

Chapitre-5- **Méthode de résolution approximative des systèmes d'équations linéaires**

I. Introduction

La méthode itérative contrairement à d'autres à l'avantage de ne pas avoir besoin de garder en mémoire la totalité d'une matrice de très grande taille gourmande en capacités mémoire. Cette méthode permet de garder en mémoire que les coefficients non nuls d'une matrice de grande taille.

Cependant, le succès de calcul n'est pas assuré quel que soit la matrice, certaines conditions sont nécessaires afin d'obtenir un résultat convergent, ce que nous allons voir dans ce document au travers des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Nous cherchons à résoudre le système $Ax = b$. on commence par décomposer la matrice A

$$A = M - N, \text{ de telle façon que } M \text{ soit inversible}$$

Il est ensuite possible d'écrire le système $Ax = b$ sous la forme :

$$Mx = Nx + b$$

Ou encore :

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

qui définit une équation de point fixe

Pour la résoudre nous calculerons par récurrence la suite des vecteurs $x^{(i)}$ à partir d'un vecteur $x^{(0)}$, en choisissant la relation indiquée ci-dessous :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Cette relation est une relation de récurrence du premier ordre.

Les décompositions de A font intervenir :

La matrice diagonale D obtenue à partir des éléments diagonaux de A

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La matrice triangulaire inférieure E

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice triangulaire supérieure F

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons donc $A = D - E - F$, et nous obtiendrons la décomposition $A = M - N$ à partir de différents types de regroupements des matrices D, -E, -F, ce qui va nous amener à différentes méthodes, celle de Jacobi, et celle de Gauss-Seidel.

II. Méthode de JACOBI

II.1. Description de la méthode de Jacobi

On suppose que A est une matrice inversible dont aucun élément de la diagonale est nul ($a_{ii} \neq 0, \forall i$). Cette méthode consiste à isoler le coefficient de la diagonale de chaque ligne du système, si l'un des coefficients diagonaux est nul, il est parfois possible de permuter certaines lignes pour éviter cette situation.

On pose : $A = M - N$

La relation de récurrence est la suivante :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

avec $M = D$, $N = E + F$, nous obtenons la relation suivante :

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b, k \in \mathbb{N}$$

On pose : $\alpha = D^{-1}(E + F)$ et $\beta = D^{-1}b$

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$$

Si on exprime cette relation en fonction des éléments de la matrice A, nous avons pour

$$Ax = b$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ecrivons le système $x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$ sous forme développée :

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta \Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i, i = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], i = 1, \dots, n$$

L'algorithme de la méthode de Jacobi est alors donné comme suit :

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], i = 1, \dots, n \end{cases}$$

II.2. Critère d'arrêt :

En pratique, les itérations vont jusqu'à atteindre la précision ε donnée au préalable, qui se traduit

par : $\|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\| \leq \varepsilon, i = 1, \dots, n$

II.3 Convergence de la méthode de Jacobi

Théorème :

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithme de Jacobi converge, indépendamment de la condition initiale $x^{(0)}$, est que $\rho(\alpha) < 1$ où $\rho(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$,

λ_i : Valeur propre de α .

Remarque :

- 1- Le calcul de $\rho(\alpha)$ est très compliqué, il suffit alors de vérifier si $\|\alpha\| < 1$, puisque $\rho(\alpha) \leq \|\alpha\|$
- 2- La méthode de Jacobi converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
 - $\|\alpha\|_1 < 1$
 - $\|\alpha\|_2 < 1$
 - $\|\alpha\|_3 = \|\alpha\|_\infty < 1$
- 3- Si A est une matrice à diagonale dominante stricte (DDS) alors la méthode de Jacobi converge. On dit que la matrice A est à diagonale strictement dominante si :

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \forall i$$

Exemple de calcul numérique

Soit le système de 3 équations à 3 inconnues:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

Suivant la formule décrite précédemment, la méthode de Jacobi s'écrit dans ce cas pour la première itération à partir d'un vecteur $x^{(0)} [0 \ 0 \ 0]$:

Première Itération

$$x_1^1 = \frac{1}{3}(2 - 0 + 0) = \frac{2}{3}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{5}(17 - 0 - 0) = \frac{17}{5}$$

$$x_3^1 = -\frac{1}{6}(-18 - 0 + 0) = 3$$

Seconde itération

$$x_1^2 = \frac{1}{3}(2 - \frac{17}{5} + 3) = \frac{8}{15}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{5}(17 - \frac{2}{3} - 2(3)) = \frac{17}{5}$$

$$x_3^2 = -\frac{1}{6}(-18 - 2(\frac{2}{3}) + \frac{17}{5}) = 2,655$$

Cela permet de remplir le tableau suivant :

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,66667	3.40000	3.00000
2	0.53333	2.06667	2.65556
3	0.86296	2.23111	2.83333
4	0.86741	2.09407	2.91580
5	0.94057	2.06020	2.94012
6	0.95997	2.03583	2.97016
7	0.97811	2.01994	2.98069
8	0.98691	2.01210	2.98938
9	0.99242	2.00686	2.99362
10	0.99558	2.00407	2.99633

Les valeurs convergent vers la solution [1 2 3] avec une convergence assez lente

III. Méthode de Gauss-seidel

III.1. Description de la méthode

Comme pour la méthode de Jacobi, le but de la méthode de Gauss-Seidel est de résoudre le système d'équation de la forme $Ax = B$ de manière itérative

On suppose cette fois que la matrice D est une matrice inversible dont aucun élément de la diagonale est nul ($a_{ii} \neq 0, \forall i$). Cette méthode consiste à isoler le coefficient de la diagonale de chaque ligne du système, si l'un des coefficients diagonaux est nul, comme pour la méthode de Jacobi, il est parfois possible de permuter certaines lignes pour éviter cette situation.

La relation de récurrence est la suivante :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

avec $M = D - E$, et $N = F$, nous obtenons la relation suivante :

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}F x^{(k)} + (D - E)^{-1}b$$

En général, on décompose A en E, D, F , les deux méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel se distinguent dans la répartition des blocs entre E, D et F entre M et N .

Ainsi, Nous verrons lors des simulations que Gauss-Seidel converge plus rapidement que Jacobi.

Et en développant la formule récursive ci-dessus, on aboutit à l'algorithme de Gauss-Seidel.

III.2. Algorithme de Gauss-Seidel :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(0)} \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right), i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Remarque :

- 1- La matrice de Gauss-Seidel, notée G_s est donnée par : $G_s = (D - E)^{-1}F$
- 2- La matrice de Jacobi, notée J , est donnée par : $J = D^{-1}(E + F)$
- 3- Pour pouvoir appliquer la méthode de Gauss-Seidel, il faut que les $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$.
- 3- Tous les résultats de convergence pour la méthode de Jacobi (J) restent valables pour la méthode de Gauss-Seidel (G_s) (remplacer α par J ou par G_s).

Exemple de calcul numérique

Soit le système de 3 équations à 3 inconnues identique à celui utilisé pour la précédente méthode de Jacobi:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

Suivant la formule décrite précédemment, la méthode de Gauss-Seidel s'écrit dans ce cas pour la première itération à partir d'un vecteur $x^{(0)} [0 \ 0 \ 0]$:

Première Itération

$$x_1^1 = \frac{1}{3}(2 - 0 + 0) = \frac{2}{3}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{5}\left(17 - \frac{2}{3} - 0\right) = \frac{49}{15}$$

$$x_3^1 = -\frac{1}{6}\left(-18 - 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{49}{15}\right) = \frac{241}{90}$$

Seconde itération

$$x_1^2 = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{49}{15} + \frac{241}{90}\right) = 0.47$$

$$x_2^2 = \frac{1}{5}\left(17 - 0.47 - 2\left(\frac{241}{90}\right)\right) = 2.235$$

$$x_3^2 = -\frac{1}{6}(-18 - 2(0.47) + 2.235) = 2.784$$

Cela permet de remplir le tableau suivant :

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,66667	3.26667	2.67778
2	0.47037	2.23481	2.78432
3	0.84983	2.11630	2.93056
4	0.93808	2.04016	2.97267
5	0.97750	2.01543	2.98993
6	0.99150	2.00573	2.99621
7	0.99683	2.00515	2.99858
8	0.99881	2.00080	2.99947
9	0.99955	2.00030	2.99980

10	0.99983	2.00011	2.99993
----	---------	---------	---------

On constate que pour un même nombre d'itérations, la solution approximative obtenue par la méthode de Gauss-Seidel est plus précise. Les valeurs convergent vers la solution $x = [1 \ 2 \ 3]$ avec une convergence plus rapide.