Chapitre III - Interpolation Polynomiale

I. Interpolation polynomiale

I.1 Problématique et objectif

Le problème d'interpolation consiste à chercher des fonctions simples (polynômes algébrique, polynômes trigonométriques) passant par des points donnés (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n) tels que : $x_0 < x_1 < x_1 ... < x_n$ et f une fonction qui passe par ces points d'interpolation. Notre objectif est d'estimer la valeur de cette fonction à un point x appartient à l'intervalle $[x_0, x_n]$? Alors notre problème revient à interpoler la fonction f (c.à.d. estimer la valeur de cette fonction f à un point x) par le polynôme d'interpolation $p(x_i)$ qui vérifie : $p(x_i) = y_i = f(x_i) \quad , i = 0,...,n$

Exemple : En physique, on mesure expérimentalement la température d'un objet qui refroidit au cours du temps. On obtient une suite de valeurs à différents temps t_i. On cherche alors à tracer la courbe de refroidissement la plus proche possible des points mesurés, et ainsi à estimer des valeurs de la fonction en des points non mesurés.

I.2 Forme polynomiale

On approxime la fonction f par un polynôme $p_n(x)$ de degré n qui doit passer par les points d'appuis (x_i, y_i) $i = 1....n$. On peut écrire $p_n(x)$ sous la forme :

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

D'après la condition d'interpolation $p(x_i) = y_i = f(x_i) \quad , i = 0,...,n$ aux $n+1$ points donnent :

$$p_n(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_n x_i^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = f(x_i), \quad i = 0,....,n$$

On obtient un système d'équation de $n+1$ équations avec $n+1$ inconnues.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & . & x_1^n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & . & x_n^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

Le détriment de ce système est de type VANDERMAND qui est différent de zéro si les x_i sont deux à deux distincts (différents) $x_0 \neq x_1 \neq x_2 .... \neq x_n$. C'est-à-dire que le système admet une solution unique.

Exemple :

Trouver le polynôme passant par les points $(0,-2),(-1,-2),\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$.

$n+1=3 \Rightarrow n=2 \Rightarrow P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Alors le polynôme est de la forme suivante : $P_2(x)=x^2+x-2$

II. Polynôme d'interpolation de Lagrange

Le polynôme d'interpolation, encore appelé polynôme interpolant, de Lagrange associé aux points

(x_i, y_i) $i=1....n$ est défini comme étant la solution du problème d'interpolation polynomiale. Commençons par montrer que ce problème est bien posé, c'est-à-dire qu'il admet une unique solution.

Théorème :

Soit une fonction $f \in C^0(I)$. Il existe un unique polynôme p_n degré inférieur ou égal à n tel que :

$p_n(x_i)=f(x_i), \quad \forall i=0,....,n$

Le polynôme qui satisfait cette égalité le polynôme d'interpolation de Lagrange

$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i),$

Où les L_i sont des polynômes de lagrange associés aux nœuds $(x_i)_{i=0...,n}, n \geq 1,$ les $n+1$ polynômes $L_i \in p_n i=0,....,n$ définis par

$$L_i(x)=\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Les polynômes $L_i(x)$ ont donc la forme suivante :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\ldots\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\ldots\ldots\ldots(x_0-x_n)}$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)\ldots\ldots\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots\ldots\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots\ldots\ldots(x_i-x_n)}$$

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)\ldots\ldots\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\ldots\ldots\ldots(x_n-x_{n-1})}$$

Les polynômes L_i vérifient la propriété suivante :

$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 & \forall i \\ L_i(x_j) = 0 & \forall\, i \neq j \end{cases}$$

Exemple de calcul de polynôme d'interpolation de Lagrange

Étant donné 3 points $\{(0\,,\,1),(2\,,\,5),(4\,,\,17)\}$. Nous allons déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 passant par ces points.

Calculons L_0, L_1, L_2 :

$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{8}$, $L_1(x) = -\frac{x(x-4)}{4}$, $L_2(x) = \frac{x(x-2)}{8}$.

Le polynôme d'interpolation de Lagrange est alors :

$P_2(x) = L_0(x) + 5L_1(x) + 17L_2(x) = 1 + x^2$

III. polynôme d'interpolation de newton

Les polynômes e_k de la base de Newton sont définis comme suit :

$$e_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots \ldots (x - x_{k-1}),\;\; k = 1, \ldots, n.$$

avec pour convention $e_0 = 1$. En outre

$e_1 = (x - x_0)$

$e_2 = (x - x_0)(x - x_1)$

$e_3 = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$\vdots$

$e_n = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n relatif à la subdivision $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots\ldots, (x_n, y_n)\}$ s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, e_k(x)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

$p_n(x_i) = f(x_i), \quad \forall i = 0, \ldots., n$

Il faut alors déterminer les coefficients (α_k). C'est l'objet de la prochaine partie intitulée les différences divisées.

III.1 Différences divisées

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n, $P_n(x)$ évalué en x_0 donne :

$$P_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, e_k(x_0) = \alpha_0 = f(x_0) = f[x_0]$$

De manière générale, on note

$$f[x_i] = f(x_i), \quad \forall \, i = 0, \ldots., n$$

$f[x_0]$ est appelée différence divisée d'ordre 0. Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n, $P_n(x)$ évalué en x_1 donne :

$$P_n(x_1) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, e_k(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) = f[x_0] + \alpha_1(x_1 - x_0) = f[x_1]$$

d'où $\alpha_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$

$f[x_0, x_1]$ est appelée différence divisée d'ordre 1.

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n, $P_n(x)$ évalué en x_2 donne :

$P_n(x_2) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \, e_k(x_2) = \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2]$

on a alors : $\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)$

$$\alpha_2 = \frac{f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\alpha_2 = \frac{f[x_2] - f[x_0]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$$

On préfère en général l'écriture suivante :

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0) - f[x_1] + f[x_1]$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_1] + f[x_1] - f[x_0] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_1] + (x_1 - x_0)f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1](x_2 - x_0)$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f[x_2] - f[x_1] + (x_1 - x_2)f[x_0, x_1]$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0) = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - f[x_0, x_1]$$

$$\alpha_2(x_2 - x_0) = f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]$$

D'où

$$\alpha_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)} = f[x_0, x_1, x_2]$$

$f[x_0, x_1, x_2]$ est appelée différence divisée d'ordre 2. On obtient alors par récurrence :

$$\alpha_k = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{(x_k - x_0)} = f[x_0, \dots, x_k]$$

$f[x_0, \dots\dots, x_k]$ est alors appelée différence divisée d'ordre *k*.

En pratique lorsqu'on veut déterminer par exemple la différence divisée d'ordre 3 $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$, on a besoins des quantités suivantes

$$\begin{bmatrix} x_0 & \alpha_0 = f[x_0] & & & \\ x_1 & f[x_1] & \alpha_1 = f[x_0, x_1] & & \\ x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & \alpha_2 = f[x_0, x_1, x_2] & \\ x_3 & f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & \alpha_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

III.2 Polynôme d'interpolation de Newton de degré *n*

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré *n* s'écrit donc à l'aide des différences divisées successives :

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k] e_k(x)$$

Table de calcul

x_0	$\alpha_0 = f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$\alpha_1 = f[x_0, x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$\alpha_2 = f[x_0, x_1, x_2]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$ $\ddots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_n	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		$\alpha_n = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$

Exemple de calcul de polynôme d'interpolation de Newton

Étant donné 3 points $\{(0\ ,1),(2\ ,5),(4\ ,17)\}$. Nous allons déterminer le polynôme d'interpolation de Newton de degré 2 passant par ces points.

$$\begin{bmatrix} x_0 = 0 & f[x_0] = 1 & & \\ x_1 = 2 & f[x_1] = 5 & f[x_0, x_1] = \dfrac{5-1}{2-0} = 2 & \\ x_2 = 4 & f[x_2] = 17 & f[x_1, x_2] = \dfrac{17-5}{4-2} = 6 & f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{6-2}{4-0} = 1 \end{bmatrix}$$

Par suite : $P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]x + f[x_0, x_1, x_2]x(x-2) = 1 + 2x + x(x-2) = 1 + x^2$

IV. Erreur d'interpolation

Si $f \in C^n([a,b])$, $(n+1)$ fois dérivables sur $]a,b[$ alors

$$\forall x \in [a,b], \exists \xi = \xi(x) \in [a,b]\colon\ E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Si $x = x_i$ alors $E(x) = f(x) - P_n(x) = 0$.

Conséquences :

Si $f^{(n+1)}$ est continue sur un intervalle $[a, b]$ alors

$$\forall x \in [a, b], \qquad |f(x) - P(x)| \leq \frac{max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$$

$$|E(x)| \leq |\gamma_{n+1}(x)| \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Avec $\gamma_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, $M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]}|f^{n+1}(x)|$

Si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $f^{(n+1)}(x) = 0 \Rightarrow E(x) = 0, \forall\, x \in [a, b]$ donc, $P_n(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$.