Chapitre I : Calcul des erreurs

I. INTRODUCTION

Une partie importante de l'analyse numérique consiste à contenir quelques effets des erreurs qui proviennent de trois sources principales :

- Les erreurs de modélisation.
- Les erreurs de représentation sur ordinateur.
- Les erreurs de troncature.

Les erreurs de modélisation, comme son nom l'indique, proviennent de l'étape de mathématisation du phénomène physique auquel on s'intéresse. La seconde catégorie d'erreurs est liée à l'utilisation de l'ordinateur provient d'abord des erreurs d'arrondi sur les données, puis des opérations effectuées sur les données. Il devrait donc permettre au lecteur de mieux gérer les erreurs au sein des processus numériques afin d'être en mesure de mieux interpréter les résultats. Enfin, les erreurs de troncature qui proviennent principalement de l'utilisation de développement de Taylor, qui permet de remplacer une équation différentielle par une équation algébrique.

II. Erreurs Absolues et Relatives

II.1 Notion d'erreur : soit x une quantité exacte et $\bar{x}$ une valeur approchée de x. On définit l'erreur E par la relation :

$$E = x - \bar{x}$$

II.2 Erreur absolue : on appel erreur absolue E_a, d'un nombre la valeur absolue de E :

$$E_a = |E| = |x - \bar{x}|$$

E_a : Erreur toujours positive $E_a > 0$

II.3 Majorant de l'erreur absolue : c'est tout nombre Δx tel que :

$$E_a = |x - \bar{x}| \leq \Delta x$$

$$|x-\bar{x}| \le \Delta x \Rightarrow \begin{cases} x-\bar{x} \le \Delta x \\ \\ -(x-\bar{x}) \le \Delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \Delta x + \bar{x} \\ \\ -x+\bar{x} \le \Delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \bar{x} + \Delta x \\ \\ x \ge \bar{x} - \Delta x \end{cases}$$

Donc : $\bar{x}-\Delta x \le x \le \bar{x}+\Delta x$ ou bien $x \in [\bar{x}-\Delta x, \bar{x}+\Delta x]$

***Exemple* :** $3.14 \le \pi \le 3.142 \Rightarrow \Delta\pi = 0.002$.

De cette définition, nous remarquant que seulement la connaissance d'un majorant Δx nous permet de déterminer un intervalle de longueur $2\Delta x$ centré en $\bar{x}$ à l'intérieur duquel on est sure de trouver x. On note parfois : $x = \bar{x} \pm \Delta x$

Ceci signifie qu'on à estimé la valeur exacte de x à partir de $\bar{x}$ avec une incertitude de Δx de part et d'autre.

II.4 Erreur relative: L'erreur relative E_r d'un nombre approché $\bar{x}$ est donnée sous la forme suivante :

$$E_r = \frac{E_a}{|x|} = \frac{|x-\bar{x}|}{|x|}$$

Exemple : quelle est la plus cohérente : 4652.8 ± 0.5 ou bien 0.0098 ± 0.5

$$4652.8 \pm 0.5 \Rightarrow E_r = \frac{0.5}{4652.8} = 1.07\ 10^{-4}$$

$$0.0098 \pm 0.5 \Rightarrow E_r = \frac{0.5}{0.0098} = 51.02$$

Une erreur absolue de 0.5 sur 4652.8 est petite, mais elle est grande sur 0.0098, ce qui signifie que l'erreur absolue ne suffit pas pour caractériser le degré de précision. Pour cela, on introduit la notion de l'erreur relative (relative par rapport à la quantité approximée).

III. Représentation décimale des nombres approchés

On sait que tout nombre réel positif x peut être représenté sous la forme d'une représentation décimale de développement limité ou illimité :

$$x = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \cdots$$

Avec $a_i \in \{0,1,2,\dots,9\}, i \neq m$ et $a_m \neq 0$ où m est le rang supérieur de x (la plus grande puissance de 10).

Exemple : $6405{,}3070 = 6.10^3 + 4.10^2 + 0.10^1 + 5.10^0 + 3.10^{-1} + 0.10^{-2} + 7.10^{-3} + 0.10^{-4}$.

III.1 Chiffre significatif (c.s)

On appelle chiffre significatif d'un nombre approché, tout chiffre dans sa représentation décimale différent de zéro, et un zéro s'il se trouve entre deux chiffres significatifs, ou s'il constitue un chiffre conservé. Les zéro placés à gauche du premier c.s ne sont pas significatifs.

Exemple :

$$x = 0.\underbrace{00}_{1}8\underbrace{00}_{2}3\underbrace{00}_{3}$$

Les zéro de 2 et 3 sont significatifs et ceux de 1 ne le sont pas donc le nombre des chiffres signicatif est 6.

III.2 Chiffre signicatif exact (c.s.e)

Soit x un nombre exact, $\bar{x}$ une valeur approchée de x dont sa représentation décimale (prise de gauche à droite) est :

$$\bar{x} = \underbrace{a_m}_{1^{er}cs} 10^m + \underbrace{a_{m-1}}_{2^{eme}cs} 10^{m-1} + \cdots + \underbrace{a_{m-n+1}}_{n^{eme}cs} 10^{m-n+1} + a_{m-n} \underbrace{10^{m-n}}_{rang\ du\ (n+1)^{eme}cs} + \cdots$$
$$+ a_k 10^k, a_m \neq 0, k \in \mathbb{Z}$$

On dit que les n premiers $c.s$ d'un nombre $\bar{x}$ sont exacts si l'erreur absolue vérifie :

$$\Delta x \leq 0.5 \times 10^{m-n+1}$$

Si un chiffre significatif est exact, tous ceux à sa gauche le sont également.

Exemple :

$x = 46{,}97\ et\ \bar{x} = 47{,}00 = 4.10^1 + 7.10^0 + 0.10^{-1} + 0.10^{-2}$

$m = 1\ et\ \Delta x = |46{,}97 - 47{,}00| \approx 0{,}3 \times 10^{-1} < 0{,}5 \times 10^{-1}$

$m - n + 1 = -1\ alors\ n = 3$

Ainsi, $\bar{x}$ est une approximation de x avec 3 c.s.exacts, c'est-à-dire : $\bar{x} = 47{,}0$.

IV. Règles d'arrondissement

IV.1 Problème : on souhaite calculer la circonférence d'un cercle avec :

d : Diamètre du cercle qui est égale à 12.5 cm.

La circonférence d'un cercle est donnée par l'expression suivante **:** $C = \pi \cdot d$

Si on effectue ce calcul par la calculatrice, nous obtenons :

$$C = \pi \cdot d = 39.26990817\ Cm$$

Le résultat contient trop de chiffres, qui n'on pas vraiment une signification physique. Pour cela il faut rapporter à cette valeur un nombre de chiffres limités lié à la précision donnée ou bien choisies d'où la notion du chiffre significatif CS.

IV.2 Règles d'arrondissement

1. Lorsque le chiffre de rang le plus élevé qu'on laisse tomber est supérieur à 5, le chiffre précédent est augmenté d'une unité. Exemple 38.58 avec trois chiffres significatif s'arrondit à 38.6

2. Lorsque le chiffre de rang le plus élevé qu'on laisse tomber est inferieur à 5, le chiffre précédent est inchangé**.** Exemple : 25.672 avec Quatre chiffres significatif s'arrondit à 25.67

3. Si le chiffre de rang le plus élevé qu'on laisse tomber est un 5 terminal (qui n'est pas suivi d'aucun chiffre) ou qui n'est suivi que de zéro, on augmente d'une unité le dernier chiffre du nombre arrondi s'il est impair sinon on le laisse inchangé. Exemple : 97.35 avec trois chiffres significatif s'arrondit à 97.4 (Car 3 est Impaire) et 97.45 avec trois chiffres significatifs s'arrondit à 97.4 (Car 4 est paire).

V. Opération sur les erreurs

Soient x et y deux quantités exactes, $E_a(x)$ et $E_a(y)$ des erreurs absolues sur x et y respectivement, $E_r(x)$ et $E_r(y)$ des erreurs relatives sur x et y respectivement.

V.1 Erreur d'une somme (différence) :

$$x \pm y \Rightarrow \begin{cases} E_a(x \pm y) = E_a(x) + E_a(y) \\ E_r(x \pm y) = \dfrac{|E_a(x) + E_a(y)|}{|x \pm y|} \end{cases}$$

V.2 Erreur d'un produit :

$$x \cdot y \Rightarrow \begin{cases} E_a(x \cdot y) = |y| \cdot E_a(x) + |x| \cdot E_a(y) \\ E_r(x \cdot y) = \dfrac{|x| \cdot E_a(y) + |y| \cdot E_a(x)}{|x \cdot y|} = \dfrac{E_a(x)}{|x|} + \dfrac{E_a(y)}{|y|} \end{cases}$$

V.3 Erreur d'une division :

$$\frac{x}{y} \Rightarrow \begin{cases} E_a(\frac{x}{y}) = \dfrac{|x| \cdot E_a(y) + |y| \cdot E_a(x)}{|y|^2} \\ E_r(\frac{x}{y}) == \dfrac{E_a(x)}{|x|} + \dfrac{E_a(y)}{|y|} \end{cases}$$

VI. Formule générale de l'erreur

Il s'agit de trouver l'erreur d'une fonction $f(x)$ quand on remplace les arguments x_i par des valeurs dont on connaît les majorants des erreurs.

Supposons $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ soit dérivable et soit $\Delta(x_i)$ les majorants des erreurs des arguments x_i, on peut écrire :

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i|$$

Exemple : Calculer un majorant de l'erreur absolue et relative de u tel que $u = \frac{5xy^2}{z^3}$

avec $x = y = z = 1$ et $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.001$

$$\Delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| |\Delta y| + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| |\Delta z|$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{5y^2}{z^3}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{10xy}{z^3}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{15xy^2}{z^4}$$

Donc les erreurs absolues et relatives seront alors :

$E_a(u) = \Delta u = 0.03$

$E_r(u) = \frac{\Delta u}{u} = \frac{0.03}{5} = 0.006 = 0.6\%$.