

SERIE N°4

Exercice n°1

On considère le système linéaire $Ax = b$ ou

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 2/5 & 1 & 4/5 \\ 3/5 & 4/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

- 1- Donner la décomposition LU de la matrice A .
- 2- Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la décomposition LU précédente.
- 3- Déduire l'inverse de A .

Exercice n°2

On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + 2\beta x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2\beta x_1 + 2x_2 + \frac{2}{\beta} x_3 = 0 \\ 2x_1 + \frac{2}{\beta} x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

1. Mettre ce système sous forme matricielle $Ax = b$, avec $x = (x_1, x_2, x_3)^t$.
2. Pour quelles valeurs du paramètre réel β .
 - a- La matrice A admet la décomposition LU .
 - b- La matrice A admet la décomposition de Cholesky.

Exercices 03

On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 66 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 168 \\ 15x_1 + 14x_2 + 15x_3 = 504 \end{cases}$$

En utilisant la décomposition LU :

- 1- Résoudre ce système.
- 2- Trouver l'inverse de la matrice A en utilisant cette décomposition.
- 3- Déduire la solution x du système $Ax = b$.

Corrigé

Exercice n°1

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 2/5 & 1 & 4/5 \\ 3/5 & 4/5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Par identification, on arrive à déterminer les éléments des deux matrices L et U .

$$\begin{cases} U_{11} = 1 \\ U_{12} = 2 \\ U_{13} = 1 \end{cases} \begin{cases} L_{21}U_{11} = 2 \\ L_{21}U_{12} + U_{22} = -4 \\ L_{21}U_{13} + U_{23} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{21} = 2 \\ U_{22} = -8 \\ U_{23} = 0 \end{cases}, \begin{cases} L_{31}U_{11} = 1 \\ L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = 6 \\ L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + U_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{31} = 1 \\ L_{32} = -1/2 \\ U_{33} = -1 \end{cases}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 21/25 & 14/25 \\ 0 & 0 & 4/15 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (1) \\ Ux = y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \beta - 2\alpha/5 \\ y_3 = \gamma - \frac{2\beta}{3} - \alpha/3 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 3/5 \\ 0 & 21/25 & 14/25 \\ 0 & 0 & 4/15 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \alpha \\ \beta - 2\alpha/5 \\ \gamma - \frac{2\beta}{3} - \alpha/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -\frac{5\alpha}{4} - \frac{5\beta}{2} + \frac{15\gamma}{4} \\ x_2 = \frac{5\alpha}{14} + \frac{20\beta}{7} - \frac{5\gamma}{2} \\ x_1 = \frac{45\alpha}{28} + \frac{5\beta}{14} - \frac{5\gamma}{4} \end{cases}$$

$$\text{D'où } x = \begin{pmatrix} \frac{45\alpha}{28} + \frac{5\beta}{14} - \frac{5\gamma}{4} \\ \frac{5\alpha}{14} + \frac{20\beta}{7} - \frac{5\gamma}{2} \\ -\frac{5\alpha}{4} - \frac{5\beta}{2} + \frac{15\gamma}{4} \end{pmatrix}$$

3-Déduire l'inverse de A .

$$\text{On a } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{28} & \frac{5}{14} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{14} & \frac{20}{7} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{28} & \frac{5}{14} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{14} & \frac{20}{7} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

Exercices 02 :

Ecriture du système (1) sous forme $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2\beta & 2 \\ 2\beta & 2 & 2/\beta \\ 2 & 2/\beta & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) les valeurs du paramètre réel β :

2-a) A admet la décomposition LU.

Il suffit de vérifier que $\Delta_i \neq 0, \forall i = 1, 2, 3$ avec $\Delta_i = |A_{[i]}|, i = 1, 2, 3$

Dans notre cas :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |A_{[1]}| = |a_{11}| = 4 \neq 0, \\ \Delta_2 &= |A_{[2]}| = \begin{vmatrix} 4 & 2\beta \\ 2\beta & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4\beta^2 \neq 0 \Rightarrow \beta^2 \neq 2 \Rightarrow \beta \neq \pm 2 \\ \Delta_3 &= |A_{[3]}| = \begin{vmatrix} 4 & 2\beta & 2 \\ 2\beta & 2 & \frac{2}{\beta} \\ 2 & \frac{2}{\beta} & 4 \end{vmatrix} = 4 \left(8 - \frac{4}{\beta^2} \right) - 2\beta \left(8\beta - \frac{4}{\beta} \right) + 2(4 - 4) = 40 - 16\beta^2 - \frac{16}{\beta^2} \\ &= -\frac{8}{\beta^2} (2\beta^4 - 5\beta^2 + 2) = -\frac{8}{\beta^2} (2\beta^2 - 1)(\beta^2 - 2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta^2 \neq 0 \\ \beta^2 \neq \frac{1}{2} \\ \beta^2 \neq 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \beta \neq 0, \beta \neq \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \beta \neq \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

2-b) A admet la décomposition de cholesky

Il suffit de vérifier que A est SDP.

La matrice A est symétrique : $A = A^t$

Pour que A soit Définie positive, il faut vérifier que $\Delta_i > 0, \forall i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= |A_{[1]}| = |a_{11}| = 4 > 0, \\ \Delta_2 &= |A_{[2]}| = \begin{vmatrix} 4 & 2\beta \\ 2\beta & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4\beta^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < \beta < \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = |A_{[3]}| = \begin{vmatrix} 4 & 2\beta & 2 \\ 2\beta & 2 & \frac{2}{\beta} \\ 2 & \frac{2}{\beta} & 4 \end{vmatrix} = -\frac{8}{\beta^2}(2\beta^2 - 1)(\beta^2 - 2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < \beta < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < \beta < \sqrt{2} \end{cases}$$

Pour que A soit définie positive, il faut que : est SDP si $\beta \in]-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}[$

Corrigé : 1) Ecriture du système (1) sous forme $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2\beta & 2 \\ 2\beta & 2 & 2/\beta \\ 2 & 2/\beta & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) les valeurs du paramètre réel β :

2-a) A admet la décomposition LU.

Il suffit de vérifier que $\Delta_i \neq 0, \forall i = 1, 2, 3$ avec $\Delta_i = |A_{[i]}|, i = 1, 2, 3$

Dans notre cas :

$$\Delta_1 = |A_{[1]}| = |a_{11}| = 4 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = |A_{[2]}| = \begin{vmatrix} 4 & 2\beta \\ 2\beta & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4\beta^2 \neq 0 \Rightarrow \beta^2 \neq 2 \Rightarrow \beta \neq \pm 2$$

$$\Delta_3 = |A_{[3]}| = \begin{vmatrix} 4 & 2\beta & 2 \\ 2\beta & 2 & \frac{2}{\beta} \\ 2 & \frac{2}{\beta} & 4 \end{vmatrix} = 4\left(8 - \frac{4}{\beta^2}\right) - 2\beta\left(8\beta - \frac{4}{\beta}\right) + 2(4 - 4) = 40 - 16\beta^2 - \frac{16}{\beta^2}$$

$$= -\frac{8}{\beta^2}(2\beta^4 - 5\beta^2 + 2) = -\frac{8}{\beta^2}(2\beta^2 - 1)(\beta^2 - 2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta^2 \neq 0 \\ \beta^2 \neq \frac{1}{2} \\ \beta^2 \neq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta \neq 0, \beta \neq \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \beta \neq \pm \sqrt{2}$$

2-b) A admet la décomposition de cholesky

Il suffit de vérifier que A est SDP.

La matrice A est symétrique : $A = A^t$

Pour que A soit Définie positive, il faut vérifier que $\Delta_i > 0, \forall i = 1, 2, 3$.

$$\Delta_1 = |A_{[1]}| = |a_{11}| = 4 > 0,$$

$$\Delta_2 = |A_{[2]}| = \begin{vmatrix} 4 & 2\beta \\ 2\beta & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4\beta^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < \beta < \sqrt{2}$$

$$\Delta_3 = |A_{[3]}| = \begin{vmatrix} 4 & 2\beta & 2 \\ 2\beta & 2 & \frac{2}{\beta} \\ 2 & \frac{2}{\beta} & 4 \end{vmatrix} = -\frac{8}{\beta^2}(2\beta^2 - 1)(\beta^2 - 2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < \beta < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < \beta < \sqrt{2} \end{cases}$$

Pour que A soit définie positive, il faut que : est SDP si $\beta \in]-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}[$

Exercice 03 :

1.

Ecriture du système sous forme $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 15 & 14 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ 168 \\ 504 \end{bmatrix}$$

La décomposition LU :

Il suffit de vérifier que $\Delta_i \neq 0, \forall i = 1, 2, 3$ avec $\Delta_i = |A_{[i]}|, i = 1, 2, 3$

Dans notre cas :

$$\Delta_1 = |A_{[1]}| = |a_{11}| = 3 \neq 0, \quad \Delta_2 = |A_{[2]}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

$$\Delta_3 = |A_{[3]}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 15 & 14 & 15 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

D'où

$$A = LU \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 15 & 14 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Par identification, on arrive à déterminer les éléments des deux matrices L et U.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \det(U) = 1 \cdot \det(U) = \prod_{i=1}^3 U_{ii} = 3 \times 1 \times 2 = 6,$$

La résolution du système $Ax = b$

$$Ax = b \Leftrightarrow L U x = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (1) \\ Ux = y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1.5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 66 \\ y_2 = 36 \\ y_3 = 30 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3/2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 15 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x_1 = 13 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 15 \end{cases}$$

2. L'inverse de A par LU :

Comme $\det(A) = 6 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existe, donc d'après

$$\begin{cases} AV_1 = e_1 \Leftrightarrow LUV_1 = e_1 \Leftrightarrow \begin{cases} LY_1 = e_1 \\ UV_1 = Y_1 \end{cases} & (1) \\ AV_2 = e_2 \Leftrightarrow LUV_2 = e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} LY_2 = e_2 \\ UV_2 = Y_2 \end{cases} & (2) \\ AV_3 = e_3 \Leftrightarrow LUV_3 = e_3 \Leftrightarrow \begin{cases} LY_3 = e_3 \\ UV_3 = Y_3 \end{cases} & (3) \end{cases}$$

$$\text{De (1) : } LY_1 = e_1 \Leftrightarrow Y_1 = (1, -2, 3)^t$$

$$UV_1 = Y_1 \Leftrightarrow V_1 = \left(\frac{19}{6}, -5, \frac{3}{2}\right)^t$$

$$\text{De (2) : } LY_2 = e_2 \Leftrightarrow Y_2 = (0, 1, -4)^t$$

$$UV_2 = Y_2 \Leftrightarrow V_2 = \left(-\frac{8}{3}, 5, -2\right)^t$$

$$\text{De (3) : } LY_3 = e_3 \Leftrightarrow Y_3 = (0, 0, 1)^t$$

$$UV_3 = Y_3 \Leftrightarrow V_3 = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)^t$$

De (1), (2), (3), on aura le résultat final

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 19/6 & -8/3 & 1/2 \\ -5 & +5 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3. La solution:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = (13, 6, 15)^t$$