Chapitre N°4
Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

IV.1. Introduction

Ce chapitre concerne l´étude des systèmes oscillatoires à deux degrés de liberté, dont leurs oscillations étudiées sont libres et sont caractérisées par deux coordonnées généralisées indépendantes (deux degrés de liberté). Les systèmes à deux degrés de liberté sont constitués de deux systèmes à un degré de liberté couplés. Il existe trois types de couplage : par élasticité, par inertie et couplage visqueux.

IV.2. Equations différentielles des oscillations libres

Les vibrations d´un système à deux degrés de liberté sont décrites par les deux coordonnées généralisées $\boldsymbol{q_1(t)}$ et $\boldsymbol{q_2(t)}$, qui vérifient les équations différentielles linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \mu_{11}\ddot{q}_1 + \beta_{11}\dot{q}_1 + \kappa_{11}q_1 + \mu_{12}\ddot{q}_2 + \beta_{12}\dot{q}_2 + \kappa_{12}q_2 = 0 \\ \mu_{22}\ddot{q}_2 + \beta_{22}\dot{q}_2 + \kappa_{22}q_2 + \mu_{21}\ddot{q}_1 + \beta_{21}\dot{q}_1 + \kappa_{21}q_1 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

Ou :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = a_1 q_2 + b_1\dot{q}_2 + c_1\,\ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = a_2 q_1 + b_2\dot{q}_1 + c_2\,\ddot{q}_1 \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

IV.3. Types de couplages

IV.3.1 Couplage par élasticité

- Equations différentielles :

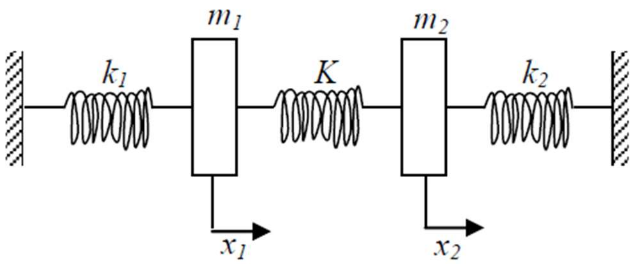
Le couplage par élasticité ou couplage élastique est possible grâce à un ressort (systèmes mécaniques) ou par une capacité (systèmes électriques).

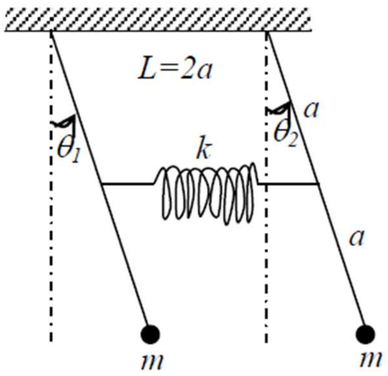
Dans ce cas $\boldsymbol{b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = 0,}$ les équations différentielles (2) s´écrivent donc sous la forme:

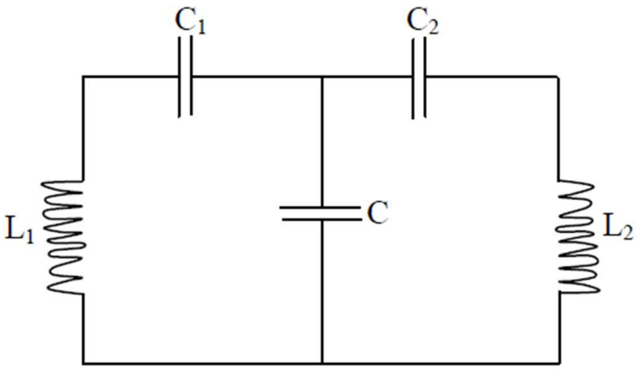
I. BOUTANA-HAFSAOUI

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = a_1 q_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = a_2 q_1 \end{cases} \qquad (3)$$

- Exemples :







IV.3.2 Couplage par inertie

- Equations différentielles :

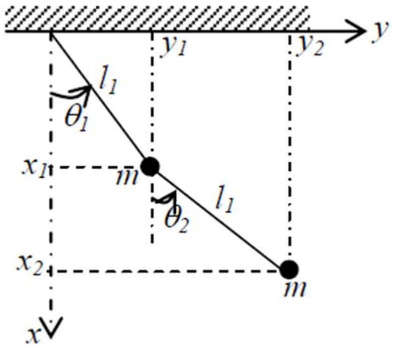
Le couplage par inertie ou couplage inertiel est à travers une masse (systèmes mécaniques) ou une bobine (systèmes électriques).

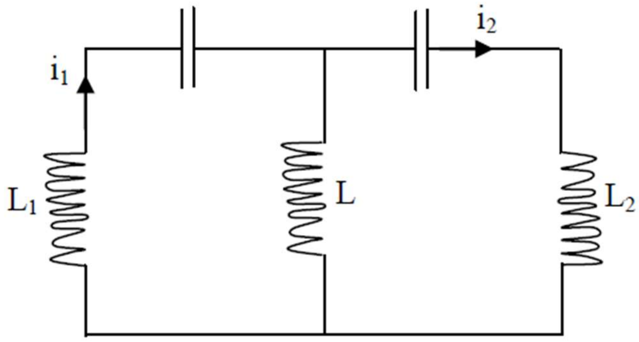
Dans ce cas $a_1 = c_1 = a_2 = c_2 = 0$, les équations différentielles (2) s´écrivent donc sous la forme:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = c_1\, \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = c_2\, \ddot{q}_1 \end{cases} \qquad (4)$$

hafsaoui@univ-jijel.dz

- Exemples :





IV.3.3 Couplage visqueux

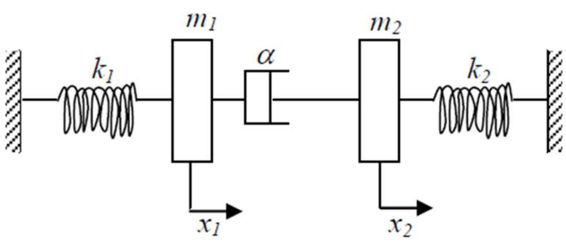
- Equations différentielles :

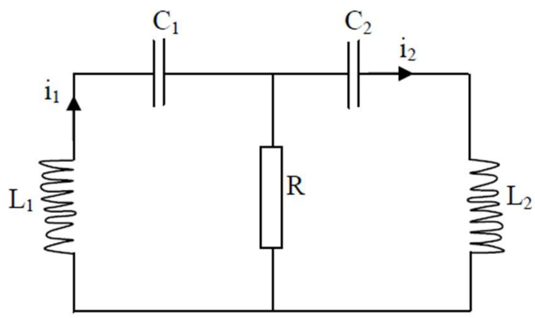
Le couplage visqueux est à travers un amortisseur (systèmes mécaniques) ou une résistance (systèmes électriques).

Dans ce cas $\boldsymbol{a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0,}$ les équations différentielles (2) s´écrivent donc sous la forme:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = b_1\dot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = b_2\dot{q}_1 \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

- Exemples :





IV.4. Oscillations libres non amorties des systèmes à deux degrés de liberté

❖ Cas de couplage par élasticité

Le système d´équations qui régit les oscillations libres non amorties des systèmes à deux degrés de liberté avec couplage élastique est de la forme :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = a_1 q_2 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = a_2 q_1 \end{cases} \quad (6)$$

Afin de résoudre ce système d´équations (6), nous cherchons des solutions sous la forme sinusoïdale :

$$q_1(t) = A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$$

$$q_2(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi_2)$$

A_1, A_2, φ_1 et φ_2 sont des constantes et $\boldsymbol{\omega}$ est l´une des pulsations propres du système**.**

En remplaçant dans le système d´équations (6), nous obtenons :

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2)A_1 - a_1 A_2 = 0 \\ -a_2 A_1 + (\omega_2^2 - \Omega^2)A_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

C'est un système d'équations linéaires homogènes dont les inconnus sont A_1 et A_2.

Le déterminant $\Delta(\Omega)$ du système s´écrit :

$$\Delta(\Omega) = \begin{vmatrix} \omega_1^2 - \Omega^2 & -a_1 \\ -a_2 & \omega_2^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} \quad (8)$$

- $\Delta(\Omega) \neq 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = 0 \Rightarrow$ Le système est en équilibre.
- Pour que le système (7) admette des solutions, $\Delta(\Omega)$ doit être nul :

$$\Delta(\Omega) = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\Omega^2 - a_1 a_2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0 \quad (9)$$

L´équation (9) est l´équation des pulsations propres, qui admet deux racines Ω_1 et Ω_2 qui sont les pulsations propres du système :

$$\begin{cases} \Omega_1^2 = \frac{\omega_1^2+\omega_2^2-\sqrt{\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)^2+4a_1a_2}}{2} \\ \Omega_2^2 = \frac{\omega_1^2+\omega_2^2+\sqrt{\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)^2+4a_1a_2}}{2} \end{cases} \quad (10)$$

Les oscillations avec ces pulsations propres sont appelées les modes propres.

$$\begin{cases} q_1(t) = A_{11}\cos(\Omega_1 t+\varphi_1) + A_{12}\cos(\Omega_2 t+\varphi_2) \\ q_2(t) = A_{21}\cos(\Omega_1 t+\varphi_1) + A_{22}\cos(\Omega_2 t+\varphi_2) \end{cases} \quad (11)$$

- Les modes propres :
  - Si $A_{12} = A_{22} = 0$ **:** Le système oscille dans le **1er mode** $\Omega = \Omega_1$**.**

$$\begin{cases} q_{11}(t) = A_{11}\cos(\Omega_1 t+\varphi_1) \\ q_{21}(t) = A_{21}\cos(\Omega_1 t+\varphi_1) \end{cases} \quad (12)$$

Avec : $A_{11} = \left[\frac{a_1}{\omega_1^2-\Omega^2}\right]A_{21}$

  - Si $A_{11} = A_{21} = 0$ **:** Le système oscille dans le **2eme mode** $\Omega = \Omega_2$**.**

$$\begin{cases} q_{12}(t) = A_{12}\cos(\Omega_2 t+\varphi_2) \\ q_{22}(t) = A_{22}\cos(\Omega_2 t+\varphi_2) \end{cases} \quad (13)$$

Avec : $A_{12} = \left[\frac{a_1}{\Omega^2-\omega_2^2}\right]A_{22}$

La solution générale est la combinaison linéaire des deux solutions particulières :

$$\begin{cases} q_1(t) = A_{11}\cos(\Omega_1 t+\varphi_1) + A_{12}\cos(\Omega_2 t+\varphi_2) \\ q_2(t) = \left[\frac{\omega_1^2-\Omega^2}{a_1}\right]A_{11}\cos(\Omega_1 t+\varphi_1) + \left[\frac{\Omega^2-\omega_2^2}{a_1}\right]A_{12}\cos(\Omega_2 t+\varphi_2) \end{cases} \quad (14)$$

Les constantes A_{11}, A_{12}, φ_1 et φ_2 sont déterminées à partir des conditions initiales.

IV.5. Oscillations libres amorties des systèmes à deux degrés de liberté

Le système d´équations qui régit les oscillations libres amorties des systèmes à deux degrés de liberté est de la forme :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = a_1 q_2 + b_1\dot{q}_2 + c_1\,\ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = a_2 q_1 + b_2\dot{q}_1 + c_2\,\ddot{q}_1 \end{cases} \tag{15}$$

❖ **Couplage par élasticité**

Si nous considérons un système symétrique avec couplage élastique, les équations différentielles deviennent sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta\dot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = a\,q_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta\dot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 = a\,q_1 \end{cases} \tag{16}$$

Nous posons $q_1(t) = A_1\,e^{rt}$ $q_2(t) = A_2\,e^{rt}$

En remplaçant dans le système **(16)**, nous trouvons :

$$\begin{cases} (r^2 + 2\delta r + \omega_0^2)A_1 - a\,A_2 = 0 \\ -a\,A_1 + (r^2 + 2\delta r + \omega_0^2)A_2 = 0 \end{cases} \tag{17}$$

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad (r^2 + 2\delta r + \omega_0^2)^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = \pm a$$

- **1er** mode propre : $r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = a \qquad r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 - a = 0$

Trois cas sont possibles suivant le signe de $\Delta' = \delta^2 - (\omega_0^2 - a)$

➢ $\Delta' > 0$ **:** Deux racines réelles $r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - (\omega_0^2 - a)}$

$$\begin{cases} q_{11}(t) = A_{11}\,e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - (\omega_0^2 - a)}\right)t} + B_{11}\,e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - (\omega_0^2 - a)}\right)t} \\ q_{21}(t) = C_{21}\,e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - (\omega_0^2 - a)}\right)t} + D_{21}\,e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - (\omega_0^2 - a)}\right)t} \end{cases} \tag{18}$$

➢ $\Delta' = 0$ **:** Racine double $r_1 = r_2 = -\delta$

$$\begin{cases} q_{11}(t) = (A_1 + B_1 t)\,e^{-\delta t} \\ q_{21}(t) = (C_1 + D_1 t)\,e^{-\delta t} \end{cases} \tag{19}$$

- $\boldsymbol{\Delta' < 0}$ **:** Deux racines complexes $\boldsymbol{r_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{(\omega_0^2 - a) - \delta^2}}$

$$\begin{cases} q_{11}(t) \ = A_1\, e^{-\delta t} \cos\left[\left(\sqrt{(\omega_0^2 - a) - \delta^2}\right)\, t + \varphi_{11}\right] \\ q_{21}(t) \ = B_1\, e^{-\delta t} \cos\left[\left(\sqrt{(\omega_0^2 - a) - \delta^2}\right)\, t + \varphi_{21}\right] \end{cases} \qquad \textbf{(20)}$$

- **2eme** mode propre : $\boldsymbol{r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = -a} \quad \boldsymbol{r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 + a = 0}$

Trois cas sont possibles suivant le signe de $\boldsymbol{\Delta' = \delta^2 - (\omega_0^2 + a)}$

- $\boldsymbol{\Delta' > 0}$ **:** Deux racines réelles $\boldsymbol{r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - (\omega_0^2 + a)}}$

$$\begin{cases} q_{12}(t) \ = A_{12}\, e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - (\omega_0^2 + a)}\right)t} + B_{12}\, e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - (\omega_0^2 + a)}\right)t} \\ q_{22}(t) \ = C_{22}\, e^{\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 - (\omega_0^2 + a)}\right)t} + D_{22}\, e^{\left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - (\omega_0^2 + a)}\right)t} \end{cases} \qquad \textbf{(21)}$$

- $\boldsymbol{\Delta' = 0}$ **:** Racine double $\boldsymbol{r_1 = r_2 = -\delta}$

$$\begin{cases} q_{12}(t) \ = (A_2 + B_2 t)\, e^{-\delta t} \\ q_{22}(t) \ = (C_2 + D_2 t)\, e^{-\delta t} \end{cases} \qquad \textbf{(22)}$$

- $\boldsymbol{\Delta' < 0}$ **:** Deux racines complexes $\boldsymbol{r_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{(\omega_0^2 + a) - \delta^2}}$

$$\begin{cases} q_{12}(t) \ = A_2\, e^{-\delta t} \cos\left[\left(\sqrt{(\omega_0^2 + a) - \delta^2}\right)\, t + \varphi_{21}\right] \\ q_{22}(t) \ = B_2\, e^{-\delta t} \cos\left[\left(\sqrt{(\omega_0^2 + a) - \delta^2}\right)\, t + \varphi_{22}\right] \end{cases} \qquad \textbf{(23)}$$

La solution totale est :

$$\begin{cases} q_1(t) = q_{11}(t) + q_{12}(t) \\ q_2(t) = q_{21}(t) + q_{22}(t) \end{cases}$$

hafsaoui@univ-jijel.dz