*Université de Jijel* *Année universitaire 2020-2021*
*Faculté des Sciences et de la Technologie* *Analyse Numérique*
*Département de Génie des procédés 2 éme année Licence*

# ***SERIE N°2***

## ***Exercice n°1***

Trouver par la méthode graphique les racines des équations suivantes:

*a)* $x + exp(-x) = 0$ , *b)*$x^3 - x - 1 = 0$, *c)* $x2^x - 1 = 0$

## ***Exercice n°2***

On considère la fonction $f(x)$ définie par : $f(x) = 2xcos(2x) - (x+1)^2$, avec $x$ est donné en radian.

1-peut-on appliquer la méthode de la dichotomie pour calculer $\alpha$ sur l'intervalle $[-3,-2]$? Justifier.

2-Calculer le nombre d'itérations nécessaire pour avoir la solution avec une précision $\varepsilon = 10^{-4}$.

3-Calculer les cinq premiers itérés en utilisant la méthode de dichotomie.

## ***Exercice n°3***

Soit la fonction : $f(x) = 4x + e^{-x} - 3$

1-Montrer que $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha$ dans l'intervalle $[0,1]$.

2-Écrire le processus itératif $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ du point fixe défini par la fonction d'itération suivante *:*

$$g(x) = \frac{1}{4}(3 - e^{-x})$$

a- Montrer que la méthode du point fixe converge vers la racine $\alpha$ surl'intervalle$[0,1]$.

b- Soit $\varepsilon = 2^{-5}$. Calculer le nombre d'itérations nécessaire en partant de $x_0 = 0$.

## ***Exercice n°4***

On considère la fonction $f(x)$ définie par $f(x) = 2x^2 - 3x - e^{-x}$.

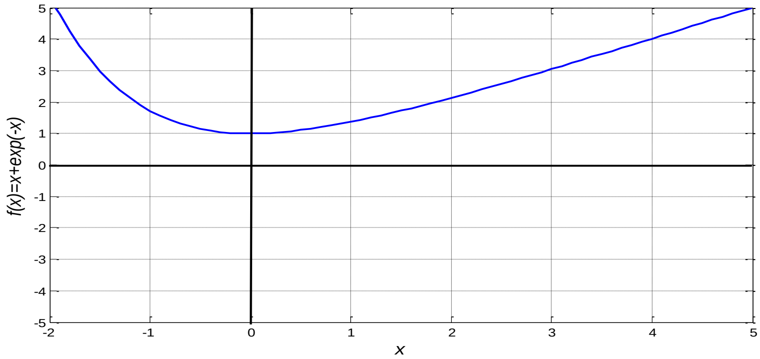
1. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle $[1,2]$.
2. a- Peut-on appliquer la méthode de Newton pour calculer$\alpha$? Justifier.

   b- Soit $x_0 = 2$, calculer les trois premières itérations en utilisant cette méthode.

# *Corrigé*

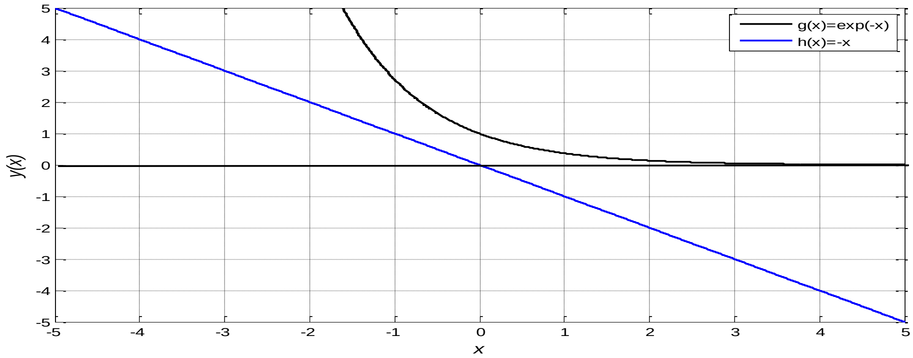
## *Exercice n°1*

a) $x + exp(-x) = 0$n'admet aucune racine réelle d'après le graphe ci-dessous.



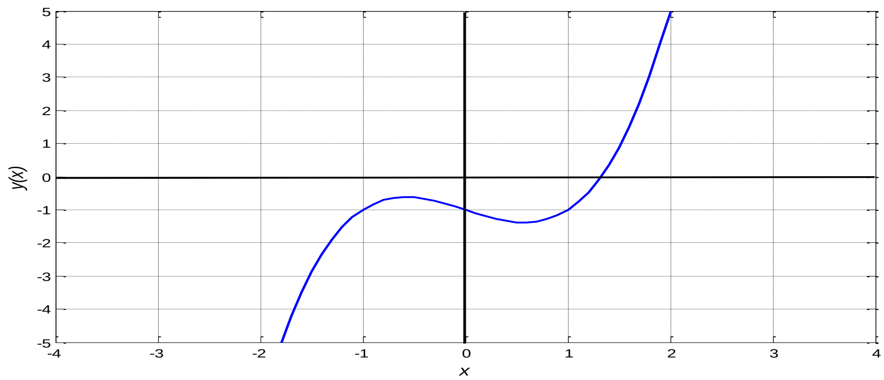

pas d'intersection avec l'axe des abscisses.

On pose$g(x) = exp(-x)$ $et$ $h(x) = -x$, les racines sont à l'intersection entre les deux courbes de $g(x)$ et de $h(x)$ .

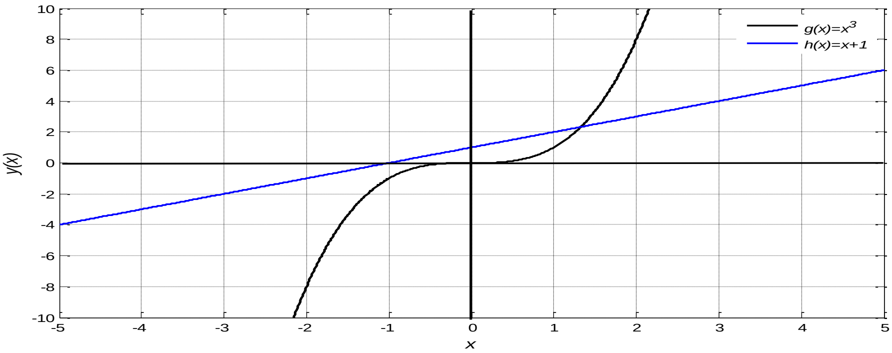



Pas d'intersection entre les deux courbes donc pas de racine.

b)La fonction $f(x) = x^3 - x - 1$.

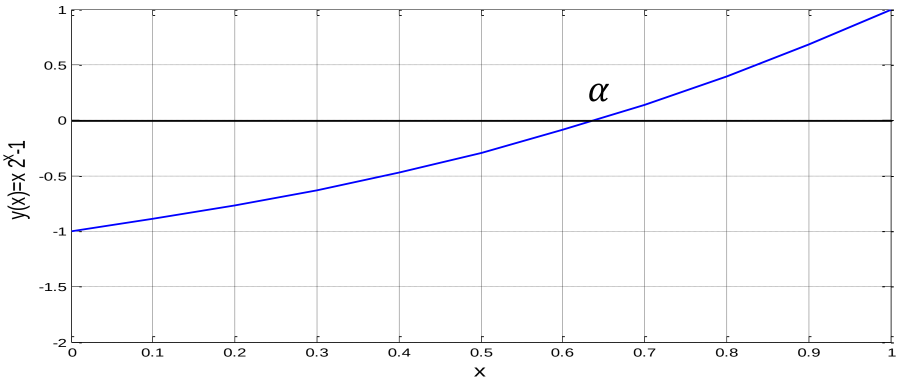


$x^3 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = x + 1$

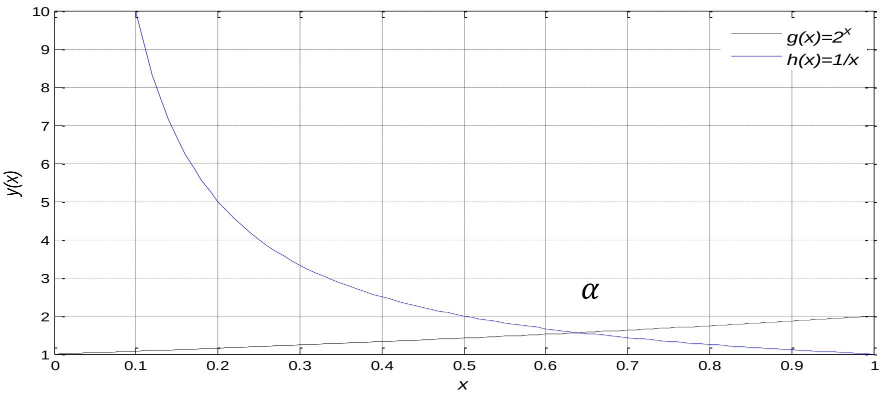



La fonction $x^3 - x - 1 = 0$ possède une racine unique $\alpha \in [1,2]$. c'est l'intersection entre les deux fonctions $g(x) = x^3$ $et$ $h(x) = x + 1$.

C)$x\ 2^x - 1 = 0$.




On a $x\ 2^x - 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 1/x \Rightarrow g(x) = 2^x\ et\ h(x) = 1/x$ d'où le graphe et les solutions qui correspondent aux intersections des deux courbes.




La fonction $x\ 2^x - 1 = 0$ possède une racine unique $\alpha \in [0.6,0.7]$.

***Exercice n°2***

$$f(x) = 2xcos(2x) - (x+1)^2$$

1. La fonction $f$ est bien définie et continue

$f(-3) = -9.761$ , $f(-2) = 1.614$donc $f(-3)\,f(-2) < 0$,

D'après le TVI il existe au moins une racine$\alpha \in ]-3,-2[$tel que $f(\alpha) = 0$.

De plus $f'(x) = 2\cos(2x) - 4x\sin(2x) - 2(x+1) > 0 \Rightarrow f(x)$est strictement croissante alors la solution $\alpha$ est unique.

2. Pour calculer le nombre d'itérations nécessaire pour avoir la solution avec une précision $\varepsilon$ donnée, nous utilisons la formule :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{-2-(-3)}{10^{-4}}\right)}{\ln(2)} - 1 \geq \frac{4\ln(10)}{\ln(2)} - 1 \geq 12.2877$$

Il faut effectuer $n = 13$ itérations en utilisant la méthode de Dichotomie pour avoir la racine avec une précision $\varepsilon = 10^{-4}$.

3.

$$a_0 = -3\,, b_0 = -2\,, x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{-3-2}{2} = -\frac{5}{2}, f(-\frac{5}{2}) = -3.6683$$

Si $f(x_0).f(b_0) = f\left(-\frac{5}{2}\right)f(-2) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{5}{2},-2\right[, a_1 = x_0 = -\frac{5}{2}\,, b_1 = b_0 = -2\,,$

- $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{-\frac{5}{2}-2}{2} = -\frac{9}{4} = -2.25, f(-2.25) = -0.61435$

Si $f(x_1).f(b_1) = f(-2.25)f(-2) < 0 \Rightarrow \alpha \in ]-2.25,-2[, a_2 = x_1 = -2.25\,, b_2 = b_1 = -2,$

- $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{-2.25-2}{2} = -2.125, f(-2.125) = 0.6301$

  $f(a_2).f(x_2) = f(-2.25)f(-2.125) < 0 \Rightarrow \alpha \in ]-2.25,-2.125[, a_3 = a_2 = -2.25, b_3 = x_2 = -2.125,$

- $x_3 = \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{-2.25-2.125}{2} = -2.1875, f(-2.1875) = 0.0380$

Si $f(a_3).f(x_3) = f(-2.25)f(-2.1875) < 0 \Rightarrow \alpha \in ]-2.25,-2.1875[, a_4 = a_3 = -2.25, b_4 = x_3 = -2.1875$ ,

- $x_4 = \frac{a_4+b_4}{2} = \frac{-2.25-2.1875}{2} = -2.21875, f(-2.21875) = -0.2808$

Si $f(x_4).f(b_4) = f(-2.21875)f(-2.1875) < 0 \Rightarrow \alpha \in ]-2.21875,-2.1875[, a_5 = x_4 = -2.21875, b_5 = b_4 = -2.1875,$

- $x_5 = \frac{a_5+b_5}{2} = \frac{-2.21875-2.1875}{2} = -2.203125,\ f(-2.203125) =$

$$\vdots$$

$x_{13} = \alpha = -2.1913$ .

***Exercice n°3***

$$f(x) = 4x + e^{-x} - 3.$$

1-$f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha$ dans l'intervalle [0,1].

$f(x)$ fonction bien définie et continue sur cet intervalle

$f(0) = -2 < 0$et$f(1) = 4 - 3 + e^{-1} = 1 + e^{-1} > 0$

D'après le T.V.I, il existe au moins une racine $\alpha \in ]0,1[$avec $f(\alpha) = 0$.

L'unicité de la solution

$f'(x) = 4 - e^{-x} > 0, \forall\, x \in [0,1]$ alors $f(x)$ est strictement croissante sur cet intervalle.

alors$f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha$ surl'intervalle$[0,1]$.

2-Le processus itératif $(x_n)_{n\in \mathrm{N}}$ du point fixe s'écrit

$$\begin{cases} x_0 \ \text{donné}, \\ x_{n+1} = g(x_n) = \dfrac{1}{4}(3 - e^{-x_n}), \qquad n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

a- La convergence de la méthode du point-fixe :

Il suffit de vérifier les conditions de Théorème du point fixe

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x) = \frac{1}{4}(3 - e^{-x})$$

$g(x)$est un fonction bien définie et continue sur lintervalle [0,1].

$g'(x) = \frac{1}{4}e^{-x} > 0,\ \forall\, x \in [0,1] \Longrightarrow g \nearrow$, alors $g([0,1]) = [g(0), g(1)] = \left[\frac{1}{2}, 0{,}658\right] \subset [0,1]$.

On montre que $g$ est contractante :

$$\exists k, 0 < k < 1, avec\ k = \max_{[0,1]}|g'(x)|\,, |g'(x)| \leq k < 1$$

On a $g'(x) = \frac{1}{4}e^{-x} > 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow gestcroissante$

D'où $k = \max_{[0,1]}|g'(x)| = g'(0) = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow g\ est$ contractante.

Alors le processus du point fixe définie par

$\begin{cases} x_0\, \text{donné}, \\ x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{4}(3 - e^{-x_n}),\ n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$ converge vers l'unique solution$\alpha$.

b- Le nombre d'itérations : $x_0 = 0,\ \varepsilon = 2^{-5}$.

$$x_1 = g(x_0) = g(0) = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

$$\varepsilon = 2^{-5} = \frac{1}{32} = 0.03125.$$

$$n > \frac{ln\left[\frac{(1-k)\varepsilon}{|x_1-x_0|}\right]}{\ln(k)} = \frac{ln\left[\frac{0,75\ \times 0,03125}{0,5}\right]}{\ln(0,25)} = 2,2075 \Rightarrow n = 3.$$

***<u>Exercice n°4</u>***

$$f(x) = 2x^2 - 3x - e^{-x}$$

1-$f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha$ sur$[1,2]$.

$f$ est une fonction définie et continue sur $[1,2]$.

$$f(1) = 2 - 3 - e^{-1} = -(3 - 2 + e^{-1}) = -(1 + e^{-1}) < 0$$

$$f(2) = 8 - 6 - e^{-2} = 2 - e^{-2} > 0$$

D'après le T.V.I . il existe au moins une racine $\alpha$ tel que $(\alpha) = 0$ .

L'unicité de la solution et $f'(x) = 4x - 3 + e^{-x} > 0, \forall\, x \in [1,2]$alors $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1,2]$. Alors $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha$l'intervalle$[1,2]$.

2- a- Peut-on appliquer la méthode de Newton pour calculer$\alpha$?

Il suffit de vérifier les conditions d'application de théorème de Newton :

- $f$ est de classe $C^2$ sur $[1,2]$ car ($e^{-x}$ est $C^2[1,2]$) et ($x(2x-3)$) est $C^2[1,2]$
- $f(1) \times f(2) < 0$
- $f'(x) = 4x - 3 + e^{-x} > 0, \forall\, x \in [1,2]$
- $f''(x) = 4 - e^{-x} > 0, \forall\, x \in [1,2]$ (garde un signe constant sur l'intervalle$[1,2]$).
- Pour $x_0 = 2$, on a $f(2)f''(2) > 0$.

Alors la méthode de Newton définie par

$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$ converge vers la racine $\alpha$de$f(x) = 0$.

b- L'algorithme de Newton est donné par

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Dans notre cas, il s'écrit : $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n^2 - 3x_n - e^{-x_n}}{4x_n - 3 + e^{-x_n}} \end{cases}$

Pour $n = 0$, $x_1 = x_0 - \frac{2x_0^2 - 3x_0 - e^{-x_0}}{4x_0 - 3 + e^{-x_0}} = 1.6369.$

Pour $n = 1$, $x_2 = x_1 - \frac{2x_1^2 - 3x_1 - e^{-x_1}}{4x_1 - 3 + e^{-x_1}} = 1.5691.$

Pour $n = 2$, $x_3 = x_2 - \frac{2x_2^2 - 3x_2 - e^{-x_2}}{4x_2 - 3 + e^{-x_2}} = 1.566$