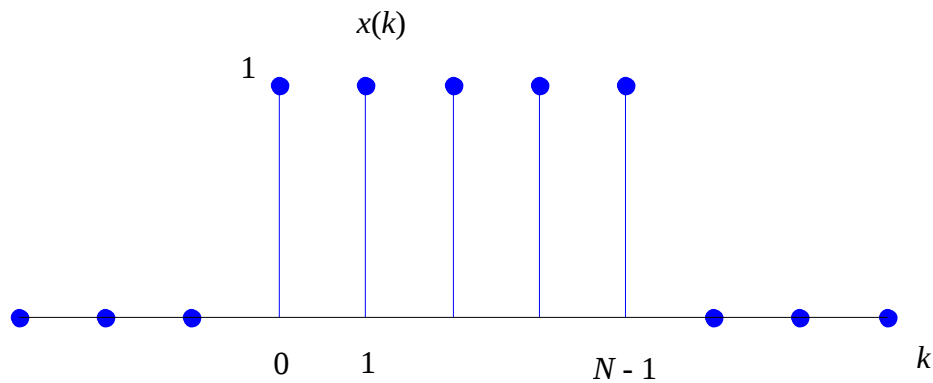
Exemple

$$h(n) = a^n u(n), \quad 0 < a < 1$$

$$= \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



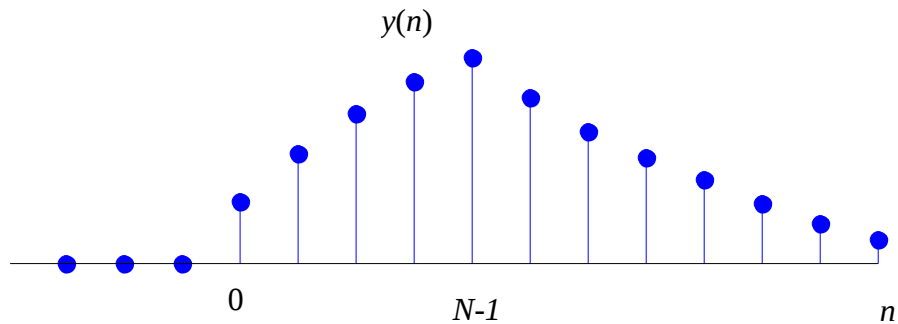
$x(n)=u(n) - u(n - N)$: impulsion rectangulaire



• $n < 0 \quad y(n) = 0$

• $0 \leq n < N \quad y(n) = \sum_{k=0}^n a^{n-k} = a^n \frac{1 - a^{-(n+1)}}{1 - a^{-1}}$

- $n \geq N$
$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$$



3. La corrélation

3.1 Corrélation des signaux à énergie finie

La fonction de corrélation mutuelle ou inter-corrélation temporelle de deux signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ à énergie finie (ex : signaux transitoires) est donnée par :

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = \varphi_{yx}^*(-\tau)$$

On montre que $\varphi_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$

La fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$ est donnée par

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t+\tau)x(t)dt = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

Pour $\tau=0$, on obtient l'énergie du signal

$$E = \varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

La transformée de Fourier de la fonction de corrélation mutuelle

s'obtient en appliquant la propriété de convolution:

$$\Phi_{xy}(\omega) = X(\omega)Y^*(\omega)$$

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est :

$$\Phi_{xx}(\omega) = X(\omega)X^*(\omega) = |X(\omega)|^2 : \text{densité spectrale d'énergie}$$

3.2 Corrélation des signaux à puissance finie

La fonction d'inter-corrélation temporelle de deux signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ à puissance finie (ex : signaux périodiques, signaux aléatoires) est définie par :

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^*(t+\tau)y(t)dt = \varphi_{yx}(-\tau)$$

La fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$ est donnée par

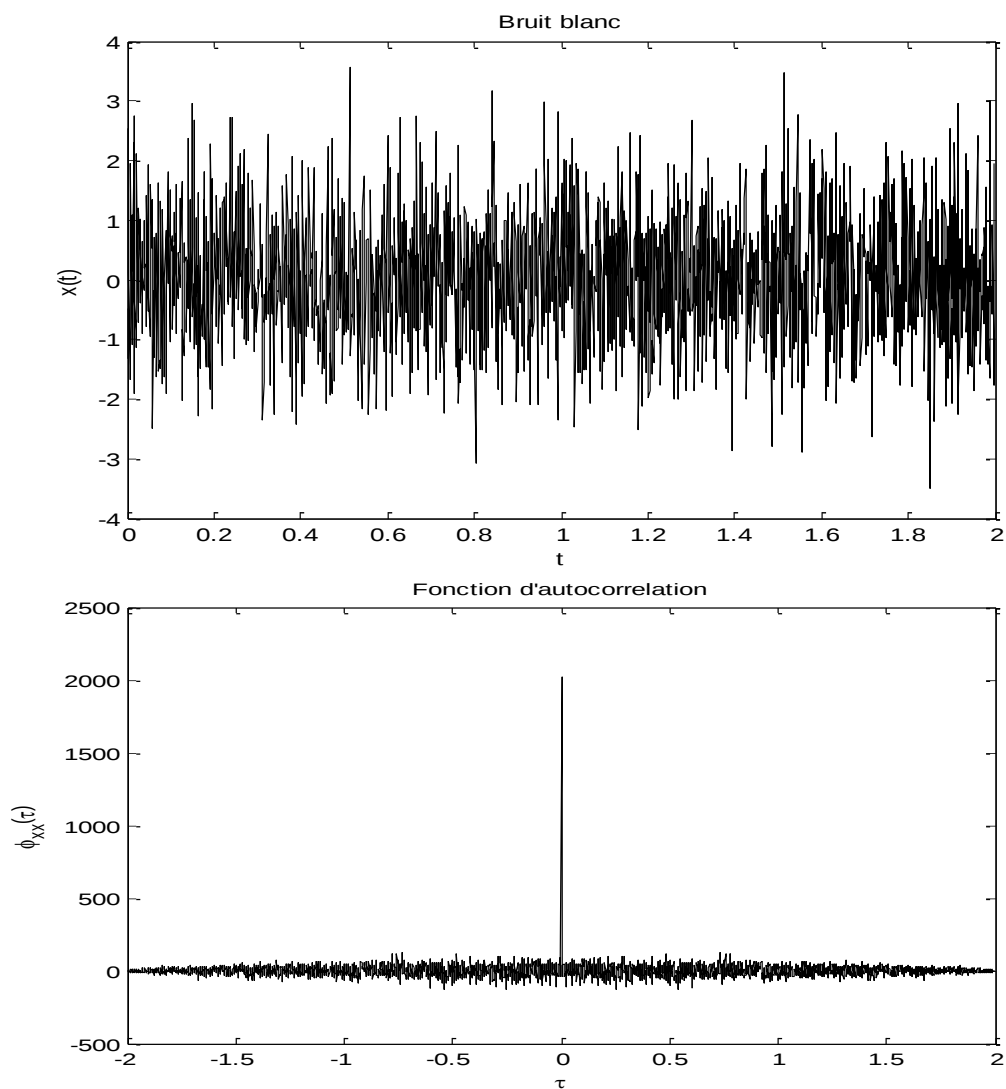
$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^*(t+\tau)x(t)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} x(\tau) * x^*(-\tau)$$

Pour $\tau=0$, on obtient la puissance du signal

$$P = \varphi_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

Si les signaux sont périodiques, l'intégrale se calcule sur une période.

Exemple de fonction d'autocorrélation



3.3 Propriétés

- **Propriétés de la fonction d'autocorrélation**

parité : $\varphi_{xx}(-\tau) = \varphi_{xx}^*(\tau)$

La fonction d'autocorrélation d'un signal périodique est périodique.

maximum en zéro : $|\varphi_{xx}(\tau)| \leq \varphi_{xx}(0)$

puissance/énergie moyenne du signal = $\varphi_{xx}(0)$

- **Propriétés de la fonction d'intercorrélation**

Symétrie hermitienne : $\varphi_{xy}(-\tau) = \varphi_{yx}^*(\tau)$

Majoration : $|\varphi_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2}(\varphi_{xx}(0) + \varphi_{yy}(0))$

3.4 Calcul de la fonction de corrélation

La fonction de corrélation des signaux à énergies finies est calculée en remplaçant l'intégrale par la somme des produits des valeurs des échantillons. Le temps t est remplacé par n et le délai τ par k . Si on dispose que de N échantillons du signal $x(n)$ et de M échantillons du signal $y(n)$ (réels), $\varphi_{xy}(k)$ ne peut être calculé à partir de $N - k$ valeurs :

$$\varphi_{xy}(k) = \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n+k)y(n), \quad 0 \leq k \leq N + M - 1$$

Pour les signaux à puissances finies, il vient

$$\varphi_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n+k)y(n), \quad 0 \leq k \leq N + M - 1$$

Lorsque k s'approche de $N - 1$, peu de termes interviennent dans le calcul de la fonction de corrélation alors que le terme de normalisation reste égal à $1/N$. Cela a pour conséquence d'introduire un biais dans la fonction de corrélation calculée. Pour éliminer ce biais, la fonction de corrélation peut être calculée en utilisant la forme biaisée :

$$\varphi_{xy}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x(n+k)y(n), \quad 0 \leq k \leq N + M - 1$$

3.5. Applications de la fonction de corrélation

Application dans les systèmes Radar : détection d'un signal noyé dans un bruit blanc

L'objectif est de détecter la présence ou non d'un avion et calculer sa distance par rapport au radar en cas de présence.

Le radar émet un signal chirp $s(t)$ et reçoit le signal $x(t)$ réfléchi par l'avion. S'il n'y a pas d'avion dans la zone couverte par le radar, le signal reçu $x(t)$ est un bruit. Si un avion est présent, le signal $x(t)$ reçu consiste en une version atténuée, retardée et bruitée du signal émis $s(t)$. Le signal reçu s'écrit comme :

$$x(t) = As(t - \tau) + b(t)$$

A : facteur d'atténuation dépendant de la distance et de la forme de l'avion
 τ = temps mis par l'onde pour parcourir le trajet aller et retour
 $b(t)$ = bruit additif

La détection de la présence ou non de l'avion peut être effectuée en calculant la fonction d'intercorrélation entre le signal émis par le radar et le signal reçu.

Présence d'un l'avion : La fonction d'intercorrélation présente un pic décalée par rapport à la position centrale. Ce temps de décalage correspond au trajet aller-retour parcouru par l'onde. La distance de l'avion par rapport au radar est calculée par $v\tau/2$, où v est la vitesse de propagation de l'onde supposée égale à celle de la lumière.

Absence d'un l'avion : Le signal reçu $x(t)$ est fortement atténué et perturbé. La fonction d'intercorrélation ne présente aucun pic bien apparent.

Application à la détection d'un signal périodique noyé dans un bruit blanc

L'objectif est de détecter d'un signal est de savoir si ce signal existe ou non. Soit $s(t)$ un signal périodique de période inconnue. Le signal $x(t)$ à détecter est

$$x(t) = s(t) + b(t)$$

où $b(t)$ un bruit centré.

La fonction d'autocorrélation du signal $y(n)$ s'écrit :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{ss}(\tau) + \varphi_{sb}(\tau) + \varphi_{bs}(\tau) + \varphi_{bb}(\tau)$$

Si le bruit $b(t)$ est indépendant du signal $x(n)$, les fonctions d'intercorrélation $\varphi_{sb}(\tau)$ et $\varphi_{bs}(\tau)$ sont nulles pour tout k . Si de plus la densité spectrale du bruit est absolument continue, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_{bb}(\tau) = 0$$

D'où, $\varphi_{xx}(\tau) \rightarrow \varphi_{ss}(\tau)$ lorsque $\tau \rightarrow +\infty$

En calculant la fonction d'autocorrélation de $x(t)$, on va voir apparaître celle du signal périodique $s(t)$ aux grandes valeurs de τ .

Analyse spectrale

L'estimation spectrale ou analyse spectrale a pour but d'estimer la densité spectrale de puissance (PSD : power spectral density) $\Phi_{xx}(\omega)$ d'un signal aléatoire $x(t)$ à partir d'une réalisation de ce signal sur une fenêtre d'observation finie.

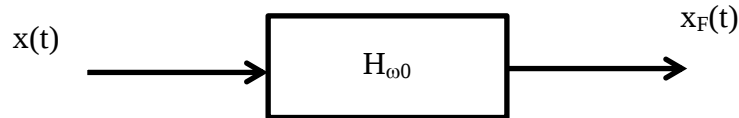
Filtrage

La densité spectrale de puissance représente la répartition de la puissance du signal en fonction de la fréquence. Une manière d'obtenir cette répartition de puissance consiste à appliquer le signal $x(t)$ à analyser à l'entrée d'un filtre sélectif H_{ω_0} centré sur la fréquence d'analyse ω_0 . La sortie $x_F(t)$ du filtre contient les composantes du signal appartenant à la bande passante du filtre. La puissance de $x_F(t)$ est

$$P_{XF} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_F(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{\omega_0}(f)|^2 \Phi_x(\omega) d\omega$$

Pour obtenir une estimation de la densité spectrale de $x(t)$, le gain complexe du filtre H_{ω_0} doit être une impulsion de Dirac dans le domaine fréquentiel $\delta(\omega - \omega_0)$ et donc une réponse impulsionnelle de durée infinie et non causale. En pratique, on utilise un filtre sélectif dont le

gain complexe est à largeur de bande finie. Cette contrainte conduira à une estimation biaisée de la densité spectrale de puissance.



Les méthodes d'estimation spectrales dites classiques utilisent la transformée de Fourier du signal ou sur la T.F. de sa fonction d'autocorrélation.

Supposons que l'on observe le signal $x(t)$ à travers une fenêtre d'observation finie $[-T/2, T/2]$. Le signal $x(t)$ tronqué sur $[-T/2, T/2]$ est noté $x_T(t)$.

Le périodogramme

C'est un estimateur de la densité spectrale de puissance qui consiste à calculer le module au carré de la T.F. de $X_T(t)$.

Cas continu :

$$\hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2$$

Cas discret :

$$\hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2$$

Pour le calcul numérique sur ordinateur, ω est discrétisée : $\omega = k \frac{2\pi}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$\hat{\Phi}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right|^2, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

Le périodogramme moyenné lissé

Une autre technique permettant d'améliorer les performances du périodogramme consiste à décomposer le signal observé $x(n)$, $n=0, \dots, N-1$ en L segments plus courts (M échantillons) qui peuvent se chevaucher entre-eux, calculer le periodogramme de chaque segment X_l puis calculer la moyenne des L periodogrammes :

$$\hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ \left| \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X_l(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \right\}$$

Ceci a pour effet de diviser la variance du périodogramme par un facteur L et diminuer la résolution spectrale du même facteur. Si on augmente M , on améliore la résolution spectrale.

On peut aussi combiner un moyennage des estimateurs avec un lissage des périodogrammes estimés sur chaque segment (périodogramme lissé moyenné).

Le corrélogramme

C'est un estimateur de la densité spectrale de puissance qui consiste à calculer la T.F. d'une estimée de la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.

Cas continu :

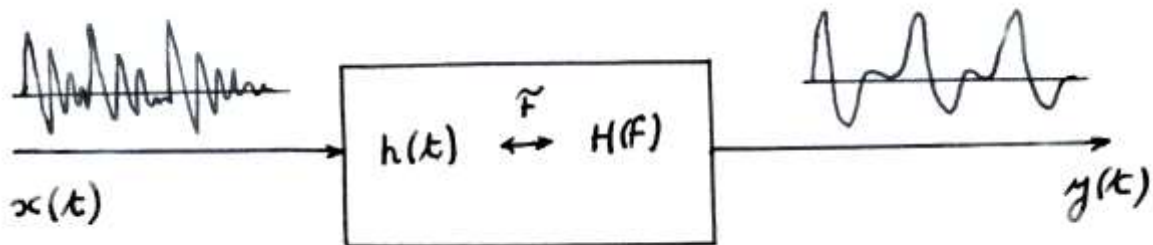
$$\hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right|$$

Cas discret :

$$\hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\phi}_{xx}(k) e^{-jn\omega} \right|$$

Identification de processus

L'identification de processus a pour objectif de déterminer l'opération mathématique subie par les grandeurs mises en jeu dans ce processus. Dans le cas d'un processus linéaire, c'est déterminer la fonction de transfert du système, ou sa réponse impulsionnelle.



Une technique très utilisée permettant de déterminer la réponse impulsionnelle d'un système à temps continu consiste à lui injecter un bruit blanc $x(t)$, de fonction d'autocorrélation :

$$\phi_{xx}(\tau) = n_0 \delta(\tau)$$

Il suffit d'intercorrélérer la sortie du système avec l'entrée :

$$\phi_{yx}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) * h(\tau) = n_0 h(\tau)$$

En prenant la TF des deux membres de l'équation, on obtient :

$$\Phi_{yx}(\omega) = \Phi_{xx}(\omega) H(\omega)$$

$$\text{Or } \Phi_{xx}(\omega) = TF[\phi_{xx}(\tau)] = TF[n_0 \delta(\tau)] = n_0$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{\Phi_{yx}(\omega)}{n_0}$$

Chapitre 2 : Les variables aléatoires

1. Rappels de probabilités

1.1 Espace probabilisé

1.1.1 Expérience aléatoire : c'est une expérience qui, répétée plusieurs fois de façon identique, conduit à des résultats imprévisibles.

Exemple : lancer d'un dé ou d'une pièce de monnaie

1.1.2 Evènement : fait qui peut être réalisé ou non lors d'une expérience aléatoire.

1.1.3 Epreuve : désigne une réalisation possible de l'expérience aléatoire.

1.1.4 Ensemble des épreuves : ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, on le dénote Ω .

Exemple : lancer d'un dé

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1.1.5 Définition axiomatique des probabilités

Définition : On appelle tribu un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω qui vérifie :

1. Ω et Φ sont dans $\mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$
3. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}$, la plus petite tribu engendrée à partir de tous les intervalles de la forme $]-\infty, x]$ ou de la forme $[a, b]$ est appelée la tribu de Borel. On la note $B(\mathbb{R})$ et ses éléments sont appelés les Boréliens. La définition se généralise au cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés évènements ou ensembles mesurables et le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est dit espace mesurable.

On définit une mesure de probabilité en associant à chaque évènement un nombre qui indique sa probabilité d'apparaître.

Définition : On appelle mesure de probabilité une application de la tribu $\mathcal{A}$ des évènements dans $[0, 1]$ qui vérifie :

1. $P(\Omega) = 1$ et $P(\Phi) = 0$
2. $\forall A \in \mathcal{A} \ P(A) \geq 0$

3. Si la suite d'évènements $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ vérifié $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall \quad i \neq j$ alors

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé ou espace de probabilité.

Exemple : lancer d'un dé

Soit l'évènement A « obtenir un nombre impair »

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$P(A) = 3/6 = 1/2$$

Quelques lois :

- Si A est un évènement, sa réalisation exclue la réalisation de l'évènement contraire de A.
- L'évènement Ω est toujours réalisé : évènement certain.
- L'évènement $\emptyset$ n'est jamais réalisé : évènement impossible.

1.2 Probabilité conditionnelle et indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux évènements appartenant à la tribu $\mathcal{A}$.

$P(A/B)$: probabilité de réalisation de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

Si $P(A/B) = P(A)$ on dit que les évènements A et B sont indépendants.

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Deux évènements A et B sont indépendants sont ssi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A/B) = 0$
- Si $B \subset A$ alors $P(A/B) = 1$

Exemple : Soit A l'évènement « obtenir un nombre pair » dans l'expérience de lancer de dé.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2\}$$

- Indépendance conjointe :

Les évènements de la suite $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ sont conjointement indépendants (indépendants dans leur ensemble) si pour toute suite de A, on a :

$$P(B_{k1} \cap B_{k2} \cap \dots \cap B_{kp}) = P(B_{k1})P(B_{k2}) \dots P(B_{kp})$$

où $B_m = A_m$ ou $B_m = \overline{A_m}$

Si les événements de la suite $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ sont indépendants dans leur ensemble alors ils sont indépendants deux à deux. La réciproque est fausse.

- **Formule des probabilités totales**

Soit B un événement $\in \mathcal{A}$. Pour toute partition finie ou dénombrable d'événement A_k de Ω , on a :

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = \sum_k P(B \cap A_k) = \sum_k P(B / A_k)P(A_k)$$

C'est la formule des probabilités totales.

- **Formule de Bayes**

$$P(A_k / B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \frac{P(B / A_k)P(A_k)}{\sum_j P(B / A_j)P(A_j)}$$

2. Variables aléatoires

2.1 Définition

Une variable aléatoire (v.a) X est une fonction (règle) qui assigne à chaque résultat ω d'une expérience aléatoire une valeur $X(\omega)$. On écrit la variable aléatoire X au lieu de $X(\omega)$.

Notation $X=x$

X : variable aléatoire

x : réalisation de la variable aléatoire

Exemple :

Lancer d'un dé. On définit la v.a comme suit :

$$X(\omega_i) = 2i$$

i : nombre de points de la face

ω_i	$X(\omega_i)$
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

2.2 Egalité de 2 variables aléatoires

Deux v.a X et Y sont presque sûrement égales si l'ensemble $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\}$ est de probabilité nulle.

2.3 Loi de probabilité

Soit X une v.a définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On appelle loi de probabilité de la v.a X (ou loi induite) la mesure définie pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$$

2.4 Fonction de répartition et densité de probabilité

On appelle fonction de répartition la fonction $F_X(x)$ définie par :

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) \text{ que l'on note } P(X \leq x)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Propriétés :

- $F_X(x)$ est non négative, non décroissante
- $F_X(x) \geq 0$
- Si $x_1 \leq x_2$ alors $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
- $F_X(x)$ est continue à droite : $\lim_{x \rightarrow a+} F_X(x) = F_X(a)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- Si $x_2 > x_1$: $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

Variable aléatoire discrète

Une v.a discrète X est une v.a à valeurs dans un ensemble fini ou au plus dénombrable de valeurs réelles :

$$X : \Omega \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$$

$$P_X(x_k) = P(\{\omega : X(\omega) = x_k\})$$

$$\forall k \quad P_X(x_k) \geq 0 \text{ et}$$

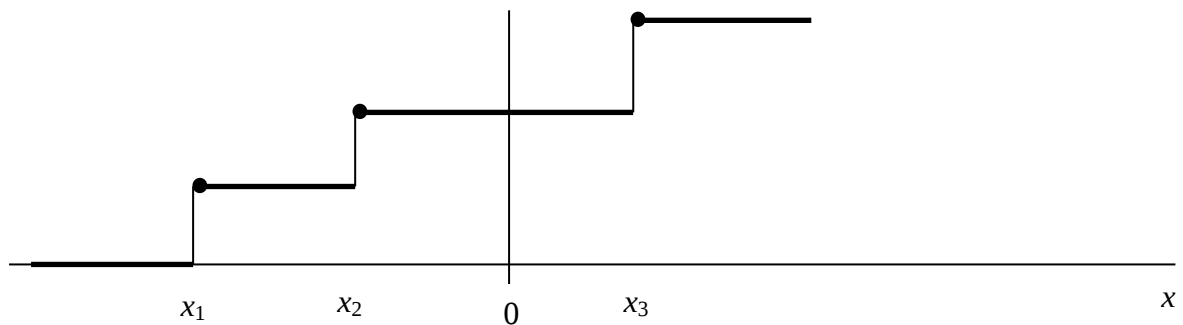
$$\sum_k P_X(x_k) = 1$$

La fonction de répartition d'une v.a discrète est de la forme :

$$F_X(x) = \sum_k 1_{]-\infty, x]}(x_k) P_X(x_k)$$

$$\text{Où } 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

La fonction de répartition d'une v.a discrète est une fonction en marche d'escalier qui présente un nombre fini ou au plus dénombrable de sauts. Ces sauts sont situés aux points x_k et on ont une hauteur égale à $P(x_k)$.



Variable aléatoire continue

Une v.a est continue s'il existe une fonction $f_X(x)$ non négative appelée fonction densité de probabilité (fdp) qui vérifie $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Propriétés de la fonction densité de probabilité

- $a < b \quad P(a < x \leq b) = \int_a^b f_X(u) du$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = P(X \leq x)$
- $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$
- $f_X(x) \geq 0$

Exemples

Distribution uniforme

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Distribution Gaussienne (normale) de paramètres μ et σ^2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2.5. Espérance et variance d'une v.a

2.5.1. Espérance

Cas continu

La valeur moyenne ou l'espérance mathématique d'une v.a continue X est définie par :

$$E[X] = \mu_X = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Exemple

Soit X une v.a uniformément distribuée dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_2 - x_1} & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

- Si $f_X(x)$ est paire alors $E[X]=0$
- Si $f_X(x)$ est symétrique par rapport à a alors $E[X]=a$

Cas discret

Pour une v.a discrète, l'intégrale peut être écrite sous forme d'une somme. Soit X une v.a discrète pouvant prendre les valeurs x_i avec des probabilités p_i .

$$E[X] = \sum_i x_i p_i \text{ avec } p_i = P(X=x_i)$$

Exemple

Si X prend les valeurs 1, 2, . . . , 6 avec des probabilités 1/6 alors

$$E[X] = \frac{1}{6}(1 + 2 + \dots + 6) = 3.5$$

Espérance d'une fonction de X

Soit X une v.a et soit g une fonction. On forme la v.a $Y=g(X)$. L'espérance de Y est donnée par :

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy$$

Théorème :

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Si X est une v.a discrète alors :

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i) p(X = x_i)$$

Variable aléatoire complexe

Si $Z=X+jY$ est une v.a complexe alors son espérance est donnée par :

$$E[Z]=E[X]+jE[Y]$$

Si $g(X)=g_1(X)+jg_2(X)$ est une fonction complexe de la v.a réelle X alors

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(X) f_X(x) dx + j \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(X) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X) f_X(X) dx$$

2.5.2. Variance

La variance d'une v.a X est définie par :

$$Var[X] = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$$

où $\mu_X = E[X]$ et σ_X est une constante positive appelée déviation standard ou écart type de X.

Exemple

Soit X une v.a normale

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Montrons que μ est la moyenne et que σ^2 est la variance.

$f_X(x-\mu) = f_X(x+\mu) \Rightarrow f_X(x)$ est symétrique par rapport à $\mu \Rightarrow \mu$ est la moyenne de $f_X(x)$.

$$\text{On a } \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

Dérivons les deux membres par rapport à σ , il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Multiplions les deux membres par $\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (x-\mu)^2 dx = \sigma^2$$

Cas discret

Soit X une v.a discrète. On a :

$$\sigma^2 = \sum_i p_i (x_i - \mu)^2, \quad p_i = P(X=x_i)$$

Exemple

Soit X une v.a discrète pouvant prendre les valeurs 1 et 0 avec les probabilités p et $q=1-p$, respectivement. X est appelée v.a de Bernoulli

$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

$$E[X^2] = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$$

$$\sigma^2 = E[X^2] - E^2[X] = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Exemple

Une v.a discrète ayant une distribution de Poisson de paramètre a prend les valeurs $0, 1, 2, \dots$ avec les probabilités :

$$P(X = k) = e^{-a} \frac{a^k}{k!}$$

Dérivons deux fois le développement de Taylor de e^a

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^{k-1}}{k!} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^k}{k!}$$

$$e^a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)a^{k-2}}{k!} = \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} - \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^k}{k!}$$

Donc :

$$E[X] = e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} = a$$

$$E[X^2] = e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} = a^2 + a$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = E[X^2] - E^2[X] = a$$

2.6. Moments

Le moment d'ordre n d'une v.a X est définie par :

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx$$

$$\text{Moments centrés : } \mu_n = E[(X - \mu_X)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^n f_X(x) dx$$

$$\text{Moments absolus : } E[|X|^n]$$

Moments absolus centrés: $E\left[|X - \mu_X|^n\right]$

Moments généralisés : $E\left[(X - a)^n\right]$

Moments généralisés absolus : $E\left[|X - a|^n\right]$

2.7. Fonction caractéristique

Cas continu

La fonction caractéristique d'une v.a continue est définie par :

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx$$

Cette fonction est maximale à l'origine

$$|\Phi(\omega)| \leq \Phi(0) = 1$$

Si on remplace $j\omega$ par s , il vient :

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{sx} dx : \text{Fonction moment d'ordre } s \text{ de } e^x$$

$\Psi(\omega) = \ln \Phi(\omega)$ est la seconde fonction caractéristique de X

$$\text{On a : } \Phi(\omega) = E\left[e^{j\omega x}\right] \quad \Phi(s) = E\left[e^{sx}\right]$$

Si $Y=aX+b$ alors $\Phi_Y(\omega) = e^{jb\omega} \Phi_X(a\omega)$

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{-j\omega x} d\omega$$

Théorème des moments

Si on dérive n fois $\Phi(s)$, on obtient :

$$\Phi^{(n)}(s) = E\left[X^n e^{sX}\right]$$

Si on pose $s=0$, il vient

$$\Phi^{(n)}(0) = E\left[X^n\right] = m_n$$

La dérivée de $\Phi(s)$ à l'origine est égale aux moments de X .

Cas discret

Soit X une v.a discrète pouvant prendre les valeurs x_i avec les probabilités p_i . La fonction caractéristique de X est donnée par :

$$\Phi(\omega) = \sum_i p_i e^{j\omega x_i}$$

2.8. Cas de deux variables aléatoires

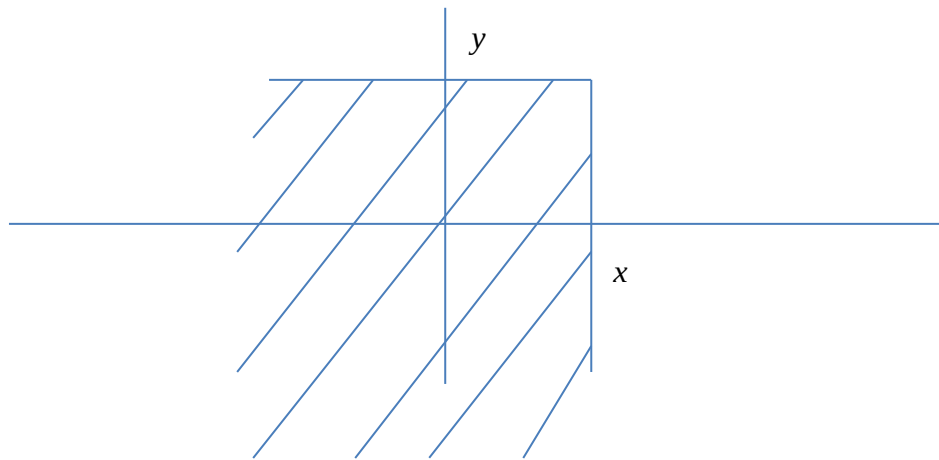
Etant donné deux v.a X et Y , on veut déterminer leurs statistiques conjointes, c.a.d la probabilité que le point (X, Y) soit à l'intérieur d'un domaine spécifié D du plan xy

2.8..1 Fonction de répartition conjointe

Soit X et Y deux v.a définies dans le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction de répartition conjointe $F_{XY}(x, y)$ est la probabilité de l'évènement

$$\{X \leq x, Y \leq y\} = \{(x, y) \in D\}$$

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$



Propriétés

- La fonction de répartition conjointe $F_{XY}(x, y)$ est telle que
 $F_{XY}(-\infty, y) = 0$ $F_{XY}(x, -\infty) = 0$ $F_{XY}(-\infty, -\infty) = 0$ $F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$
- Si $x_1 > x_2$ alors $F_{XY}(x_1, y) > F_{XY}(x_2, y)$
- Si $y_1 > y_2$ alors $F_{XY}(x, y_1) > F_{XY}(x, y_2)$
- $P(x_1 < X < x_2, Y \leq y) = F_{XY}(x_2, y) - F_{XY}(x_1, y)$
- $P(x \leq X, y_1 \leq Y \leq y_2) = F_{XY}(x, y_2) - F_{XY}(x, y_1)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$

2.8.2. Densité de probabilité conjointe

La fonction densité de probabilité conjointe de X et Y est définie par :

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Soit donc

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

2.8.3. Statistiques conjointes

La probabilité que le point $(x, y) \in D$ du plan XY est égale à l'intégrale de $f_{XY}(x, y)$ dans cette région :

$$P\{(x, y) \in D\} = \iint_D f_{XY}(x, y) dx dy$$

où $\{(x, y) \in D\}$ est l'évènement de tous les résultats tel que le point $(X(\omega), Y(\omega)) \in D$.

2.8.4. Statistiques marginales

Les statistiques de chaque v.a sont appelées statistiques marginales.

- $F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty)$
- $F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx$
- ou $f_X(x) = \frac{\partial F_{XY}(x, +\infty)}{\partial x}$ $f_Y(y) = \frac{\partial F_{XY}(+\infty, y)}{\partial y}$

2.8.5. Normalité conjointe

Deux v.a X et Y sont conjointement normales si leur densité de probabilité est donnée par :

$$f_{XY}(x, y) = A \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

Cette fonction est positive et son intégrale est égale à 1 si

$$A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}, \quad |r| < 1$$

$f_{XY}(x, y)$ est notée $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1, \sigma_2; r)$

μ_1 et μ_2 sont les moyennes de X et Y et σ_1^2 et σ_2^2 sont leurs variances et r est le coefficient de corrélation.

Les densités de probabilité marginales de X et Y sont données par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

- Si deux v.a. sont conjointement normales alors elles sont marginalement normales, l'inverse n'est pas vraie.
- Deux v.a. X et Y sont conjointement normales si la somme $aX+bY$ est normale pour tout a et b .

Cas discret

Soit X et Y deux v.a. discrètes pouvant prendre les valeurs x_i et y_k avec les probabilités respectives $P(X=x_i)=p_i$ $P(Y=y_k)=q_k$

Leurs statistiques conjointes peuvent être déterminées en fonction des probabilités conjointes $P(X=x_i, Y=y_k)=p_{ik}$

$$\text{On a : } \sum_i \sum_k p_{ik} = 1$$

La fonction de répartition conjointe s'écrit :

$$F_{XY}(x, y) = \sum_k \sum_n p_{kn} 1_{]-\infty, x]}(x_k) 1_{]-\infty, y]}(y_n)$$

Les probabilités marginales de X et Y sont données par :

$$P_X(k) = P(X = x_k) = \sum_n p_{kn}$$

$$P_Y(n) = P(Y = y_n) = \sum_k p_{kn}$$

2.8.6. Indépendance

Deux v.a X et Y sont dites statistiquement indépendantes si les évènements $\{x \in A\}$ et $\{y \in B\}$ sont indépendants :

$$P(\{x \in A, y \in B\}) = P(\{x \in A\})P(\{y \in B\})$$

Où A et B sont deux ensembles arbitraires de $\mathbb{R}$.

En appliquant la définition précédente sur l'évènement $\{X \leq x, Y \leq y\}$, on déduit que :

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

ou encore

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Si X et Y sont deux v.a de type discret et indépendantes alors $p_{ik} = p_i p_k$

Théorème :

Si les v.a X et Y sont indépendantes alors les v.a $Z = g(X)$ et $W = h(Y)$ sont aussi indépendantes.

2.9. Fonction de deux variables aléatoires

Etant donné deux v.a X et Y et une fonction $g(x, y)$, on forme la v.a $Z = g(X, Y)$. On peut exprimer les statistiques de Z en fonction de $g(x, y)$ et des statistiques de X et Y .

Soit z un nombre donné et soit D_z la région du plan XY tel que $g(x, y) \leq z$

$$\{Z \leq z\} = \{g(X, Y) \leq z\} = \{(X, Y) \in D_z\}$$

Donc :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\{(X, Y) \in D_z\}) = \iint_{D_z} f_{XY}(x, y) dx dy$$

2.10. Deux fonctions de deux variables aléatoires

Etant donné deux v.a X et Y et deux fonctions $g(x, y)$ et $h(x, y)$, on forme les v.a $Z = g(X, Y)$ et $W = h(X, Y)$. On peut exprimer les statistiques de Z et W en fonctions de $g(x, y)$, $h(x, y)$ et leurs statistiques conjointes.

Soit z et w deux nombres réels et dénotons par D_{zw} la région du plan xy tel que $g(x, y) \leq z$ et $h(x, y) \leq w$.

$$\{Z \leq z, W \leq w\} = \{(X, Y) \in D_{zw}\}$$

Soit donc :

$$F_{ZW}(z, w) = \iint_{D_{zw}} f_{XY}(x, y) dx dy = P(\{(x, y) \in D_{zw}\})$$

Densité conjointe

On veut déterminer la densité conjointe des v.a $Z=g(X, Y)$ et $W=h(X, Y)$

Théorème fondamental

Pour trouver $f_{ZW}(z, w)$, on résout le système

$$g(x, y)=z$$

$$h(x, y)=w$$

Dénotons par (x_n, y_n) les solutions réelles

$$g(x_n, y_n)=z \quad h(x_n, y_n)=w$$

On a :

$$f_{ZW}(z, w) = \frac{f_{XY}(x_1, y_1)}{|J(x_1, y_1)|} + \dots + \frac{f_{XY}(x_n, y_n)}{|J(x_n, y_n)|}$$

$$\text{Où } J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix}^{-1} \text{ est le Jacobien de la transformation.}$$

Transformation linéaire

$$Z=aX+bY \quad W=cX+dY$$

Si $ad-bc \neq 0$ alors le système précédent admet une seule solution :

$$x=Az+Bw \quad y=Cz+Dw$$

D'autre part $J(x, y)=ad-bc$, soit donc

$$f_{ZW}(z, w) = \frac{1}{|ad-bc|} f_{XY}(Az+Bw, Cz+Dw)$$

2.11. Moments et statistiques conditionnels

Moments conjoints

Etant donné deux v.a X et Y et une fonction $g(x, y)$, on forme la v.a $Z=g(X, Y)$. La moyenne de la v.a Z est donnée par :

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) dz$$

Théorème

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy$$

Si les v.a dont de type discret pouvant prendre les valeurs x_i et y_k avec les probabilités p_{ik} alors :

$$E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_k g(x_i, y_k) p_{ik}$$

Linéarité

$$E\left[\sum_{k=1}^n a_k g_k(X, Y)\right] = \sum_{k=1}^n a_k E[g_k(X, Y)]$$

En général $E[XY] \neq E[X]E[Y]$

Covariance

La covariance notée C ou C_{XY} de deux v.a X et Y est par définition :

$$C_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

où $\mu_X = E[X]$ et $\mu_Y = E[Y]$

Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation noté r ou r_{XY} de deux v.a X et Y est donné par

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

on montre que $|r_{XY}| \leq 1$, soit donc $|C_{XY}| \leq \sigma_X \sigma_Y$

Les v.a X , Y et $X - \mu_X$, $Y - \mu_Y$ ont les mêmes covariances et les mêmes coefficients de corrélation.

Deux v.a sont dites non corrélées si leur covariance est nulle :

$$C_{XY} = 0 \Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$$

Orthogonalité

Deux v.a sont dites orthogonales si $E[XY] = 0$

Notes

- Si X et Y sont non corrélées alors $(X-\mu_X)$ et $(Y-\mu_Y)$ sont orthogonales.
- Si X et Y sont non corrélées et $\mu_X=0$ ou $\mu_Y=0$ alors X et Y sont orthogonales.

Théorème

Si deux v.a sont indépendantes, c.a.d $f_{XY}(x, y)=f_X(x)f_Y(y)$, alors elles sont non corrélées.

Preuve

Il suffit de montrer que $E[XY]=E[X]E[Y]$

$$\text{On a } E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = E[X]E[Y]$$

- Si les v.a X et Y sont indépendantes alors les v.a $g(X)$ et $h(Y)$ sont aussi indépendantes :

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

- Si les v.a X et Y ne sont pas corrélées, elles ne sont pas nécessairement indépendantes. Cependant, pour les v.a normales, la non corrélation est équivalente à l'indépendance.
- Si X et Y sont conjointement normales et $r_{XY}=0$ alors $f_{XY}(x, y)=f_X(x)f_Y(y)$

Variance de la somme de deux v.a

Si $Z=X+Y$ alors $\mu_Z=\mu_X+\mu_Y$

$$\sigma_Z^2 = E[(Z - \mu_Z)^2] = E[(X - \mu_X + Y - \mu_Y)^2] = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2r_{XY}\sigma_X\sigma_Y$$

Si $r_{XY}=0$ alors $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$

Si deux v.a sont non corrélées alors la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances. Ceci est aussi valable si X et Y sont indépendants.

Moments

$$\text{La moyenne } m_{kr} = E[X^k Y^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^r f_{XY}(x, y) dx dy$$

du produit $X^k Y^r$ est par définition le moment conjoint des v.a X et Y d'ordre $n=k+r$.

$m_{10}=\mu_X$ et $m_{01}=\mu_Y$ sont les moments du premier ordre.

$m_{20}=E[X^2]$, $m_{11}=E[XY]$ et $m_{02}=E[Y^2]$ sont les moments du second ordre.

Les moments conjoints centrés sont les moments conjoints des v.a $X-\mu_X$ et $Y-\mu_Y$

$$\mu_{kr} = E[(X - \mu_X)^k (Y - \mu_Y)^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^k (y - \mu_Y)^r f_{XY}(x, y) dx dy$$

$$\mu_{10} = \mu_{01} = 0 \text{ et } \mu_{11} = C_{XY} \quad \mu_{20} = \sigma_X^2 \quad \mu_{02} = \sigma_Y^2$$

Les moments absolus et généralisés sont définis de manière similaire.

Fonction caractéristique conjointe

La fonction caractéristique conjointe des v.a X et Y est définie par :

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy$$

La fonction densité de probabilité conjointe est liée à la fonction caractéristique conjointe par :

$$f_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega_1, \omega_2) e^{-j(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2$$

On a : $\Phi(\omega_1, \omega_2) = E[e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)}]$

$\Psi(\omega_1, \omega_2) = \ln(\Phi(\omega_1, \omega_2))$ est la seconde fonction caractéristique conjointe de X et Y.

Les fonctions caractéristiques marginales $\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega x}]$ et $\Phi_Y(\omega) = E[e^{j\omega y}]$ peuvent être exprimées en fonction de leurs fonctions caractéristiques conjointes $\Phi(\omega_1, \omega_2)$.

$$\Phi_X(\omega) = \Phi(\omega, 0) \quad \Phi_Y(\omega) = \Phi(0, \omega)$$

Si $Z = aX + bY$ alors $\Phi_Z(\omega) = E[e^{j(aX + bY)\omega}] = \Phi(a\omega, b\omega)$

On a $\Phi_Z(1) = \Phi(a, b)$

Distributions conditionnelles

Les distributions conditionnelles peuvent être exprimées comme des probabilités conditionnelles :

$$F_Z(z/A) = P(Z \leq z/A) = \frac{P(Z \leq z, A)}{P(A)}$$

$$F_{ZW}(z, w/A) = P(Z \leq z, W \leq w/A) = \frac{P(Z \leq z, W \leq w, A)}{P(A)}$$

Densité de probabilité conditionnelle

On a : $f_Y(y/x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \quad f_X(x/y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$

Si les v.a X et Y sont indépendantes alors :

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad f_Y(y/x) = f_Y(y) \quad f_X(x/y) = f_X(x)$$

Théorème de Bayes et probabilités conditionnelles

On déduit de ce qui précède que

$$f_X(x/y) = \frac{f_Y(y/x) f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$\text{or } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx \text{ et } f_{XY}(x, y) = f_Y(y/x) f_X(x)$$

On déduit donc que :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y/x) f_X(x) dx$$

Et on obtient le théorème de Bayes pour les densités de probabilité :

$$f_X(x/y) = \frac{f_Y(y/x) f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y/x) f_X(x) dx}$$

Type discret

Supposons que les v.a X et Y sont de type discret.

$$P(X=x_i)=p_i \quad P(Y=y_k)=q_k$$

$$P(X=x_i, Y=y_k)=p_{ik}$$

$$p_i = \sum_k p_{ik} \quad q_k = \sum_i p_{ik}$$

$$\text{On a : } P(Y = y_k / X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ik}}{p_i}$$

2.12. Séquence de variables aléatoires

2.12.1. Concepts généraux

Un vecteur aléatoire $X=[X_1 X_2 \dots X_n]$ est un vecteur dont les composantes X_i sont des v.a.

La probabilité que X soit dans la région D d'un espace à n dimensions est :

$$P(X \in D) = \int_D f(X) dX \quad X=[X_1 X_2 \dots X_n]$$

La densité de probabilité conjointe des v.a est

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

La fonction de répartition conjointe est :

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

Si on remplace dans $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ certaines variables par ∞ , on obtient la fonction de répartition conjointe des autres variables. De même, si on intègre $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par rapport à certaines variables, on obtient la densité de probabilité conjointe du reste des variables.

Exemple

$$F(x_1, x_3) = F(x_1, +\infty, x_3, +\infty)$$

$$f(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_4 \quad (1)$$

2.12.2. Transformation

Etant donné k fonctions $g_1(X), g_2(X), \dots, g_k(X)$ $X=[X_1 X_2 \dots X_n]$

On forme les v.a

$$Y_1=g_1(X) \quad Y_2=g_2(X) \quad \dots, \quad Y_k=g_k(X)$$

Les statistiques de ces v.a peuvent être déterminées en fonction des statistiques de X . Si $k < n$ alors on peut déterminer les premières densités conjointes des n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$ et donc utiliser (1) pour éliminer les X . Si $k > n$ alors les v.a $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots, Y_k$ peuvent être exprimées en fonction de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$. Dans ce cas, les densités de $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots, Y_k$ peuvent être déterminées en fonction des densités conjointes de $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Supposons que $k=n$.

Pour trouver la densité de probabilité $f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ du vecteur $Y=[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ pour un ensemble de nombres $y_1, y_2, \dots, y_n$, on résout le système :

$$g_1(x)=y_1, g_2(x)=y_2, \dots, g_n(x)=y_n$$

Si le système n'admet pas de solution alors $f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)=0$

Si le système admet une solution unique alors :

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)}{|J(x_1, x_2, \dots, x_n)|}$$

$$\text{où } J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est le Jacobien de la transformation.

Si le système admet plusieurs solutions alors on additionne les termes correspondants comme dans le cas de 2 variables aléatoires.

Chapitre 3 : Les processus stochastiques

1. Définition

Un processus stochastique (P.S) est une règle qui assigne à chaque résultat ω (un élément de l'ensemble des épreuves) une fonction $X(t, \omega)$. Donc, c'est une famille de fonctions du temps dépendant du paramètre ω .

Le domaine de ω est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire et le domaine de t est l'ensemble des réels.

Chaque fonction du temps est une réalisation du P.S.

Notation : En général, on note processus stochastique $X(t)$ en omettant le paramètre ω .

Exemple :

Considérons l'expérience de lancer d'une pièce de monnaie. On définit le P.S $X(t)$ comme suit :

Si pile $X(t) = \cos(2\pi t)$

Si face $X(t) = t^2$

$X(t)$ possède les interprétations suivantes :

- Une famille de fonctions si t et ω sont variables
- Une v.a si t est fixe et ω variable
- Une fonction si t est variable et ω fixe
- Un nombre si t et ω sont fixes

2. Statistiques des P.S

Un P.S correspond à une infinité de v.a, une v.a pour chaque t . Si on fixe t , $X(t)$ est une v.a de fonction de répartition $F(x, t)$.

Statistiques d'ordre 1

Pour une valeur donnée de t , $X(t)$ est une v.a ayant pour fonction de répartition $F(x; t) = P(X(t) \leq x)$.

La fonction de répartition dépend de t , elle est égale à la probabilité de l'évènement $\{X(t) \leq x\}$ consistant en tous les évènements ω_i tel que à t donné, $X(t, \omega_i)$ ne dépasse pas x .

La fonction $F(x; t)$ est appelée la distribution du premier ordre et sa dérivée $f(x; t) = \frac{\partial F(x; t)}{\partial x}$ est la fonction densité de probabilité du premier ordre de $X(t)$.

Statistiques du second ordre

On effectue deux observations dans le temps (t_1, t_2) auxquelles correspondent deux v.a $X(t_1)$ et $X(t_2)$ qu'on peut définir leurs statistiques conjointes.

Fonction de répartition conjointe

$F(x_1, x_2; t_1, t_2)$: fonction de répartition conjointe ou distribution du second ordre de $X(t_1)$ et $X(t_2)$

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\})$$

$F(x_1, x_2; t_1, t_2)$ dépend de t_1 et t_2 .

La densité de probabilité conjointe est :

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Notons que $F(x_1; t_1) = F(x_1, +\infty; t_1, t_2)$

$$f(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2$$

Propriétés du second ordre

Espérance mathématique ou moyenne statistique

La moyenne statistique de $X(t)$ est l'espérance mathématique de la v.a $X(t)$:

$$\mu(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; t) dx$$

Elle représente la réalisation qui correspond à la moyenne des réalisations.

Autocorrélation

L'autocorrélation de $X(t)$ notée $R(t_1, t_2)$ est l'espérance du produit $X(t_1)X(t_2)$:

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

L'autocorrélation est une fonction non aléatoire qui représente l'interdépendance entre $X(t_1)$ et $X(t_2)$.

La fonction d'autocorrélation caractérise le degré de dépendance entre les v.a d'un P.S $X(t)$ pour différentes valeurs de t . La valeur de $R(t_1, t_2)$ en $t_1=t_2=t$ est la puissance moyenne de $X(t)$.

Autocovariance

L'autocovariance de $X(t)$ notée $C(t_1, t_2)$ est la covariance des v.a $X(t_1)$ et $X(t_2)$:

$$C(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))] = E[X(t_1)X(t_2)] - \mu(t_1)\mu(t_2) = R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2)$$

La valeur de l'autocovariance en $t_1=t_2=t$ est égale à la variance de $X(t)$:

$$C(t, t) = R(t, t) - \mu^2(t) = E[X^2(t)] - \mu^2(t) = \sigma^2(t)$$

La variance caractérise la dispersion des réalisations du P.S par rapport à la moyenne.

Formules générales

Pour tout processus complexe $X(t)$, on définit :

- Moyenne
 $\mu(t) = E[X(t)]$
- Autocorrélation
 $R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X^*(t_2)]$
- Autocovariance
 $C(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))^*] = R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu^*(t_2)$

Exemple

Soit le processus $X(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

a et b sont deux v.a indépendantes de moyennes nulles.

Calculons $E[X(t)]$ et $R(t_1, t_2)$

$$E[X(t)] = E[a\cos\omega t + b\sin\omega t] = E[a\cos\omega t] + E[b\sin\omega t] = E[a]\cos\omega t + E[b]\sin\omega t$$

Or $E[a] = E[b] = 0$, soit donc

$$E[X(t)] = 0$$

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(a\cos\omega t_1 + b\sin\omega t_1)(a\cos\omega t_2 + b\sin\omega t_2)]$$

$$= E[a^2]\cos\omega t_1 \cos\omega t_2 + E[ab]\cos\omega t_1 \sin\omega t_2 + E[ab]\sin\omega t_1 \cos\omega t_2 + E[b^2]\sin\omega t_1 \sin\omega t_2$$

Puisque a et b sont indépendantes et de moyennes nulles, il en résulte :

$$E[ab] = E[a]E[b] = 0$$

$$\sigma_a^2 = E[a^2] - E^2[a] = E[a^2]$$

$$\sigma_b^2 = E[b^2] - E^2[b] = E[b^2]$$

Soit donc :

$$R(t_1, t_2) = E[a^2] \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + E[b^2] \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 = \sigma_a^2 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + \sigma_b^2 \sin \omega t_1 \sin \omega t_2$$

Si en plus $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma^2$, il vient :

$$R(t_1, t_2) = \sigma^2 (\cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + \sin \omega t_1 \sin \omega t_2) = \sigma^2 \cos \omega(t_1 - t_2)$$

3. Processus spéciaux

Points de Poisson

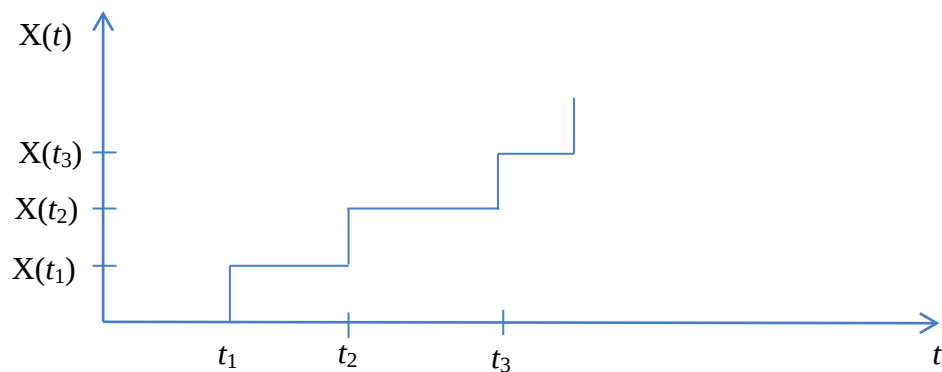
Les points de Poisson sont spécifiés par les propriétés suivantes :

1. Le nombre de points $n(t_1, t_2)$ dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ de longueur $t = t_2 - t_1$ est une variable aléatoire ayant une distribution de Poisson de paramètre λt

$$P(n(t_1, t_2) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} : \text{probabilité d'avoir } k \text{ points dans l'intervalle de longueur } t = t_2 - t_1$$

2. Si les intervalles $[t_1, t_2]$ et $[t_3, t_4]$ ne se chevauchent pas alors les v.a $n(t_1, t_2)$ et $n(t_3, t_4)$ sont indépendantes.

En utilisant les points de Poisson, on définit le P.S $X(t) = n(0, t)$



$X(t)$ est un P.S discret d'espérance :

$$E[X(t)] = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i P(X(t) = x_i)$$

Si X est une v.a discrète de Poisson de paramètre λ alors

$$E[X(t)] = \lambda \text{ et } \text{var}(X) = \sigma^2 = \lambda$$

$X(t)$ suit une distribution de Poisson de paramètre λt , donc

$$E[X(t)] = \lambda t \text{ et } \sigma^2(t) = \lambda t$$

Montrons que la fonction d'autocorrélation de $X(t)$ est égale à

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \leq t_2 \end{cases} \quad (*)$$

L'égalité est vérifiée pour $t_1 = t_2 = t$ puisque

$$E[X^2(t)] = \sigma^2(t) + E^2[X(t)] = \lambda t + \lambda^2 t^2$$

Puisque $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$, il suffit de prouver (*) pour $t_1 < t_2$

Les v.a $X(t_1)$ et $X(t_2) - X(t_1)$ sont indépendantes puisque les intervalles $[0, t_1]$ et $[t_1, t_2]$ ne se chevauchent pas. En plus, elles ont, respectivement, des distributions de Poisson de paramètres λt_1 et $\lambda(t_2 - t_1)$. Donc,

$$E[X(t_1)(X(t_2) - X(t_1))] = E[X(t_1)]E[X(t_2) - X(t_1)] = \lambda t_1 \lambda(t_2 - t_1)$$

En utilisant l'égalité :

$$X(t_1)X(t_2) = X(t_1)(X(t_1) + X(t_2) - X(t_1)) = X^2(t_1) + X(t_1)(X(t_2) - X(t_1))$$

On déduit de ce qui précède que

$$R(t_1, t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 \lambda(t_2 - t_1) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2$$

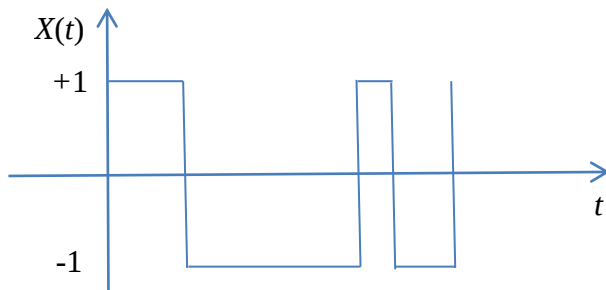
Signal télégraphique

A partir des points de Poisson, on forme le P.S $X(t)$ comme suit :

$X(t) = 1$ si le nombre de points dans l'intervalle $[0, t]$ est pair

$X(t) = -1$ si le nombre de points dans l'intervalle $[0, t]$ est impair

Calculons $E[X(t)]$ et $R(t_1, t_2)$



$$E[X(t)] = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i P(X(t) = x_i), \quad x_i = \pm 1$$

$$E[X(t)] = 1.P(X(t) = 1) + (-1).P(X(t) = -1)$$

Soit $P(k)$ la probabilité d'avoir k points dans l'intervalle $[0, t]$, $k=0, 1, \dots$

$$P(X(t)=1) = P(0) + P(2) + P(4) + \dots$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} + e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^2}{2!} + e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \dots \\ &= e^{-\lambda t} \left(\frac{(\lambda t)^0}{0!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \dots \right) = e^{-\lambda t} \cosh \lambda t \end{aligned}$$

$$P(X(t)=-1) = P(1) + P(3) + P(5) + \dots$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^1}{1!} + e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^3}{3!} + e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^5}{5!} + \dots \\ &= e^{-\lambda t} \left(\frac{(\lambda t)^1}{1!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \frac{(\lambda t)^5}{5!} + \dots \right) = e^{-\lambda t} \sinh \lambda t \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E[X(t)] = P(X(t)=1) - P(X(t)=-1) = e^{-\lambda t} \left(\frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} - \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2} \right) = e^{-2\lambda t}$$

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \sum_i \sum_j x_i x_j P(X(t_1)=x_i, X(t_2)=x_j)$$

$$x_i = \pm 1 \quad x_j = \pm 1$$

Les intervalles $[0, t_1]$ et $[0, t_2]$ se chevauchent, donc les v.a $X(t_1)$ et $X(t_2)$ ne sont pas indépendantes.

En utilisant, la formule des probabilités conditionnelles, on peut écrire :

$$P(X(t_1)=x_i, X(t_2)=x_j) = P(X(t_1)=x_i / X(t_2)=x_j) P(X(t_2)=x_j)$$

- $P(X(t_1)=1, X(t_2)=1) = P(X(t_1)=1 / X(t_2)=1) P(X(t_2)=1) = e^{-\lambda t} \cosh \lambda t e^{-\lambda t_2} \cosh \lambda t_2$
avec $t = |t_1 - t_2|$
- $P(X(t_1)=1, X(t_2)=-1) = P(X(t_1)=1 / X(t_2)=-1) P(X(t_2)=-1) = e^{-\lambda t} \sinh \lambda t e^{-\lambda t_2} \sinh \lambda t_2$
- $P(X(t_1)=-1, X(t_2)=1) = P(X(t_1)=-1 / X(t_2)=1) P(X(t_2)=1) = e^{-\lambda t} \sinh \lambda t e^{-\lambda t_2} \cosh \lambda t_2$
- $P(X(t_1)=-1, X(t_2)=-1) = P(X(t_1)=-1 / X(t_2)=-1) P(X(t_2)=-1) = e^{-\lambda t} \cosh \lambda t e^{-\lambda t_2} \sinh \lambda t_2$

$$\begin{aligned}
R(t_1, t_2) &= \sum_i \sum_j x_i x_j P(X(t_1) = x_i, X(t_2) = x_j) \\
&= e^{-\lambda t} \cosh \lambda t e^{-\lambda t_2} \cosh \lambda t_2 - e^{-\lambda t} \sinh \lambda t e^{-\lambda t_2} \sinh \lambda t_2 \\
&\quad - e^{-\lambda t} \sinh \lambda t e^{-\lambda t_2} \cosh \lambda t_2 + e^{-\lambda t} \cosh \lambda t e^{-\lambda t_2} \sinh \lambda t_2 \\
&= e^{-2\lambda t} = e^{-2\lambda |t_1 - t_2|}
\end{aligned}$$

Définitions

- Les propriétés d'un P.S réel sont complètement déterminées par la distribution $F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n)$.
- Les statistiques conjointes de deux P.S réels sont complètement spécifiés par les distributions conjointes des v.a $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n), Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n)$.
- Le P.S complexe $Z(t) = X(t) + jY(t)$ est spécifié par les statistiques conjointes des P.S $X(t)$ et $Y(t)$.
- Un P.S vectoriel (processus de dimension n) est une famille de n processus.

Propriétés des fonctions de corrélation et de covariance

L'autocorrélation d'un P.S $X(t)$ réel ou complexe est la moyenne de $X(t_1)X^*(t_2)$, elle est notée $R(t_1, t_2)$, $R_X(t_1, t_2)$ ou $R_{XX}(t_1, t_2)$:

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X^*(t_2)]$$

$$\text{On déduit que } R(t_2, t_1) = E[X(t_2)X^*(t_1)] = E\left[\left(X(t_1)X^*(t_2)\right)^*\right] = R^*(t_1, t_2)$$

$$R(t, t) = E\left[|X(t)|^2\right] \geq 0$$

La fonction d'autocorrélation est semi définie positive : $\sum_i \sum_j a_i a_j^* R(t_i, t_j) \geq 0$

En effet, on a :

$$E\left[\left|\sum_i a_i X(t_i)\right|^2\right] \geq 0 \Rightarrow E\left[\left(\sum_i a_i X(t_i)\right)\left(\sum_j a_j X(t_j)\right)^*\right] \geq 0$$

$$\text{D'où } \sum_i \sum_j a_i a_j^* E[X(t_i)X^*(t_j)] \geq 0$$

Soit donc $\sum_i \sum_j a_i a_j^* R(t_i, t_j) \geq 0$

L'inverse est aussi vrai, étant donné une fonction $R(t_1, t_2)$ définie positive, on peut trouver un P.S $X(t)$ qui a pour fonction d'autocorrélation $R(t_1, t_2)$.

L'autocovariance d'un P.S $X(t)$ est définie par :

$$C(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))^*] = E[X(t_1)X^*(t_2)] - \mu(t_1)\mu^*(t_2) = R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu^*(t_2)$$

Le rapport $r(t_1, t_2) = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1)C(t_2, t_2)}}$ est le coefficient de corrélation.

intercorrélation ou cross-corrélation

La fonction d'intercorrélation (corrélation croisée ou cross corrélation) de deux P.S $X(t)$ et $Y(t)$ est donnée par :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y^*(t_2)]$$

$$\text{On a } R_{YX}(t_2, t_1) = E[Y(t_2)X^*(t_1)] = E[X^*(t_1)Y(t_2)] = R_{XY}^*(t_1, t_2)$$

De même, la cross covariance de $X(t)$ et $Y(t)$ est donnée par :

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(Y(t_2) - \mu(t_2))^*] = R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y^*(t_2)$$

- Deux P.S $X(t)$ et $Y(t)$ sont dits orthogonaux si $R_{XY}(t_i, t_j) = 0 \forall t_i \neq t_j$.
- Deux P.S $X(t)$ et $Y(t)$ sont dits non corrélés si $C_{XY}(t_i, t_j) = 0 \forall t_i \neq t_j$.

Bruit blanc

Un P.S $V(t)$ est dit bruit blanc si les v.a $V(t_i)$ et $V(t_j)$ ne sont pas corrélées pour tout $t_i \neq t_j$:

$$C_V(t_i, t_j) = 0 \text{ pour tout } t_i \neq t_j$$

L'autocorrélation d'un bruit blanc peut se mettre sous la forme :

$$R(t_i, t_j) = \sigma^2 \delta(t_i - t_j), \quad \delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

4. Processus indépendants

Si les P.S $X(t)$ et $Y(t)$ sont tels que les v.a $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$; $Y(t_1'), Y(t_2'), \dots, Y(t_n')$ sont mutuellement indépendantes alors ils sont dits indépendants.

5. Processus normaux

Un P.S est dit normal si les v.a $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont conjointement normales pour tout $t_1, t_2, \dots, t_n$ et n .

6. Processus stationnaires

Un P.S $X(t)$ est dit stationnaire au sens strict si (S.S.S) si ses propriétés statistiques ne sont pas affectées par une translation dans le temps, c.a. $X(t)$ et $X(t+t_0)$ ont les mêmes statistiques.

La densité de probabilité d'un P.S S.S.S est telle que :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1+t_0, t_2+t_0, \dots, t_n+t_0) \quad \forall t_0$$

- Deux P.S $X(t)$ et $Y(t)$ sont dits conjointement stationnaires si les statistiques conjointes de $X(t)$ et $Y(t)$ sont les mêmes que celles de $X(t+t_0)$ et $Y(t+t_0)$ pour tout t_0 .
- Un P.S complexe $Z(t)=X(t)+jY(t)$ est stationnaire ssi $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement stationnaires.

Conséquences

- $f(x; t)=f(x; t+t_0)$ pour tout t_0
 $f(x; t)$ est indépendante de t , donc $E[X(t)]=\mu(t)=\mu=\text{constante}$
- $f(x_1, x_2; t_1, t_2)=f(x_1, x_2; t_1+t_0, t_2+t_0)$: la densité de probabilité d'ordre 2 dépend uniquement de $t=t_2-t_1$
 $f(x_1, x_2; t_1, t_2)=f(x_1, x_2; \tau), \quad \tau=t_2-t_1$

Stationnarité au sens large

Un P.S $X(t)$ est stationnaire au sens large (S.S.L) si la moyenne ne dépend pas du temps $E[X(t)]=\mu=\text{constante}$ et sa fonction d'autocorrélation dépend uniquement de $\tau=t_2-t_1$.

$$R(t_1, t_2)=R(\tau)=E[X(t+\tau)X^*(t)]$$

$R(\tau)$ peut être écrite sous une forme symétrique. Si on pose $t' = t + \frac{\tau}{2}$, il vient

$$R(\tau) = E \left[X \left(t' + \frac{\tau}{2} \right) X^* \left(t' - \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

$$\text{Soit donc : } R(\tau) = E \left[X \left(t + \frac{\tau}{2} \right) X^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

$$\text{En particulier, on a : } R(0) = E \left[|X(t)|^2 \right]$$

La puissance d'un P.S stationnaire est indépendante de t et elle est égale à $R(0)$.

Exemple

Soit $X(t)$ un P.S stationnaire au sens large ayant pour fonction d'autocorrélation $R(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$.

Calculons le moment d'ordre 2 de la v.a $X(6)-X(4)$.

$$\begin{aligned} E[(X(6) - X(4))^2] &= E[X^2(6)] + E[X^2(4)] - 2E[X(6)X(4)] = R(0) + R(0) - 2R(2) \\ &= A + A - 2Ae^{-2\alpha} = 2A(1 - e^{-2\alpha}) \end{aligned}$$

L'autocovariance d'un P.S $X(t)$ stationnaire au sens large dépend uniquement de $\tau=t_2-t_1$.

$$C(\tau) = R(\tau) - |\mu|^2$$

Son coefficient de corrélation est donné par

$$r(\tau) = \frac{c(\tau)}{c(0)}$$

Deux P.S $X(t)$ et $Y(t)$ sont dits conjointement stationnaires au sens large si leur cross-corrélation dépend uniquement de $\tau=t_2-t_1$:

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t+\tau)Y^*(t)]$$

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X \mu_Y^*$$

Si un processus est stationnaire au sens strict alors il est stationnaire au sens large, l'inverse n'est pas vrai en général.

Exemple

Soit le P.S $X(t)$ donné par $X(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, où a et b sont deux v.a.

Déterminons la condition nécessaire et suffisante de stationnarité de $X(t)$ et calculons sa fonction d'autocorrélation.

Si $X(t)$ est S.S.L alors $E[X(t)]$ ne dépend pas du temps :

$$E[X(t)] = E[a\cos\omega t + b\sin\omega t] = E[a]\cos\omega t + E[b]\sin\omega t$$

$E[X(t)]$ ne dépend pas de t si $E[a]=E[b]=0$, donc a et b sont de moyennes nulles.

$$\text{On a } E[|X(t)|^2] = R(0)$$

En particulier, pour $t=0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$, il vient :

$$E\left[|X(0)|^2\right] = E\left[\left|X\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right|^2\right]$$

Or $X(0)=a$ et $X\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)=b$, ce qui donne

$$E[a^2]=E[b^2]=\sigma^2$$

$$\begin{aligned} E[X(t+\tau)X(t)] &= E\left[a^2 \cos \omega(t+\tau) \cos \omega t + ab \cos \omega(t+\tau) \sin \omega t + ab \sin \omega(t+\tau) \cos \omega t \right. \\ &\quad \left. + b^2 \sin \omega(t+\tau) \sin \omega t\right] \\ &= E[a^2] \cos \omega(t+\tau) \cos \omega t + E[b^2] \sin \omega(t+\tau) \sin \omega t + E[ab](\cos \omega(t+\tau) \sin \omega t + \sin \omega(t+\tau) \cos \omega t) \\ &= \sigma^2 \cos \omega \tau + E[ab] \sin \omega(2t + \tau) \end{aligned}$$

$E[X(t+\tau)X(t)]$ ne dépend pas de t si $E[ab]=0$, dans ce cas $R(\tau) = \sigma^2 \cos \omega \tau$

Exemple

Etant donné une v.a ω de densité de probabilité $f(\omega)$ et une v.a φ uniformément distribuée dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et indépendante de ω . On forme le P.S $X(t)=a \cos(\omega t + \varphi)$

Montrons que $X(t)$ est stationnaire au sens large de moyenne nulle et d'autocorrélation

$$R(\tau) = \frac{a^2}{2} E[\cos \omega \tau]$$

$$E[X(t)] = E[a \cos(\omega t + \varphi)] = E[a \cos \omega t \cos \varphi - a \sin \omega t \sin \varphi]$$

$$= a E[\cos \omega t] E[\cos \varphi] - a E[\sin \omega t] E[\sin \varphi]$$

$$E[\cos \varphi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$E[\sin \varphi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$$

Soit donc $E[X(t)]=0$

$$R(\tau) = E[a \cos(\omega(t+\tau) + \varphi) a \cos(\omega t + \varphi)]$$

$$= \frac{a^2}{2} (E[\cos \omega \tau + \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)])$$

$$= \frac{a^2}{2} (E[\cos \omega \tau] + E[\cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi)]) = \frac{a^2}{2} E[\cos \omega \tau]$$

7. Cyclo-stationnarité

Un P.S $X(t)$ est dit cyclo-stationnaire ou périodiquement stationnaire si ses statistiques sont invariantes à une translation de l'origine temporelle pour des multiples entiers de la constante T . La fonction de répartition de $X(t)$ satisfait :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + mT, t_2 + mT, \dots, t_n + mT) \text{ pour tout entier } m$$

8. Ergodicité

Définition

Un P.S stationnaire $X(t)$ est ergodique si ses moyennes statistiques sont égales aux moyennes temporelles, c.a.d toutes ses statistiques peuvent être déterminées à partir d'une seule réalisation.

Ergodicité dans la moyenne

Etant donné un P.S $X(t)$ de moyenne constante $E[X(t)] = \mu$, on forme la moyenne temporelle

$$\mu_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad (1)$$

Le P.S $X(t)$ est dit ergodique au sens de la moyenne si avec une probabilité égale à 1

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T = \mu \quad (2)$$

μ_T est une v.a de moyenne

$$E[\mu_T] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X(t)] dt = \mu$$

Soit σ_T^2 la variance de μ_T . On déduit que l'égalité (2) est vérifiée ssi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_T^2 = 0$$

Théorème

Un P.S $X(t)$ est ergodique au sens de la moyenne ssi son autocovariance $C(t_1, t_2)$ est telle que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0$$

Preuve

Ceci découle de l'égalité $\sigma_T^2 = \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1, t_2) dt_1 dt_2$

Ergodicité dans l'autocorrélation

On veut déterminer l'autocorrélation $R(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)]$ d'un P.S $X(t)$ stationnaire à partir d'une seule réalisation.

On forme le processus $Z_\tau(t) = X(t+\tau)X(t)$

On a $E[Z_\tau(t)] = R(\tau)$, donc pour déterminer $R(\tau)$, il suffit d'appliquer les résultats précédents en substituant $Z_\tau(t)$ pour $X(t)$.

Le P.S $X(t)$ est dit ergodique au sens de l'autocorrélation si le P.S correspondant $Z_\tau(t)$ est ergodique au sens de la moyenne, c.a.d si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_T(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t+\tau)X(t)dt = R(\tau)$$

Chapitre 4 : La densité spectrale de puissance

1. Définition

La densité spectrale de puissance ou spectre de puissance (DSP) $S_{XX}(\omega)$ d'un P.S $X(t)$ stationnaire est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

L'estimation spectrale est l'ensemble des méthodes d'estimation de la DSP.

La fonction d'autocorrélation est donnée par la transformée de Fourier inverse de la DSP :

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

La puissance moyenne est obtenue en posant $\tau=0$:

$$P_X = R_{XX}(0) = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega$$

La DSP montre la distribution de la puissance par unité de fréquence.

2. Estimation de la densité spectrale de puissance

Supposons qu'on dispose d'une réalisation $X(t)$ d'un P.S mais seulement sur l'intervalle $[-T, T]$:

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t) & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

La fonction d'autocorrélation temporelle de $X_T(t)$ peut être déterminée par :

$$\begin{aligned} R_T(\tau) &= \frac{1}{2T} X_T(\tau) * X_T(-\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) X_T(t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) X_T(t+\tau) dt \end{aligned} \quad (1)$$

où $*$ dénote la convolution

Soit finalement :

$$R_T(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-|\tau|} X(t)X(t+|\tau|)dt \quad |\tau| < 2T$$

$$= 0 \quad |\tau| > 2T$$

$X_T(t)$ est une réalisation d'un P.S, donc $R_T(\tau)$ est une grandeur aléatoire dont la moyenne est :

$$E[R_T(\tau)] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-|\tau|} E[X(t)X(t+|\tau|)]dt = \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_{XX}(\tau) \quad |\tau| < 2T$$

$$= 0 \quad |\tau| > 2T$$

où $R_{XX}(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation du P.S $X(t)$

Si le P.S est ergodique au sens de l'autocorrélation, la variance de $R_T(\tau)$ tend vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$ et $R_T(\tau)$ fournit une estimation de $R_{XX}(\tau)$ pour T suffisamment grand

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_T(\tau) = R_{XX}(\tau)$$

Considérons la transformée de Fourier de $R_T(\tau)$:

$$S_T(\omega) = \int_{-2T}^{2T} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

En appliquant la propriété de la convolution à (1), on obtient :

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2T} |\tilde{X}_T(\omega)|^2$$

où $\tilde{X}_T(\omega)$ est la transformée de Fourier de $X_T(t)$.

$$\tilde{X}_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt$$

La grandeur aléatoire $S_T(\omega)$ est appelée periodogramme. Sa moyenne

$$E[S_T(\omega)] = \int_{-2T}^{2T} E[R_T(\tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

est égale à la densité spectrale de puissance si la durée d'enregistrement T tend vers l'infini :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[S_T(\omega)] = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{|X_T(\omega)|^2}{2T}\right] = S_{XX}(\omega) \quad (2)$$

C'est le théorème de Wiener-Khinchine. De (2), on déduit que $S_{XX}(\omega)$ est une fonction non négative.

Généralement, la variance de $S_T(\omega)$ ne tend pas vers 0 et par conséquent, $S_T(\omega)$ n'est pas une estimation satisfaisante de $S_{XX}(\omega)$ même si T tend vers l'infini.

3. Densité spectrale de puissance mutuelle

La densité spectrale de puissance mutuelle ou cross densité spectrale de puissance de deux P.S conjointement stationnaires est la transformée de Fourier de leur fonction de cross corrélation :

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

où $R_{XY}(\tau) = E[X(t+\tau)Y^*(t)]$

On montre que $S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{\tilde{X}_T(\omega)\tilde{Y}_T^*(\omega)}{2T}\right]$

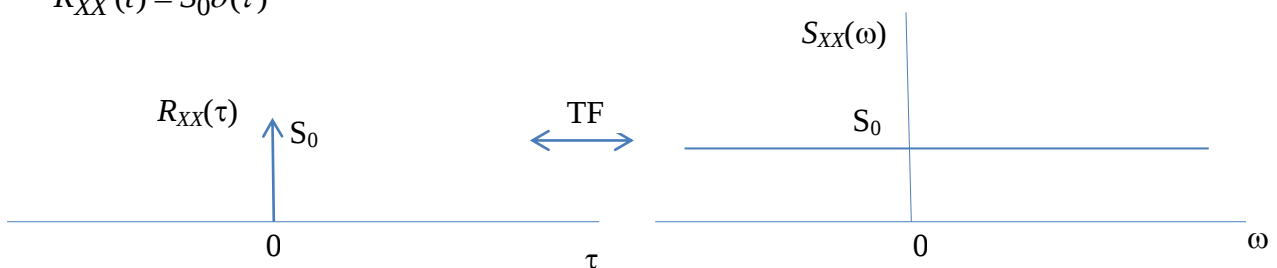
4. Bruit blanc

Un bruit blanc est un P.S dont la densité spectrale de puissance est constante

$$S_{XX}(\omega) = S_0 \quad -\infty < \omega < \infty$$

La fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc est une impulsion de Dirac :

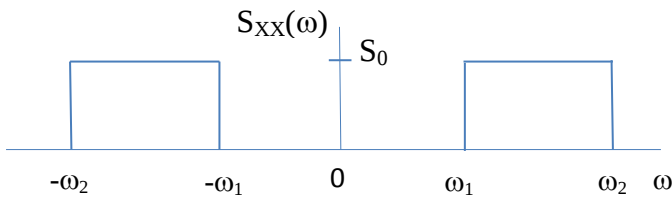
$$R_{XX}(\tau) = S_0 \delta(\tau)$$



Les v.a $X(t)$ et $X(t+\tau)$ sont non corrélées pour toute valeur non nulle de τ . Un tel processus est irréalisable parce que la puissance moyenne $E[X^2(t)] = R_{XX}(0)$ est infinie.

Un bruit blanc à bande limitée appelé bruit coloré est un processus dans la densité spectrale de puissance est constante dans une bande et nulle à l'extérieur de cette bande :

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} S_0 & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



La puissance moyenne est

$$P_X = R_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = \frac{S_0 B}{\pi}$$

où B est la largeur de bande : $B = \omega_2 - \omega_1$

La fonction d'autocorrélation est

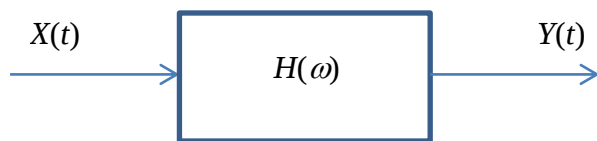
$$R_{XX}(\tau) = \frac{2S_0}{\pi\tau} \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \tau\right)$$

Si le spectre est de type passe bas, c.a.d $\omega_1=0$, $\omega_2=B$, il vient

$$R_{XX}(\tau) = \frac{2S_0}{\pi\tau} \sin(B\tau)$$

5. Application aux systèmes linéaires

Si un signal aléatoire stationnaire est appliqué à un système linéaire invariant dans le temps, le signal de sortie est aussi aléatoire et stationnaire.



$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

La moyenne du signal de sortie est

$$\mu_Y = E[Y(t)] = E[X(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) d\alpha = H(0) \mu_X$$

La fonction de corrélation mutuelle entre l'entrée et la sortie est

$$\begin{aligned} R_{YX}(\tau) &= E[Y(t+\tau)X^*(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X^*(t)X(t+\tau-\alpha)]h(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha \\ &= R_{XX}(\tau) * h(\tau) \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation de la sortie est

$$\begin{aligned} R_{YY}(\tau) &= E[Y(t+\tau)Y^*(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[Y(t+\tau)X^*(t-\alpha)]h^*(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(\tau+\alpha)h^*(\alpha)d\alpha \\ &= R_{YX}(\tau) * h^*(-\tau) \end{aligned}$$

En substituant $R_{YX}(\tau)$, il vient

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \quad (3)$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de (3), on obtient :

$$S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega)H(\omega)H^*(\omega) = S_{XX}(\omega)|H(\omega)|^2$$

La puissance totale du signal de sortie est :

$$P_Y = R_{YY}(0) = E[Y^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega$$