CHAPITRE II. Résolution des équations non linéaires f(x)=0

I. Introduction

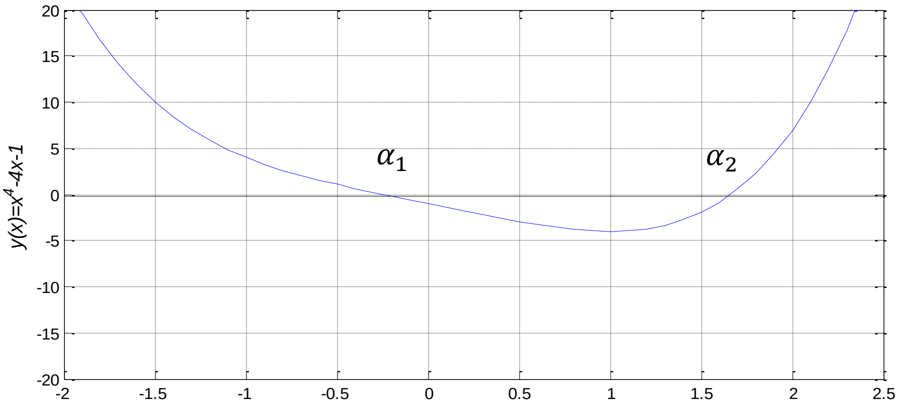
L'objectif de ce chapitre est de comparer différentes méthodes de résolution d'équations non linéaires du type $f(x)=0$. Notons que lorsque l'expression de $f(x)$ est compliquée, les méthodes analytiques deviennent pratiquement inutilisable, pour cela on doit recouvrir à des méthodes numériques qui sont avérés très efficaces.

II. Méthodes de résolution d'équations non linéaires

II.1 Méthode graphique

Soit à résoudre l'équation $f(x) = x^4 - 4x - 1$.

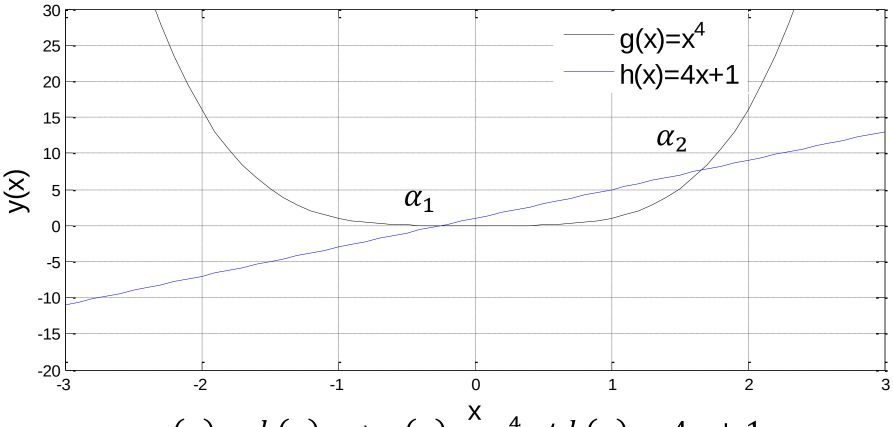
Dans ce cas les racines $f(x) = 0$ représentent les points d'intersections du graphe de $f(x)$ avec l'axe $x'ox$ donc, il suffit de tracer le graphe de $f(x)$ et de déterminer les points d'intersections.



Nous avons deux intersections de la courbe de $f(x)$ avec l'axe des abscisses donc deux racines sont envisagées $\alpha_1 \in [-1,0]$, $\alpha_2 \in [1,2]$.

Dans le cas où $f(x)$ est compliquée, on utilise la séparation des racines basée sur la transformation de l'équation $f(x) = 0$ à une équation équivalente $g(x) = h(x)$ avec $g(x)$ et $h(x)$ deux fonctions plus simples. Les racines sont à l'intersection entre les deux graphes de $g(x)$ et de $h(x)$.

Pour notre exemple on aurait pu transformer $f(x) = 0$ en deux fonctions plus simples.
En effet $x^4 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 4x + 1 \Rightarrow g(x) = x^4 \; et \; h(x) = 4x + 1$ d'où le graphe et les solutions qui correspondent aux intersections des deux courbes.



$$g(x) = h(x) \implies g(x) = x^4 \; et \; h(x) = 4x + 1$$

Nous avons deux intersections entre la courbe de $g(x)$ et $h(x)$ donc deux racines sont envisagées $\alpha_1 \in [-1,0]$, $\alpha_2 \in [1,2]$.

II.2 Méthode de Bissection (Dichotomie)

Le principe de la méthode de la bissection repose sur la version suivante du Théorème des Valeurs Intermédiaires.

II.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Ce théorème affirme qu'il existe au moins une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$. Si f est monotone sur l'intervalle $[a, b]$ (strictement croissante ou strictement décroissante), alors la racine α est unique sur l'intervalle $[a, b]$.

II.2.2 Principe de la méthode

Considérons f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que f admet une seule racine $\alpha \in]a, b[$ et que $f(a).f(b) < 0$.

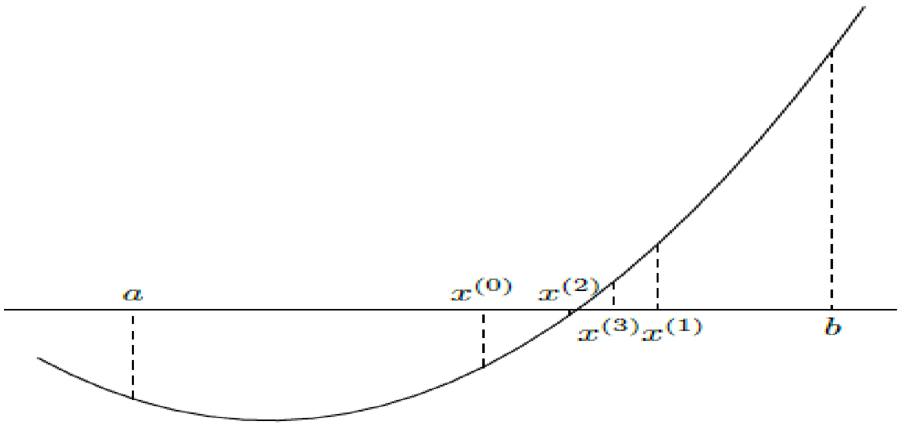
On pose $a_0 = a, b_0 = b$. Il existe une solution $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_0, b_0]$.

1. Si $f(x_0) = 0$ alors $x_0 = \alpha$ est la racine de f et le problème est résolu.
2. Si $f(x_0) \neq 0$, nous regardons le signe de $f(a_0).f(x_0)$.
   - Si $f(a_0).f(x_0) < 0$, alors la racine $\alpha \in]a_0, x_0[$
   - Si $f(x_0).f(b_0) < 0$, alors la racine $\alpha \in]x_0, b_0[$.

On recommence ce processus sur l'intervalle $[a_1, b_1]$, avec $a_1 = a_0, b_1 = x_0$ dans le premier cas, et $a_1 = x_0, b_1 = b_0$ dans le second cas.

On construit par récurrence sur n les suites $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ et $(x_n)_{n\in N}$ de la manière suivante sur l'intervalle $[a, b]$ telles que $a_0 = a, b_0 = b$ $\forall n \in$ N,

- $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$
- Si $f(a_n).f(x_n) < 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$,
  ou Si $f(x_n).f(b_n) < 0$, alors $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$.



II.2.3 Convergence de la méthode de dichotomie

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, vérifiant $f(a).f(b) < 0$, et $\alpha \in]a, b[$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

Si l'algorithme de dichotomie arrive jusqu'à l'étape n alors on a l'estimation :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, la suite (x_n) converge vers α. Il ressort de cette proposition que la méthode de dichotomie converge de manière certaine : c'est une méthode globalement convergente.

II.2.4 Test d'arrêt

Pour que la valeur de x_n de la suite à la $n^{éme}$ itération soit une valeur approchée de α à $\varepsilon > 0$ prés, il suffit que n vérifie : $\varepsilon \geq \frac{b-a}{2^{n+1}}$. On a alors

$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$ ce qui permet de calculer à l'avance le nombre maximal d'itérations assurant la précision ε.

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1.$$

II.2.5 Avantages et inconvénients de la méthode de Bissection

II.2.5.1 Avantages

- Elle converge toujours.
- Pour une précision donnée ε, on connaît à l'avance le nombre d'itérations nécessaires en fonction de ε que l'on désire sur l'approximation de la solution.
- Simple car elle ne demande que le calcul du signe de la fonction f .

II.2.5.2 Inconvénients

- Convergence lente (seulement linéaire).
- On a qu'une seule racine dans l'intervalle $[a, b]$.

Exemple :

On considère la fonction $f(x) = x\,2^x - 1$

1- Montrer que f possède une racine α sur $[0,1]$.

2- Montrer que cette racine est unique sur [0 ,1]

3- Utiliser la méthode de dichotomie pour calculer la racine avec précision 10^{-2}.

Solution :

1- f est continu sur $[0,1]$ (f continu sur R). $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc $f(0)f(1) < 0$ alors $\exists\ \alpha \in\ ]0,1[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

2- L'unicité de la solution :

$f'(x) = 2^x(x\, ln(2) + 1) > 0$ alors f est monotone (strictement croissante) cela donne que la solution est unique $\exists\alpha \in [0, 1]$.

D'après (1) et (2) la méthode de la dichotomie est applicable sur cette intervalle.

3- Application de la méthode de Dichotomie pour calculer la racine avec précision $\varepsilon = 10^{-2}$:

Nous allons construire les suites $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$

$a_0 = 0\,, b_0 = 1\,, x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5, f(0.5) = -0.2929$

Si $f(x_0)f(b_0) = f(0.5)f(1) < 0 \Rightarrow\ \alpha \in]0.5, 1[$.

$a_1 = x_0 = 0.5\,, b_1 = b_0 = 1\,, x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{1+0.5}{2} = 0.75, f(0.75) = 0{,}2613.$

Si $f(a_1).f(x_1) = f(0.5).f(0.75) < 0 \Rightarrow\ \alpha \in]0.5, 0.75[$.

$a_2 = a_1 = 0.5\,, b_2 = x_1 = 0.75\,, x_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625, f(0.625) = -0.0361.$

Si $f(x_2).f(b_2) = f(0.625).f(0.75) < 0 \Rightarrow \alpha \in]0.625, 0.75[$

$a_3 = x_2 = 0.625\,, b_3 = b_2 = 0.75\,, x_3 = \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{0.625+0.75}{2} = 0.6875,\ f(0.6875) = 0.1072.$

Si $(a_3).f(x_3) = f(0.625).f(0.6875) < 0 \Rightarrow \alpha \in]0.625, 0.6875[$.

$a_4 = a_3 = 0.625\,, b_4 = x_3 = 0.6875\,, x_4 = \frac{a_4+b_4}{2} = \frac{0.625+0.6875}{2} = 0.6562,\ f(0.6562) = 0.0341.$

Si $f(a_4).f(x_4) = f(0.625\,).f(0.6562) < 0 \Rightarrow \alpha \in]0.625\,, 0.6562[$

$a_5 = a_4 = 0.625\,, b_5 = x_4 = 0.6562\,, x_5 = \frac{a_5+b_5}{2} = \frac{0.625+0.6562}{2} = 0.6406,\ f(0.6406) = -0.0013.$

Si $f(x_5).f(b_5) = f(0.6406).f(0.6562) < 0 \Rightarrow \alpha \in]0.6406, 0.6562[$

$a_6 = x_5 = 0.6406\,, b_6 = b_5 = 0.6562\,, x_6 = \frac{a_6+b_6}{2} = \frac{0.6406+0.6562}{2} = 0.6484,$

$f(0.6484) = 0.016.$

Si $(a_6).f(x_6) = f(0.6406\,).f(0.6484) < 0 \Rightarrow \alpha \in]0.6406\ \ , 0.6484[$.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que nous atteignons la racine avec une précision donnée.

Pour calculer le nombre d'itérations nécessaire pour avoir la solution avec une précision $\varepsilon = 10^{-2}$, nous utilisons la formule : $n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{1-0}{10^{-2}}\right)}{\ln(2)} - 1 \geq \frac{2\ln(10)}{\ln(2)} - 1 \geq 5.6439 \approx 6$$

Il faut effectuer $n = 6$ itérations en utilisant la méthode de Dichotomie pour avoir la racine avec une précision $\varepsilon = 10^{-2}$.

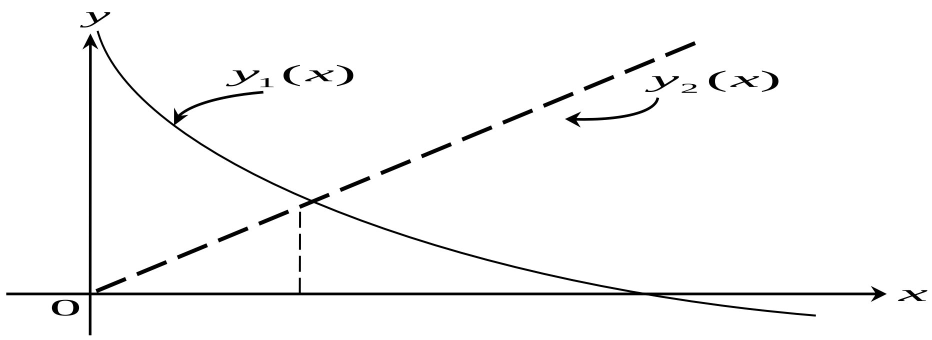
II.3 Méthode du point fixe

Soit $g(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $[a,b]$, alors tout points qui reste invariant pour cette fonction c'est-à-dire $x = g(x)$ est appelé point fixe.

II.3.1 Interprétation géométrique de la méthode du point fixe

Le principe de la méthode du point fixe consiste à transformer l'équation $f(x) = 0$ en une équation équivalente $x = g(x)$.

La racine est obtenue quand $x = g(x)$ $(y_1(x) = g(x)\ et\ y_2(x) = x)$ que signifie géométriquement que c'est le point d'intersection des courbes $y_1(x)$ et $y_2(x)$.



II.3.2 Principe de la méthode du point fixe

La méthode du point fixe consiste à calculer une racine approchée de la fonction $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$. Pour cela on suit les étapes suivantes :

1. Transformer l'équation $f(x) = 0$ sous la forme équivalente $x = g(x)$.

2. Générer la suite des nombres $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ par $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 1,2,......$ en partant d'une approximation grossière x_0 de la racine exacte.

3. prendre la valeur x_{n+1} comme valeur rapprochée de la racine exacte lorsque n est suffisamment grand.

II.3.3 Théorème du point fixe

Soit $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une fonction contractante de rapport k alors g admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$. De plus, pour tout choix de $x_0 \in [a, b]$, la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n), \forall\, n \in N$ converge vers α quand $n \longrightarrow +\infty$.

II.3.4 Convergence de la méthode du point fixe

Soit $g(x)$ une fonction réelle, définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ telle que :

1. $\forall x \in [a, b],\ g([a, b]) \subset [a, b]$
2. $\exists k \in R,\ 0 < k < 1\ \ tel\ que\ |g'(x)| \leq k < 1, k = \max\limits_{[a,b]} |g'(x)|$. On dit que $g(x)$ est strictement contracte.

Alors $g(x)$ admet un unique point fixe dans $[a, b]$ et la suite récurrente :

$\begin{cases} x_0 \in [a, b] choisi \\ x_{n+1} = g(x_n), \forall\, n \in \mathrm{N} \end{cases}$ converge vers l'unique point fixe α de g sur $[a, b]$.

II.3.5 Estimation de l'erreur

Le nombre minimum d'itérations pour que la solution soit approchée avec une précision ε est : $|x_n - \alpha| < \varepsilon$

Sachant que $|x_n - \alpha| \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1-k}$

Donc $n > \frac{ln\left[\frac{(1-k)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right]}{ln\,(k)}, k = \max\limits_{[a,b]} |g'(x)|$

Exemple : Ecrire un processus itératif $(x_n)_{n\in \mathrm{N}}$ du point fixe définie par la fonction d'itération suivante : $f(x) = x(1 + e^x) - e^x$

1. Montrer que cette équation admet une racine unique α dans l'intervalle $[0,1]$.

2. Proposer une itération de point fixe pour la fonction $f(x)$.

3. Montrer que la méthode du point fixe converge vers la solution α.

Solution :

Soit $f(x) = x(1 + e^x) - e^x$

1- On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1 \Rightarrow f(0)f(1) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires la fonction f admet au moins une racine sur [0,1].
$f'(x) = 1 + xe^x > 0, \forall\, x \in [0,1]$ alors $f(x)$ est strictement croissante (f est monotone).
Alors cette racine est unique sur l'intervalle [0,1].

2- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

On retrouve l'itération du point fixe suivante :

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{e^{x_n}}{1 + e^{x_n}}$$

3- La convergence de la méthode du point fixe :

Il suffit de vérifier les conditions de Théorème du point fixe

$g(x)$ est une fonction bien définie et continue sur lintervalle [0,1].

1- on a $g'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$,$\forall\, x \in [0, 1]$, alors $g(1) = \frac{e}{1+e}, g(0) = \frac{1}{2}$ alors $g([0,1]) = [g(0), g(1)] = \left[\frac{1}{2}, 0{,}731\right] \subset [0,1]$.

2-$\forall x \in [0, 1] \Rightarrow \max\limits_{x\in[0,1]} |g'(x)| = |g'(0)| = \frac{1}{4}$ d'où $k = \max\limits_{[0,1]}|g'(x)| = \frac{1}{4} < 1$ alors $g(x)$ est strictement contracte. D'après (1) et (2) la méthode du point fixe converge vers la solution α sur l'intervalle [0,1].

II.4 Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton est l'une des méthodes les plus utilisées pour la résolution des équations non linéaires. Elle est basée sur l'idée de construction d'une suite (x_n) qui converge vers α d'une manière quadratique.

II.4.1 principe

Si g est une application de $[a, b]$ dans $[a, b]$, la méthode de newton est construit de la manière suivante : considérons $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

En posant : $g(x) = x + h(x)f(x)$ tel que $h(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$, donc

$$g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Si on choisit h pour que $g'(\alpha) = 0$, la méthode de point fixe appliquée g donne pour $x_0 \in V_\alpha$ une suite $(x_n)_{n\in N}$ convergeant vers α d'une manière au moins quadratique (ordre supérieur ou égal à 2).

Ou $g'(x) = 1 + h'(x)f(x) + h(x)f'(x)$ si $f'(\alpha) \neq 0$ alors on choisit h telle que

$$h(\alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}$$

Donc $\qquad g'(\alpha) = 1 + h(\alpha)f'(\alpha)$

Conclusion : si$f'(\alpha) \neq 0$,$f(\alpha) = 0$ et $g'(\alpha) = 0$, on prend h pour x assez proche de α, et la fonction g définie par :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Il existe un voisinage V_α de α dans $[a,b]$ tel que la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 \in V_\alpha \\ x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

est converge vers α de manière au moins quadratique.

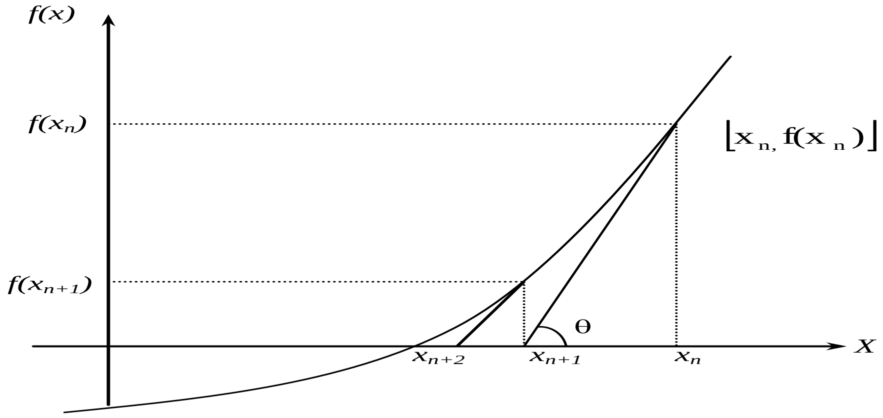
Cette méthode peut être interprétée comme une linéarisation de l'équation $f(x) = 0$ au point $x = x_n$.

En effet, si l'on remplace $f(x)$ au voisinage du point x_n par l'approximation affine obtenue en tronquant au premier ordre le développement de Taylor de f en x_n et qu'on résoud l'équation linéaire résultante $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$ en notant sa solution x_{n+1}, on retrouve l'égalité

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

II.4.2 Interprétation géométrique de la méthode de Newton

Le point x_{n+1} est l'abcisse du point d'intersection entre la tangente à la courbe de f au point $(x_n, f(x_n))$ et l'axe des abscisses comme illustrer dans la figure ci-dessous.



A partir du point $(x_n, f(x_n))$, on trace la tangente à f et recherchons par la suite l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

En utilisant la définition de la pente d'une fonction à $x = x_n$.

$$f'(x_n)=tg(\theta) = \frac{f(x_n)-0}{x_n - x_{n+1}}$$

Ce qui donne

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Cette équation est appelée la formule de Newton-Raphson pour la résolution d'équations non linéaires $f(x)=0$.

II.4.3 Théorème de Newton

Soit $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant :

1. $f(a).f(b) < 0$
2. $\forall x \in [a,b], f'(x) \neq 0$ (f monotone sur $[a,b]$)
3. $\forall x \in [a,b], f''(x) \neq 0$ garde un signe constant sur l'intervalle $[a,b]$

Partant d'un point x_0 qui satisfait l'inégalité $f(x_0)f''(x_0) > 0$ vérifié par un certain choix de $x_0 \in [a,b]$) alors le processus de Newton définie par

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

est converge vers l'unique solution α.

II.4.4 Test d'arrêt : une fois construite la suite (x_n) convergeant vers le réel α vérifiant $g(\alpha) = \alpha$ et une fois fixée la tolérance ε, il suffit que n vérifie :

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

II.4.5 Avantages et inconvénients de la méthode de Newton

II.4.5.1 Avantages

- Convergence rapide s'il existe (en générale quadratique, linéaire si la racine est multiple).
- Relativement stable et peu sensible aux erreurs d'arrondis si $f'(x_\infty)$ n'est pas trop petit.
- Nécessite un point seul point de départ.

II.4.5.2 Inconvénients

- La fonction f doit être continue et dérivable.
- La convergence n'est pas assurée dans tous les cas.

Exemple :

Soit la fonction : $f(x) = x - 1 + sin(2x)$

1- Tracer le graphe $f(x)$ dans l'intervalle $I = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

2- Montrer que $f(x)$ admet une racine unique α sur l'intervalle I.

3- Pour $x_0 = \frac{1}{4}$, écrire la suite de Newton.

4- Vérifier les conditions d'application de la méthode de Newton.

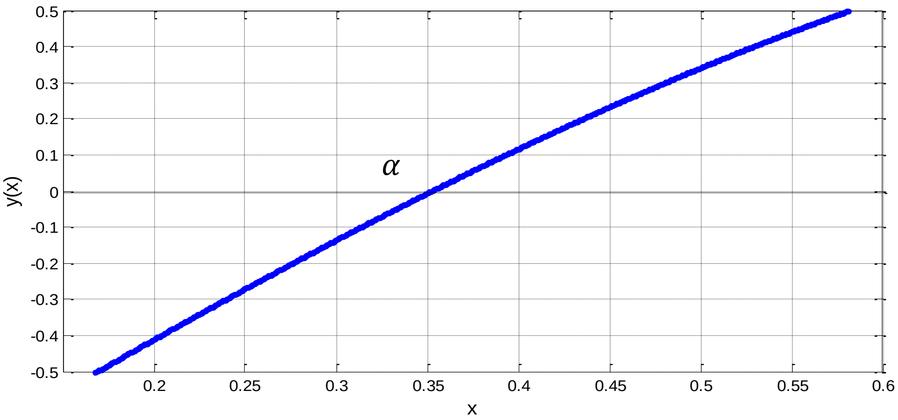
5- Calculer les quatre premières itérations, avec une précision $\varepsilon = 10^{-4}$, conclure.

Solution :

1- Le graphe de la fonction $f(x) = x - 1 + sin(2x)$

On a $f\left(\frac{1}{4}\right) = -0{,}2706$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}3414$

$f'(x) = 1 + 2\cos(2x) > 0, \forall\, x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ puisque $0 < \frac{1}{2} \le 2x \le 1 < \frac{\pi}{2}$, donc f est strictement croissante sur I.



2- α est une racine unique sur I

f est définie et continue sur I et $f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ alors il existe au moins une racine $\alpha \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$, de plus $f'(x) = 1 + 2\cos(2x) > 0, \forall\, x \in [\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ alors f est strictement croissante sur I d'où la racine α est unique sur I.

3-La suite de Newton

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{4} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - 1 + \sin(2x_n)}{1 + 2\cos(2x_n)} \end{cases}$$

4. Les conditions d'application sur I

- $f \in C^2(I)$, car f est composée de polynôme et d'une fonction trigonométrique les deux de C^2, $f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$
- $f'(x) = 1 + 2\cos(2x) \neq 0$
- $f''(x) = -4\sin(2x) \neq 0$ car $0 < \frac{1}{2} \leq 2x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$,
- $x_0 = \frac{1}{4}$ donné par hypothèse et $f\left(\frac{1}{4}\right)f''\left(\frac{1}{4}\right) > 0$ alors la suite de Newton converge vers la racine unique α sur I.

5- On a la suite de Newton est :

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{4} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - 1 + \sin(2x_n)}{1 + 2\cos(2x_n)} \end{cases}$$

Calculons les itérés et testons l'inégalité $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-4}$ avec $x_0 = \frac{1}{4}$

$1^{ére}$ itération : $x_1 = x_0 - \frac{x_0 - 1 + \sin(2x_0)}{1 + 2\cos(2x_0)} = 0.3483$, $|x_1 - x_0| = 0.0983 > 10^{-4}$

$2^{éme}$ itération : $x_2 = x_1 - \frac{x_1 - 1 + \sin(2x_1)}{1 + 2\cos(2x_1)} = 0.3522$, $|x_2 - x_1| = 0.0039 > 10^{-4}$

$3^{éme}$ itération : $x_3 = x_2 - \frac{x_2 - 1 + \sin(2x_2)}{1 + 2\cos(2x_2)} = 0.3524$, $|x_3 - x_2| = 0.0002 > 10^{-4}$

$4^{éme}$ itération : $x_4 = x_3 - \frac{x_3 - 1 + \sin(2x_3)}{1 + 2\cos(2x_3)} = 0.3524$, $|x_4 - x_3| = 0.0000 = 10^{-4}$

Nous déduisons que la solution approchée, obtenue par la méthode de Newton, est $\alpha = x_3 = 0.3524$ à $\varepsilon = 10^{-4}$.