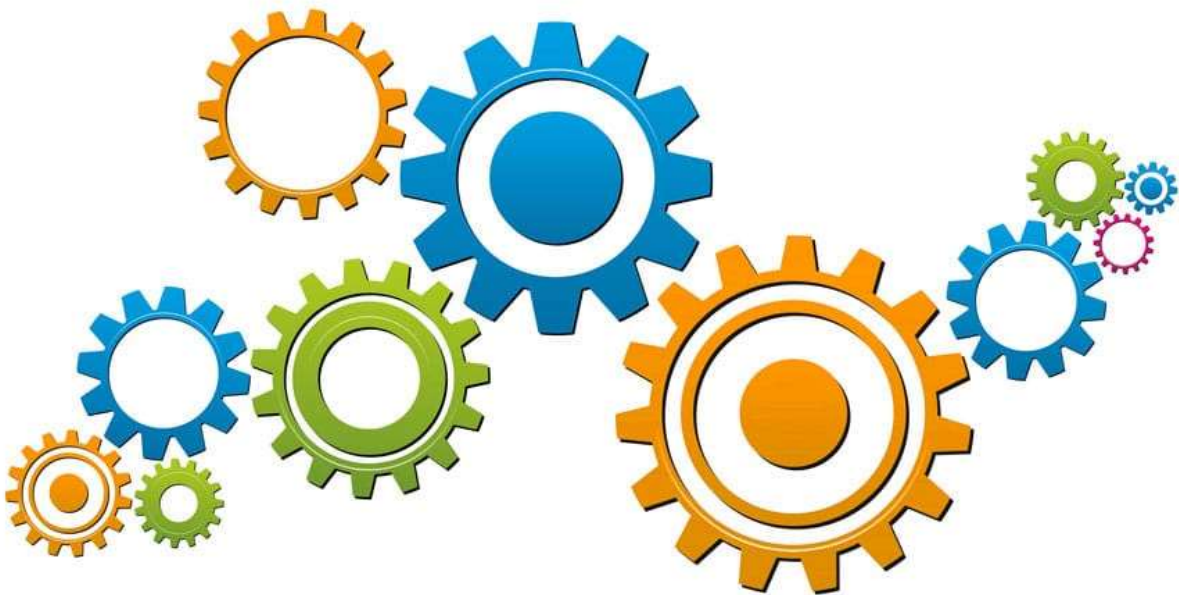




Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Civil et Hydraulique

Automatique et asservissement

Cours



2024-2025

Sommaire

Chapitre 1 – Généralités et concepts _____	1
Chapitre 2 – Transformée de Laplace et fonction de transfert _____	5
Chapitre 3 – Introduction aux asservissements _____	17
Chapitre 4 – modélisation des systèmes linéaires _____	21.
Chapitre 5 – Stabilité des systèmes linéaires _____	35

Chapitre 1

Généralités et concepts

- Introduction sur les asservissements Continus Linéaires
- Généralités sur les systèmes.

1.1.Introduction sur les asservissements Continus Linéaires

Ce chapitre est de permettre à l'étudiant d'identifier les mots clés de ce module et de comprendre leurs utilités et leurs fonctions.

1.1.1. Historique

L'automatisation qui a fait depuis plusieurs décennies des progrès constants, se trouve de plus en plus liée aux techniques numériques, informatiques et électroniques. Le contrôle ou commande des procédés, qu'ils soient continus ou discontinus, fut d'abord numérique puis pneumatiques et enfin électronique.

Parallèlement se différenciait le concept d'organe de contrôle de celui d'organe de réglage, c'est cette séparation des fonctions de contrôle et de réglage qui a conduit, quand les technologies l'ont permis à éloigner les organes de contrôle des procédés physiques et les concentrer en des lieux plus favorables à leurs fonctionnement, c'est le début des salles de contrôle.

1.1.2. Généralités sur les systèmes

On entend par système un dispositif isolé soumis aux lois de la physique et caractérisé par certaines grandeurs. Dans le système à une variable, on s'intéresse à la relation entre une grandeur particulière ou l'entrée principale $e(t)$, correspondant à une action extérieure s'exerçant sur le système et une des grandeurs de sortie caractérisant son état que l'on désigne par $s(t)$.

L'application au système des lois de la physique conduit à l'établissement d'une certaine relation entre $e(t)$ et $s(t)$. Les autres grandeurs qui possèdent une action sur le système et qui sont susceptibles par conséquent de modifier la relation existante entre $e(t)$ et $s(t)$, sont appelées entrées parasites ou perturbations.

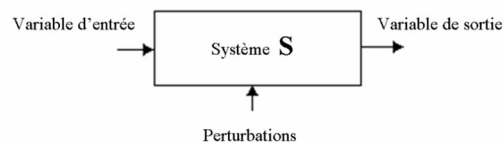


Figure. 1.1: Schéma d'un système

On représente symboliquement la relation entre l'entrée et la sortie par le système de la Figure. 1-1, c'est à dire par un dipôle dans lequel le système physique est représenté par un carré.

En fait, l'action extérieure $e(t)$ correspond à l'application au système d'une certaine énergie, caractérisée par deux composantes (tension ou intensité) pour un signal électronique, vitesse et

force, pour un signal mécanique, pression et débit pour un signal pneumatique ou hydraulique, etc...

1.2.Système de commande

Un système de commande est un assemblage de constituants physiques branchés ou reliés les uns aux autres de telle sorte qu'ils puissent se commander, se diriger ou se régler par lui-même ; ou bien commander, diriger ou réguler un autre système.

La notion de commande est assez intuitive et peut être définie au moyen de quelques exemples simples lorsqu'une manivelle est reliée à un arbre par un train d'engrenage, on dit que la position de la manivelle, commande celle de la pince mécanique.

Si le courant inducteur d'un moteur électrique à excitation séparée est ajusté au moyen d'un interrupteur ; dans les deux exemples cités le mot « commande » indique qu'il existe une relation précise entre l'entrée (câble de la manivelle et la position du potentiomètre) et la sortie (c.-à-d., le câblage de la pince mécanique et le régime de fonctionnement du moteur).

1.3.Systèmes continus

Un système physique est dit continu si toutes les grandeurs caractéristiques sont de nature continue, l'information qui représente ces grandeurs est disponible à chaque instant et peut prendre toutes les valeurs possibles entre deux limites. Leurs évolutions dans le temps est un signal continu au sens mathématique du terme.

On peut donc définir les systèmes, continus par opposition aux systèmes discrets, en temps ou en amplitude qui sont échantillonnés, quantifiés, logiques et séquentiels.

1.4.Systèmes linéaires

Un système physique est linéaire si la relation entre les grandeurs, d'entrée et la ou les grandeurs de sortie est un système d'équation différentielle linéaire.

1.5.Nature des signaux d'entrée et de sortie

Les signaux d'entrées et de sorties d'un système sont des fonctions, du temps : si à chaque instant leurs amplitudes est parfaitement connue, le signal est dit déterministe (exemple : échelon unitaire, sinusoïde, etc..).

Si par contre, à chaque instant, on ne connaît que la probabilité pour le signal d'avoir telle ou telle amplitude, on dit que celui-ci est aléatoire (ex : bruit)

1.6.Un signal d'entrée

On appelle signal d'entrée, l'excitation en stimulus appliqué au système de commande à partir d'une source d'énergie extérieure, en générale afin d'y provoquer une réponse spécifique.

1.7.Signal de sortie

On appelle un signal de sortie la réponse effective obtenue à partir du système de commande, elle peut coïncider ou non avec la réponse que doit normalement provoquer le signal d'entrée.

1.8.Définition des systèmes à boucles fermées et à boucles ouvertes

Les systèmes de commandes entrent dans deux catégories générales, les systèmes en boucle ouverte et les systèmes en boucles fermées.

Définition 1 - un système de commande en BO est un système où le signal de commande est indépendant du signal de sortie.

Définition 2 - un système de commande en BF est un système où le signal de commande dépend d'une façon ou d'une autre du signal de sortie.

1.9. Définition d'un système asservi

Un système asservi est un système de réglage, le mot asservi est pris dans le sens de réglage, commander, ou régler, commander un autre système. Un système asservi est défini par sa finalité et il est caractériser par deux chaines.

- **Chaines directes**, ou d'actions, ou de puissance. Elles comprennent des éléments amplificateurs et éventuellement des convertisseurs de puissance, en liaison avec la source d'énergie.
- **Les chaines de réactions** ou de retour ou d'asservissement. Elles sont constituées d'éléments de précision généralement passifs ; ce ne sont pas des chaines de puissances, elles transmettent à l'entrée des informations sur les grandeurs de sorties. Ces informations sont comparées aux signaux d'entrés au moyen de compensateurs.

1.10. Définition d'un système de régulation

Un système de régulation est un système capable de maintenir une variable déterminée constante et égale à une valeur, dite de consigne, sans intervention humaine (ex : régulation de la température d'un four).

1.11. Système asservis régulés

La régulation permet de maintenir une grandeur physique à une valeur constante quelques soient les perturbations extérieures. L'objectif global de la régulation peut se résumer par ces trois mots clefs : Mesurer, Comparer et Corriger.

Nous sommes donc amenés à effectuer des mesures pour obtenir certaines connaissances avant d'entreprendre une action. Ces mesures seront obtenues à partir d'appareillages spécifiques.

Et c'est donc faire varier une grandeur déterminée suivant une loi imposée pour un élément de comparaison, ex : régulation de la vitesse d'un moteur.

1.12. Conclusion

Tout asservissement comporte 3 tâches : mesurer, comparer et agir.

- **Mesure** : ou observation
- **Comparaison** entre le but à atteindre et la position actuelle (réflexion)
- **Action** de puissance

Tout asservissement comprend une chaine d'action, une chaine de retour et un comparateur.

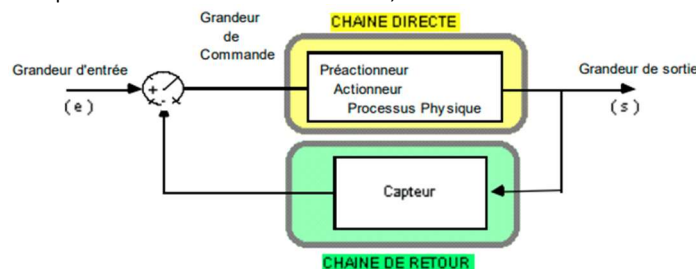


Figure 1.2 : Concept général d'un asservissement

Chapitre 2

Transformée de Laplace et fonction de transfert

- La transformée de Laplace
- La transformée de Laplace inverse
- Fonctions de transferts et diagrammes bloc

1.13. La transformée de Laplace

1.13.1. Introduction

La transformation de Laplace est une opération intégrale qui permet de transformer une fonction d'une variable réelle en une fonction d'une variable complexe. Par cette transformation, une équation différentielle linéaire peut être représentée par une équation algébrique. Elle permet aussi de représenter des fonctions particulières (distribution de Heaviside, distribution de Dirac, etc.) de manière très élégante. Ce sont ces possibilités qui rendent la transformation de Laplace intéressante et populaire auprès des ingénieurs. Cette transformation a donné lieu à la technique du calcul opérationnel ou calcul symbolique qui facilite la résolution des équations différentielles linéaires qui représenteront les systèmes que nous allons étudier.

1.13.2. Définition

Considérons une fonction réelle d'une variable réelle $s(t)$ telle que $s(t)=0$ pour $t<0$. On définit sa transformée de **Laplace** $L(s(t))$ comme la fonction S de la variable complexe P

Comme suit :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt$$

1.13.3. Propriétés fondamentales de la transformation de Laplace

Les propriétés suivantes permettent de calculer facilement (sans utiliser la définition de la transformée de Laplace) les transformées de Laplace de certaines fonctions.

a. Linéarité

Soient f, g deux fonctions, α, β , des constants réels. Alors :

$$(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha L(f(t)) + \beta L(g(t))$$

$$L(f(t) + g(t)) = L(f(t)) + L(g(t))$$

$$L(kf(t)) = kL(f(t))$$

b. Transformation de Laplace d'une dérivée

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = pF(p) - f(0)$$

De même, la transformée de Laplace de sa dérivée n -ième est :

$$L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = p^n F(p) - \sum_{k=n+1}^{2n} p^{2n-k} \frac{d^{k-n-1} f(0)}{dt^{k-n-1}}$$

Exemple : pour la deuxième dérivée ($n=2$) :

$$L\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = p^2 F(p) - pf(0) - \frac{df(0)}{dt}$$

Il faut noter que l'on trouve dans ces expressions les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs en $t=0$ des dérivées successives d'ordres inférieurs à l'ordre de dérivation considéré

• Dans le cas où ces conditions initiales sont nulles, ce qui a priori très souvent le cas on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\frac{df}{dt} \rightarrow pF(p) \quad ; \quad \frac{d^n f}{dt^n} \rightarrow p^n F(p)$$

c. Transformation de Laplace d'une intégrale

$$L\left(\int f(t)dt\right) = \frac{F(p)}{p}$$

d. Changement d'échelle : Soit $k \in \mathbb{R}$ avec $k \neq 0$

$$\begin{cases} L(f(kt)) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right) \\ L\left(f\left(\frac{t}{k}\right)\right) = kF(kp) \end{cases}$$

e. Théorème de retard

Considérons la fonction $(t-\tau)$, autrement dit la fonction (t) à laquelle on a fait subir un changement d'origine des temps (figure 1.1), autrement dit un retard d'un temps τ

$$L(f(t-\tau)) = F(p)e^{-p\tau}$$

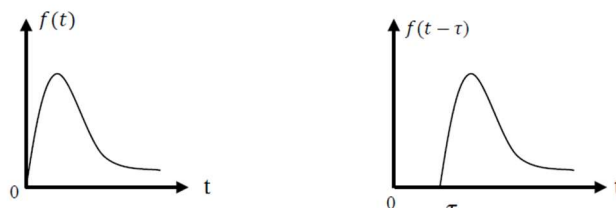


Figure 1.1 : Représentation temporelle d'un signal retardé

Démonstration

$$L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Effectuant dans cette intégrale le changement de variable $u=t+\tau$

$$L(f(t-\tau)) = \int_{\tau}^{+\infty} f(u-\tau)e^{-p(u-\tau)} du$$

En remarquant que la fonction $(u-\tau)=0$ $p \ t < \tau$, on peut, sans changer la valeur de l'intégrale, lui choisir une borne d'intégration inférieure plus faible que τ :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(u-\tau)e^{-pu}e^{p\tau} du$$

$$F(p) = e^{p\tau} \int_0^{+\infty} f(u-\tau)e^{-pu} du$$

Par définition : $\int_0^{+\infty} f(u-\tau)e^{-pu} du$ est la transformée de Laplace de $(u-\tau)$ d'où :

$$L(f(t-\tau)) = e^{-p\tau}F(p)$$

f. Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

g. Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

1.13.4. Transformée de Laplace inverse

De même qu'une fonction du temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction (p) de trouver son original, autrement dit la transformée de Laplace inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt} dt$$

1.13.5. Transformées de Laplace de quelques signaux usuels

- **Echelon unité**

L'échelon unité (figure 1.2) est la fonction (tt) telle que :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$U(p) = L(u(t)) = 1/p$$

On a alors :

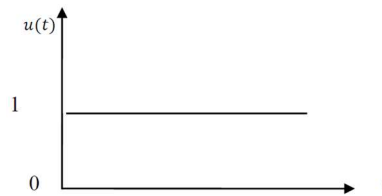


Figure 1.2 : Echelon unité

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, tout échelon (non unitaire) d'amplitude A, aura pour transformée de Laplace :

$$F(p) = L(f(t)) = L(Au(t)) = A/p$$

- **Rampe ou échelon de vitesse**

Il s'agit en réalité de l'intégrale de la fonction (tt) précédente, on la note généralement (tt) , telle que $(t)=tu(t)$ (figure 1.3)

$$v(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

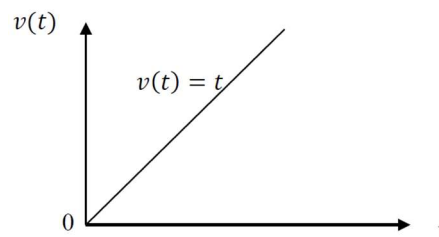


Figure 1.3 : Rampe

On a évidemment:

$$V(p) = L(v(t)) = 1/p^2$$

- **Impulsion Unitaire**

En dérivant la fonction (t) , on obtient une fonction habituellement notée (t) qui est appelé impulsion unitaire ou impulsion de **Dirac**

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Il s'agit d'une fonction nulle partout sauf pour $t=0$ ou elle a une valeur infinie :

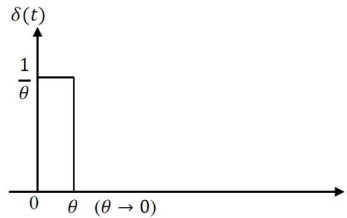


Figure 1.4 : Modèle de l'impulsion de Dirac

$$\Gamma(p) = L(\delta(t)) = 1$$

- **Signal sinusoïdal**

On considère un signal : $s(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ pour $t \geq 0$

$$s(p) = L(s(t)) = \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$$

On retiendra essentiellement les deux résultats suivants :

$$s(t) = \sin \omega t \rightarrow S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

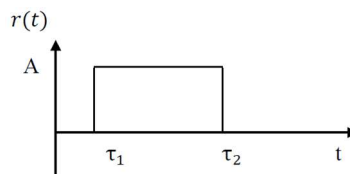
$$s(t) = \cos \omega t \rightarrow S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

1.13.6. Signaux quelconques

Face à un signal quelconque, on peut certes entreprendre le calcul direct de la transformée de Laplace. Ce calcul peut parfois être relativement délicat.

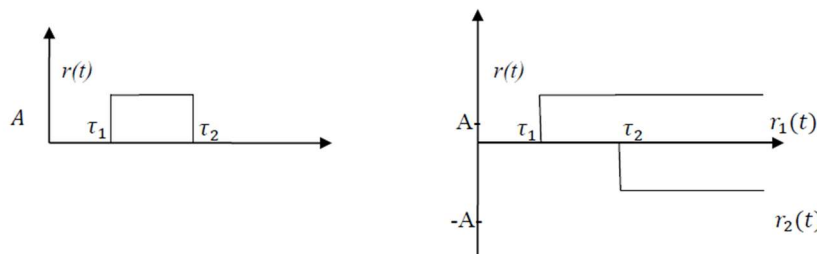
Exemple 1

Soit $r(t)$ donné graphiquement



- 1) Calculer $\{(t)\}$.
- 2) Quelle est l'expression de $\{(t)\}$ dans le cas particulier $\tau_1=0$ et $\tau_2=\tau$.
- 3) Montré que si $A=1/\tau$ et si $\tau \rightarrow 0$ alors $\{(t)\} = \{\delta(t)\} = 1$

Solution



$$1) L[r(t)] = L[r_1(t)] + L[r_2(t)] = \frac{A}{p} e^{-\tau_1 p} - \frac{A}{p} e^{-\tau_2 p}$$

$$2) \text{ si } \tau_1 = 0 \text{ et } \tau_2 = \tau \text{ alors } R(p) = A \frac{1 - e^{-\tau p}}{p}$$

$$3) \text{ si } A = \frac{1}{\tau} \text{ alors } R(p) = \frac{1 - e^{-\tau p}}{\tau p}$$

Lorsque $\tau \rightarrow 0$, $(t) \rightarrow \delta(t)$

$$\tau \rightarrow 0 ; e^{-\tau p} \approx 1 - \tau p \Rightarrow R(p) = \frac{1 - (1 - \tau p)}{\tau p} = \frac{\tau p}{\tau p} = 1, \text{ donc } L[\delta(t)] = 1.$$

1.13.7. Table élémentaire de transformées de Laplace

Le tableau suivant montre les transformées de Laplace de certaines fonctions élémentaires :

	$f(t)$	$F(p)$: Transformée de Laplace de $f(t)$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$u(t)$	$\frac{1}{p}$
3.	$tu(t)$	$\frac{1}{p^2}$
4.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5.	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
6.	$t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
7.	$\sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
8.	$\cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
9.	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
10.	$e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

1.13.8. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Considérons la fonction rationnelle suivante

$$F(p) = \frac{\sum_{i=0}^m A_i p^i}{\sum_{j=0}^n B_j p^j} \text{ Avec } n \geq m$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$F(p) = \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_i)}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)\dots(p-p_j)}$$

Avec m et n le nombre de racines.

z_i : sont les racines de F(p) (solution du numérateur).

p_j : sont les racines de F(p) (solution du dénominateur).

Exemples

1) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction suivante :

$$f(t) = 2e^{7t} - 4e^t$$

$$f(t) = 2e^{7t} - 4e^t \Rightarrow F(p) = \frac{2}{p+7} - \frac{4}{p+1}$$

2) Déterminer la transformée inverse de Laplace de la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$$

On a :

$$F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} \text{ Avec } p = -1 \text{ et } p = -2$$

$$F(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} A &= \lim_{p \rightarrow -1} \left[\frac{(p+3)(p+1)}{(p+1)(p+2)} \right] = 2 \text{ et } B = \lim_{p \rightarrow -2} \left[\frac{(p+3)(p+2)}{(p+1)(p+2)} \right] = -1 \end{aligned} \right.$$

$$F(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{1}{p+2}$$

D'après le tableau : $f(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

1.13.9. Fonctions de Transfert et Blocs de Diagrammes

Pour calculer la réponse $s(t)$ d'un système linéaire à une entrée quelconque $e(t)$, on peut appliquer la transformation de Laplace à l'équation différentielle linéaire à coefficients constants liant $e(t)$ et $s(t)$ ou $x(t)$ et $y(t)$.

1.13.9.1. Fonction de transfert des systèmes linéaires.

On désigne par $F(p)$ et on l'appelle fonction de transfert du système, le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée du système.

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

L'application de la transformation de Laplace à l'équation différentielle liant les variations de l'entrée aux variations de la sortie d'un système linéaire conduit à définir une fonction de transfert $F(p)$.

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A_m p^m + \dots + A_1 p^1 + A_0 p^0}{B_n p^n + \dots + B_1 p^1 + B_0 p^0}$$

Avec : $n \geq m$

1.13.10. Schéma fonctionnel d'un système linéaire

Soit le système suivant :

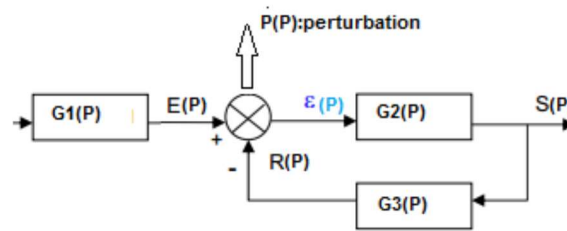


Figure 1-1 Schéma fonctionnel d'un système linéaire

Chaîne directe de $e(t)$ vers $s(t)$ et la chaîne de retour de $s(t)$ vers $r(t)$.

Et leurs transformées de Laplace

$G_1(p)$: sert à traiter $e(t)$ afin que $e(t)$ et $r(t)$ soit de même nature.

$G_2(p)$: système principal de commande.

$G_3(p)$: système de retour

$\xi(p)$: Signal d'erreur (p)

$E(p)$ et $S(p)$: Transformées de Laplace de signaux d'entrée et de sortie

$P(p)$: perturbations ou parasites

Fonction de transfert ou transmittance totale

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Fonction de transfert ou transmittance parasite

$$T(p) = \frac{S(p)}{P(p)}$$

1.13.11. Fonction de transfert en boucle ouverte et boucle fermée

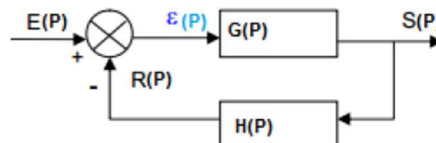


Figure 1-2 : Schéma fonctionnel d'un système linéaire simple

En boucle ouverte, la fonction de transfert est donnée par : $T(p) = G(p) \cdot H(p)$, tandis qu'en boucle fermée :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p) \cdot \xi(p)}{\xi(p) + R(p)} = \frac{G(p) \cdot \xi(p)}{\xi(p) + \xi(p)[H(p) \cdot G(p)]} = \frac{G(p)}{1 + H(p) \cdot G(p)}$$

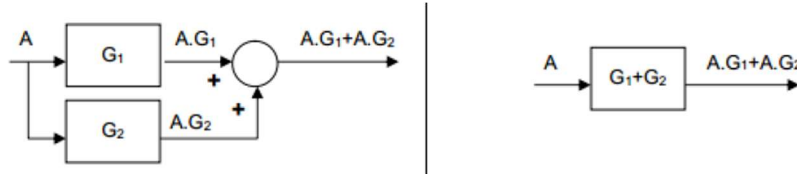
1.13.12. Simplifications des schémas fonctionnels.

Pour simplifier un schéma fonctionnel, il faut réduire les boucles internes et pour cela, on doit déplacer les points de connexion, les comparateurs ou les interchanger pour avoir en dernier une seule maille réduite pour déterminer la fonction de transfert du système simplifié et passer à son étude à savoir stabilité, précision etc.

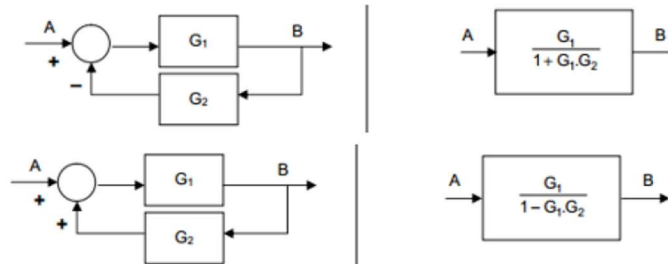
- **Éléments en cascades ou série.**



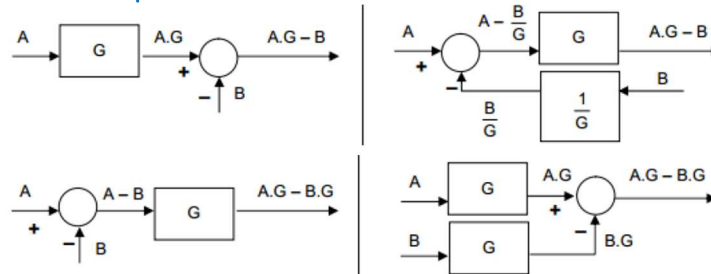
- **Éléments en Parallèle.**



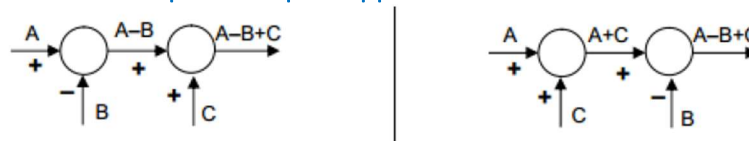
- **Elimination d'une boucle de retour**



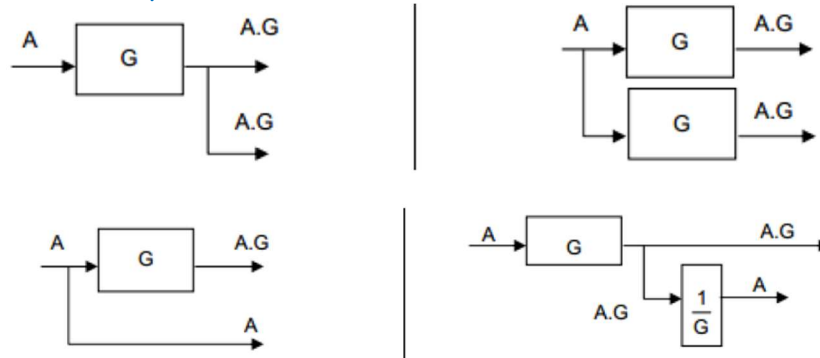
- **Déplacement d'un comparateur en amont ou en aval d'un autre élément.**



- **Déplacement d'un comparateur par rapport à un autre**

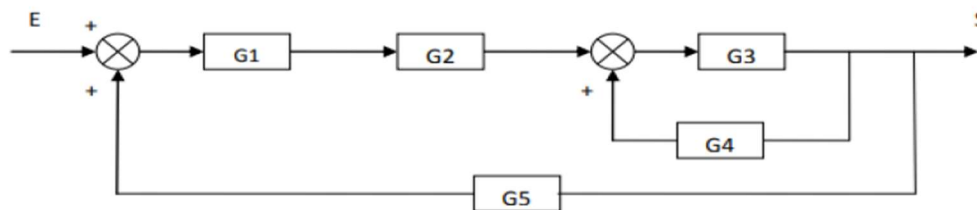


- Déplacement d'un point de dérivation soit en amont ou en aval d'un autre élément.



1.13.13. Exemples

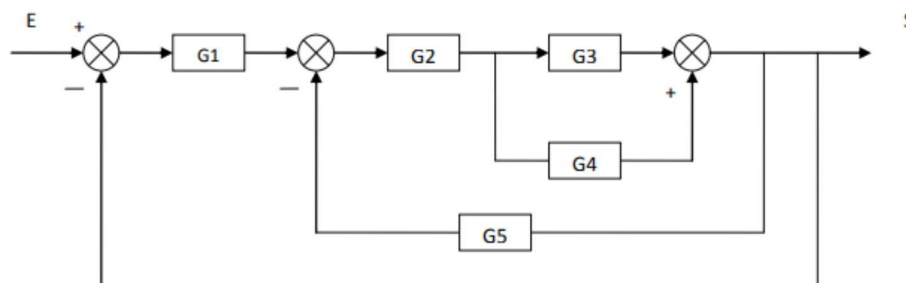
Exemple 1 - Simplifier les schémas suivants et donner leurs fonctions de transferts



Solution - G1 et G2 en cascade $G_1 \cdot G_2$, une boucle fermée G3 et G4. Avec G5, on aura :

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{\frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_3 G_4}}{1 - G_5 \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_3 G_4}}$$

Exemple 2-

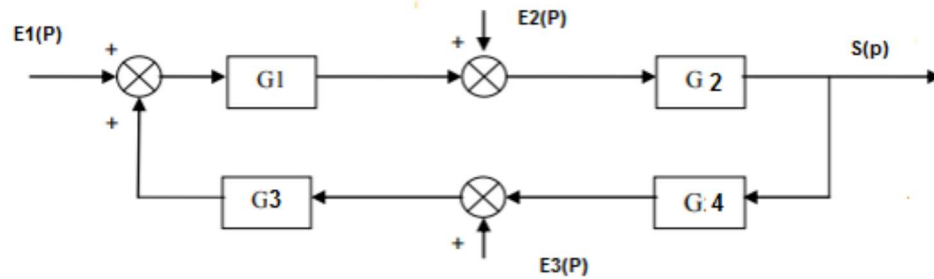


Solution -

Il y a 3 mailles il faut commencer par G3 et G4, la 2ème le résultat avec G2 et G5 et le résultat avec G1, toujours élimination d'une boucle de retour et éléments en cascade

$$F(P) = \frac{G_1 (G_2 G_4 + G_2 G_3)}{1 + G_2 G_5 (G_4 + G_3) + G_2 G_1 (G_3 + G_4)}$$

Exemple 3- Déterminer la sortie $S(P)$ du système suivant :



On a un système à 3 entrées, on applique le principe de superposition c.-à-d., on élimine deux entrées et on garde une et c'est consécutif E_1 existe et $E_2=E_3=0$; E_2 existe et $E_1=E_3=0$ et en dernier E_3 existe et $E_2=E_1=0$ et on simplifie le circuit correspondant à chaque entrée et on ajoute les sorties correspondantes à chaque entrée, S_1 pour E_1 , S_2 pour E_2 et S_3 pour E_3 et enfin $S(p)=S_1(p)+S_2(p)+S_3(p)$

$$E_2 = E_3 = 0 \Rightarrow S_1 = E_1 \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4},$$

$$E_1 = E_3 = 0 \Rightarrow S_2 = E_2 \frac{G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4},$$

$$E_1 = E_2 = 0 \Rightarrow S_3 = E_3 \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4},$$

$$S(P) = E_1 \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} + E_2 \frac{G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} + E_3 \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} = \frac{G_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} (E_1 G_1 + E_2 + E_3 \frac{G_1 G_3}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4})$$

Chapitre 3

Introduction aux asservissements

- *Introduction,*
- *Définition*
- *Notion de systèmes, boucle ouverte (BO) et boucle fermée (BF),*
- *Régulation et asservissements,*
- *Concepts utiles à l'étude des systèmes asservis.*

2.1 Introduction

L'automatique est la discipline qui d'une manière générale traite la commande des systèmes. Elle revêt donc un caractère très important dans le domaine industriel auquel elle apporte à la fois des solutions, des méthodes d'étude ainsi que des démarches systématiques d'analyse.

2.2 Définition

Réaliser un système automatique c'est effectuer une ou plusieurs opérations sans l'intervention de l'homme, par exemple : une machine à laver automatique ou le pilotage automatique d'avion. Notons que ces systèmes copient le plus souvent le comportement de l'homme dans les trois phases essentielles de son travail : Observation, réflexion et action. A la fin, un retour à la phase essentielle de son travail. Comme exemple, le remplissage d'une cuve à hauteur donnée de l'eau qui passe par les trois phases suivantes :

- Observation du niveau d'eau actuel dans la cuve.
- Comparaison avec le niveau souhaité.
- Action sur le robinet (ouverture ou fermeture)

Puis retour à une phase d'observation.

Ce **retour** constitue l'un des notions fondamentales de l'automatique, on dit encore que l'on a réalisé un bouclage (appelé en anglais **feedback**).

2.3 Notion de système, Boucle Ouverte (BO), Boucle Fermée (BF) :

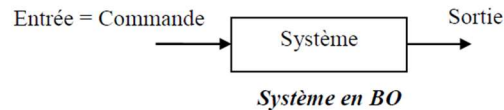
L'automatique peut s'appliquer à tout ce qui bouge, fonctionne, se transforme, l'objet d'application est appelé système.

Un système se caractérise par ses grandeurs d'entrées et de sorties. Les grandeurs d'entrées sont les grandeurs qui agissent sur le système, il existe deux types :

Commandes : celles que l'on peut maîtriser.

Perturbations : celles que l'on ne peut pas maîtriser

Un système est dit en boucle ouverte (BO) lorsque la commande est élaborée sans l'aide de connaissances des grandeurs de sorties : il n'y a pas de retour (feedback).



Dans un système en boucle fermée (BF) la commande est alors fonction de la consigne et de la sortie, pour observer la grandeur de sortie on utilise des capteurs, c'est l'information de ces capteurs qui va permettre d'élaborer la commande.

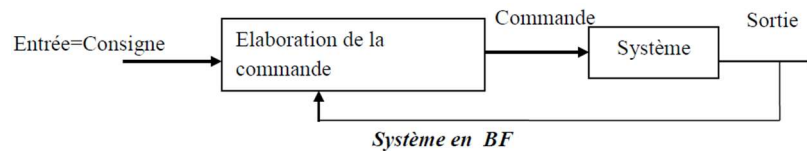


Figure2.1 : Système en boucle fermé

2.4 Régulation et asservissement

2.4.1. Les systèmes asservis

Un système asservi est un système bouclé dans lequel la grandeur de retour est comparée à la grandeur d'entrée par élaboration d'un signal, appelé écart. Ce signal écart est adapté et amplifié afin de commander la partie opérative.

A retenir, un système asservi est un système :

- A amplification de puissance
- En boucle fermée
- Nous prenons en compte les régimes transitoires, les grandeurs d'entrées et de sorties ne sont plus binaires elles sont analogiques.

Parmi les systèmes asservis, on distingue : systèmes régulateurs et systèmes suiveurs :

On parle d'un **système régulateur** lorsque l'on désire que la sortie prenne une valeur précise et égale à une consigne d'entrée fixe.

On parle d'un **système suiveur** lorsque l'on désire que la sortie suive une consigne d'entrée qui varie au cours du temps et dont l'évolution n'est pas toujours connue à l'avance.

2.4.2. Structure d'un système asservi

Un système asservi est un système bouclé dont la structure générale est donnée comme suit :

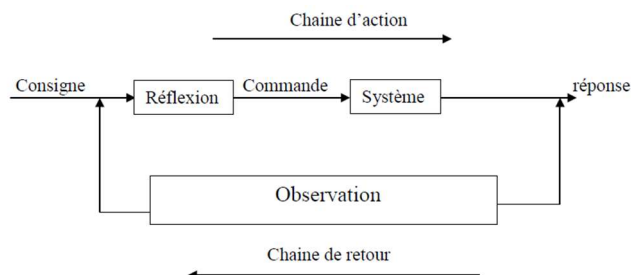


Figure2.2 : Structure d'un système asservi

2.4.3. Exemple de régulation automatique du niveau d'eau dans une cuve avec fuite

L'ouverture ou la fermeture de la vanne est commandée par la position relative du flotteur.

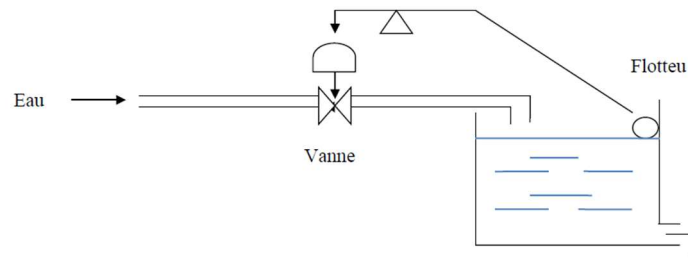


Figure 2.3 : Régulation automatique du niveau d'eau dans une cuve avec fuite

Le fonctionnement de cette régulation peut être décrit par le schéma général ci-dessous (Figure 2.4)

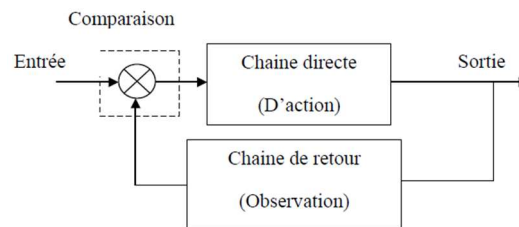


Figure 2.4 : Schéma générale de l'asservissement

L'entrée représente le niveau d'eau désiré, la sortie est le niveau d'eau réel, l'action se fait après comparaison du niveau désiré au niveau réel. On représente cet asservissement habituellement par un schéma appelé **schéma fonctionnel** ou **schéma bloc**.

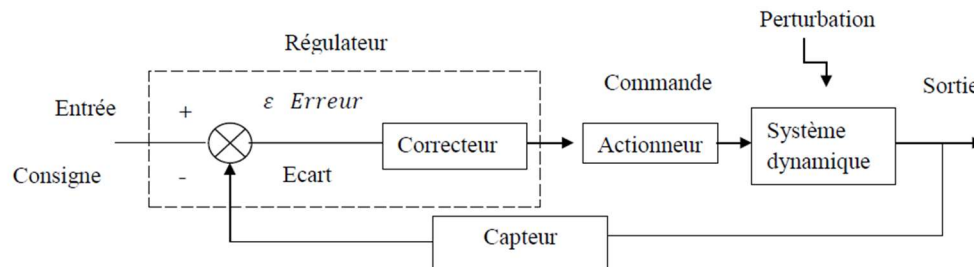


Figure 2.5 : Schéma fonctionnel d'un asservissement

- Le régulateur (comparateur + correcteur) élabore l'ordre de commande à partir du signal d'erreur ε : c'est l'organe intelligent.
- L'actionneur ou l'organe d'action apporte en générale la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche c'est l'organe musclé (la vanne).
- Le système dynamique évolue selon l'action suivant des lois physiques qui lui sont propre ; la sortie est en générale une grandeur physique qui caractérise la tâche à réaliser, en plus cette sortie peut fluctuer en fonction des perturbations imprévisible.
- Le capteur délivre à partir de la sortie une grandeur caractérisant l'observation (précision du capteur implique la précision du système).

2.5 Concepts utiles à l'étude des systèmes asservis

Dans l'analyse des systèmes asservis nous distinguons l'aspect statique et l'aspect dynamique

a) L'aspect statique : concerne l'étude des systèmes asservis en mode régulation (entrée fixée), on définit l'erreur statique comme la différence entre la tâche demandée et la tâche réalisée (annulation de l'erreur statique c'est l'asservissement)

b) Aspect dynamique : essentiel en automatique s'étudie par les notions de précision dynamique, de rapidité et de stabilité

- La **précision dynamique** est caractérisée par l'erreur avec laquelle la sortie suit la loi d'entrée imposée au système.

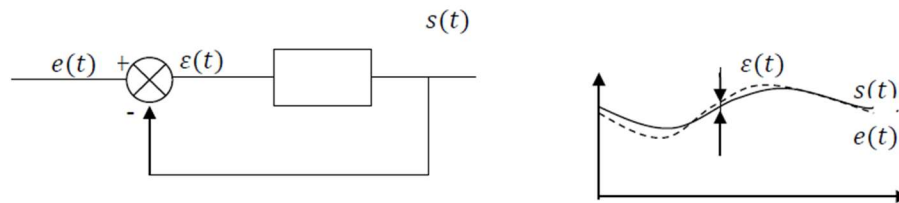


Figure 2.6 : précision dynamique d'un système asservi

La **rapidité** est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse). Cette notion est fortement liée à la précision dynamique (plus un système est rapide plus il est précis). (Figure 2.7)

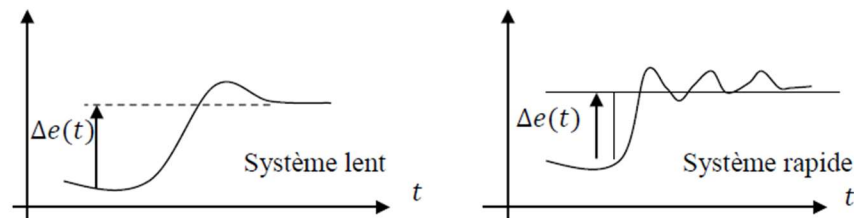


Figure 2.7 : Rapidité d'un système asservi

La **stabilité** : la présence d'un bouclage risque d'introduire une divergence ou une oscillation de la sortie. Ce comportement est intolérable pour un système asservi. On s'efforce au cours de synthèse d'éviter ce risque en se définissant une marge de stabilité. (Figure 2.8)

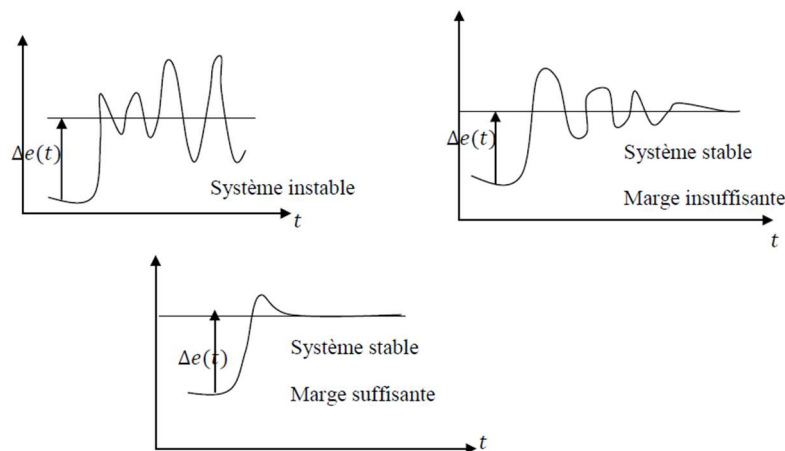


Figure 2.8 : Stabilité d'un système asservi

Chapitre 4

Modélisation des systèmes asservis linéaires

- Inconvénient de la commande en boucle ouverte,
- Principe de la commande en boucle fermée,
- La Modélisation d'une boucle de régulation
- Le problème de la stabilité
- Exercices

3.1.Introduction

D'une manière générale, les principaux problèmes posés par la mise en œuvre des systèmes physiques ou industriels concernent leur commande, à savoir la détermination optimale des signaux d'entrée qu'il faut leur appliquer pour qu'ils se comportent de la manière souhaitée. Les méthodes d'étude et d'analyse étudiées dans les chapitres précédents nous ont fourni l'approche méthodologique générale d'analyse des systèmes. Nous abordons à présent le cœur de la problématique de l'automatique, à savoir l'étude des systèmes bouclés.

3.2.Inconvénients de la commande en boucle ouverte

La commande en boucle ouverte d'un système consiste à introduire, à l'entrée de ce système, le signal $e(t)$ permettant d'obtenir à sa sortie, le signal $s(t)$ correspondant à la réponse voulue. Cela nécessite, bien sûr, la connaissance d'un modèle de fonctionnement du système, par exemple, de sa fonction de transfert $G(p)$. Ainsi, la connaissance d'un modèle de fonctionnement d'un moteur à courant continu permettra de connaître la tension d'entrée qu'il faudra lui appliquer pour obtenir telle ou telle vitesse de rotation.

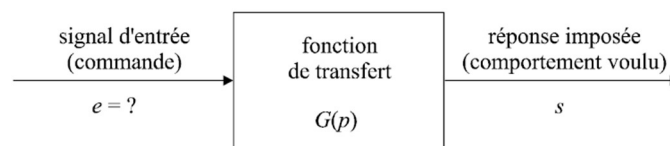


Figure 3.1 Problématique générale de la commande des systèmes.

Dans le formalisme de Laplace, on peut donc écrire : $S(p) = G(p)/E(p) \Rightarrow E(p) = S(p)/G(p)$, puis, en appliquant la transformation de Laplace inverse, on obtient l'expression temporelle de la commande:

$$E(p) \xrightarrow{\text{transformation de Laplace inverse}} e(t)$$

Malheureusement, il est pratiquement impossible, dans la pratique, de déterminer à coup sûr le signal de commande qui assurera au système le fonctionnement voulu et ce, pour deux raisons essentielles : les modèles de fonctionnement sont souvent très imparfaits et les systèmes réels sont en général soumis à des perturbations, la plupart du temps imprévisibles et difficilement modélisables.

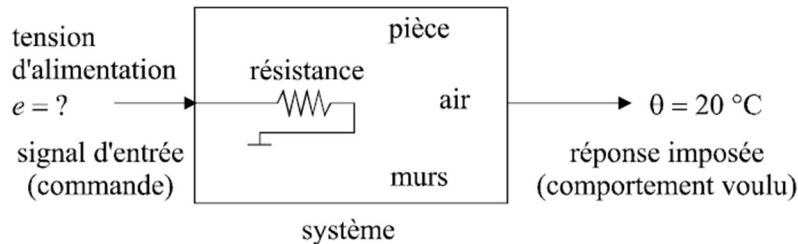


Figure 3.2 Modélisation d'un système de chauffage.

Considérons encore, à titre d'exemple, un radiateur électrique (figure 3.2). Traduisons son fonctionnement idéal souhaité par le fait que nous voulons obtenir, dans la pièce, une température de 20 °C (nous appellerons cela la température de consigne). Malgré la connaissance de la température initiale de la pièce, même si l'on a une bonne connaissance du modèle de fonctionnement du radiateur et même si l'on a modélisé les pertes de chaleur au travers des murs de la pièce, non seulement le modèle sera si complexe qu'il nous faudra le simplifier, donc le rendre imparfait, mais personne ne pourra prévoir la disparition de ce nuage qui va brutalement faire entrer le soleil dans la pièce et élever ainsi de manière tout à fait imprévisible la température, réduisant à néant nos prédictions en ce qui concerne le signal de commande (la tension que nous injectons dans la résistance chauffante du radiateur).

Et le problème est bien là : en écrivant $S(p) = G(p)E(p)$, nous avons bien affaire à un modèle prédictif et on ne peut pas, par définition, prévoir, ni même modéliser, l'imprévisible.

3.3.Principe de la commande en boucle fermée

Le principe de la commande en boucle fermée résulte d'une simple question de logique et de bon sens : pour mieux maîtriser le fonctionnement d'un système, mesurons en permanence son comportement, vérifions que ce comportement correspond bien à ce que l'on attend et utilisons cette information pour adapter le signal de commande.

Ainsi, dans l'exemple du radiateur électrique, mesurons la température et décidons, soit de chauffer si la température de la pièce est inférieure à la température voulue, soit d'arrêter de chauffer si cette température de *consigne* est atteinte (c'est le principe du thermostat).

On peut même pousser encore plus loin cette réflexion : chauffons beaucoup plus si la température mesurée est très éloignée de la température voulue et ralentissons la puissance de chauffe lorsque l'on s'approche de la consigne.

On pourrait même imaginer d'adjoindre au radiateur un système de refroidissement au cas où la température de consigne soit largement dépassée (c'est le principe des dispositifs de climatisation). En conclusion, pour mieux commander un système quelconque, il faut :

– **mesurer l'évolution de son comportement**, à l'aide d'un capteur adéquat ;

- comparer l'information délivrée par ce capteur à une valeur de consigne ;
- **utiliser la différence entre consigne et mesure** comme information permettant de construire le signal de commande. C'est ainsi que le schéma général de la figure 5.3 fait apparaître :
- **la mesure du comportement réel du système**, suivie éventuellement d'un dispositif (B) servant à adapter le signal mesuré ;
- **un soustracteur** qui calcul l'écart entre la consigne et la mesure ; ce soustracteur justifie la présence du dispositif (B), lorsque, par exemple, la grandeur mesurée n'est pas de même nature physique que la consigne : souvent, cette consigne est fournie à l'aide d'un signal électrique ; une température, une vitesse, etc. doivent être retransformées en tension avant de pouvoir être soustraites de la consigne, ce que font en général les capteurs utilisés. (B) représente donc le capteur qui transforme grandeur physique en signal électrique ;
- **un dispositif (C)** qui, éventuellement, adapte l'écart avant qu'il ne devienne le signal de commande : souvent, les signaux de consigne ou de mesure sont des signaux de faible puissance et de faible amplitude tandis que les signaux de commande sont plutôt des signaux de forte amplitude. À cet égard, rien n'empêche de considérer que ce dispositif fait partie du système et qu'il en constitue en quelque sorte l'étage d'entrée. Ainsi, on peut considérer que l'écart constitue bien le signal de commande de notre système.

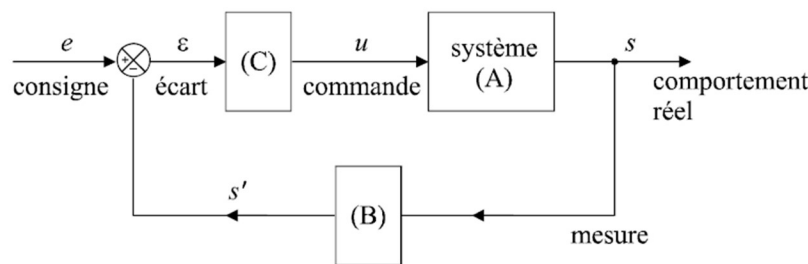


Figure 3.3 Schéma général d'une boucle de régulation.

L'ensemble constitué du système (A) et éventuellement du dispositif (C) est appelé chaîne directe ou chaîne de commande. L'ensemble constitué de la mesure et du dispositif (B) est appelée chaîne de retour ou boucle de retour. Le schéma de la figure 3.3 correspond au principe général de ce qu'on appelle communément la boucle de régulation. Le signal de consigne devient la véritable entrée du système bouclé tandis qu'on laisse le signal de commande évoluer seul.

Dans certains cas, le dispositif (B) peut être inexistant ; on parle alors de boucle à retour unitaire. Vérifions, au travers de l'exemple du radiateur électrique (figure 5.4), que ce type de schéma mérite bien cette appellation de boucle de régulation et que le signal de commande u est bel et bien construit automatiquement :

Supposons qu'il règne, à l'intérieur de la pièce, une température de $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ et que l'on mette en route le système représenté sur la figure 3.4, à un instant $t = 0$, avec pour objectif de réguler la température de la pièce à $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Supposons également que le capteur délivre une tension $v = ku$ avec $k = 1\text{ V}/^{\circ}\text{C}$.

Le signal de consigne n'est rien d'autre qu'un échelon de tension entre 0 et 20 V.

Dès que le système est mis en route, le capteur mesure la température de $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ et délivre donc une tension de 10 V ; l'écart est donc maximal : le signal de commande l'est aussi et la puissance de chauffe est importante. L'air de la pièce va donc se réchauffer, la température mesurée par le capteur croît, l'écart a donc tendance à diminuer et plus la température mesurée se rapproche de

la consigne, plus le signal de commande décroît. La puissance de chauffe diminue et il n'est pas difficile d'avoir l'intuition que ce signal a vocation à décroître vers 0 tandis que la température de la pièce va se rapprocher des 20 °C voulus. Lorsque la mesure est égale à la consigne, l'écart est nul, le système de chauffage s'arrête.

Dès que la température dans la pièce commencera à décroître, le capteur délivrera un signal inférieur à 20 V, le radiateur recommencera à chauffer (légèrement) pour maintenir la température voulue. Si on ouvre brutalement la fenêtre, la température peut chuter de manière importante ; l'écart entre consigne et mesure est alors important. La puissance de chauffe le sera donc aussi, forçant le système à réagir de sorte qu'on revienne rapidement à la température de 20 °C.

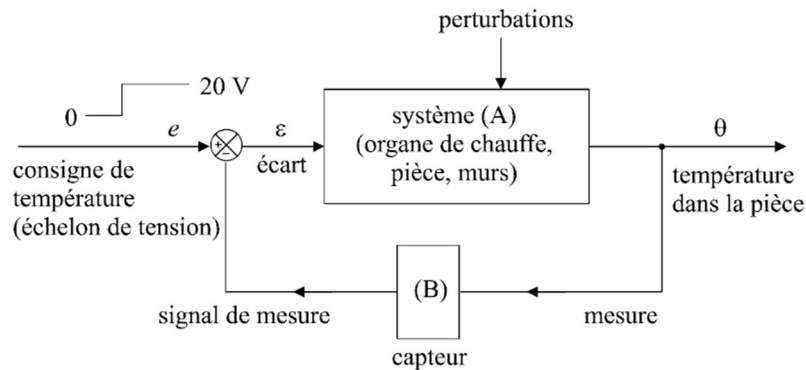


Figure 3.4 Schéma d'un système de chauffage régulé.

3.4.Modélisation d'une boucle de régulation

En formulant l'hypothèse que tous les systèmes et dispositifs impliqués dans la boucle soient linéaires, il nous est possible d'utiliser le formalisme Laplacien pour établir un modèle de fonctionnement liant l'entrée du système bouclé (le signal de consigne) à sa sortie (la grandeur physique à réguler).

La figure 3.5 propose le schéma général d'une boucle de régulation dans ce formalisme : il nous faut considérer, pour chaque signal, sa transformée de Laplace, et pour chaque élément du système, sa fonction de transfert.

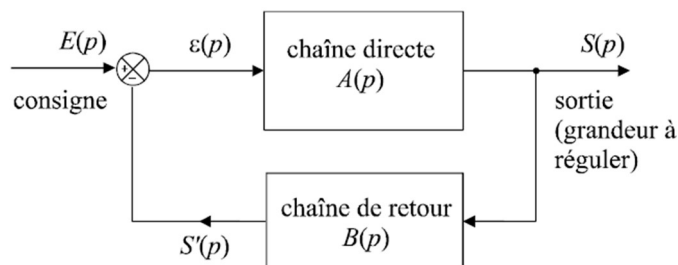


Figure 3.5 Modèle d'une boucle de régulation.

Si chaque élément de la boucle est linéaire, il nous est possible d'exprimer la sortie $S(p)$ en fonction du signal de consigne (l'entrée) $E(p)$ et ainsi, d'obtenir un modèle de fonctionnement global du système. On peut écrire :

$$S(p) = A(p) \varepsilon(p)$$

Or : $\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - B(p)S(p)$
 d'où : $S(p) = A(p) [E(p) - B(p)S(p)]$
 $S(p) [1 + A(p)B(p)] = A(p)E(p)$
 soit :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Cette expression apparaît bien comme la fonction de transfert liant la sortie et l'entrée de notre boucle de régulation.

Posons :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Définissant ainsi la *fonction de transfert en boucle fermée* de la boucle de régulation.

On définit également, pour une boucle de régulation, sa *fonction de transfert en boucle ouverte* par :

$$G(p) = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)B(p)$$

Dans le cas d'une boucle à retour unitaire, on a $B(p) = 1$. Soit :

$$G(p) = \frac{S'(p)}{E(p)} = A(p)$$

d'où :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

3.5. Le problème de la stabilité

Le problème de la stabilité est un problème général de la commande des systèmes : il pose la question suivante. *Le signal de sortie converge-t-il effectivement vers une valeur finie ou est-il susceptible de diverger ou d'osciller ?*

Ce problème est encore plus crucial dans les systèmes bouclés, compte tenu que le signal de sortie est réinjecté à l'entrée du système. Dans ces conditions, la boucle peut effectivement se comporter comme prévu, c'est-à-dire évoluer vers un état où la grandeur à réguler se rapproche de la valeur de consigne, ce que nous considérerons comme un fonctionnement stable ; mais elle peut également s'emballer, avec pour conséquence une non-convergence du signal de sortie, comportement que nous qualifierons d'instable.

Il est évident qu'il est nécessaire, lors de la conception d'une boucle de régulation, de lui assurer à tout prix un comportement stable, ce que nous étudierons dans le prochain chapitre.

3.6. Les performances d'un système régulé

À supposer qu'un système régulé possède effectivement un comportement stable (ce qui est une obligation), son fonctionnement est caractérisé par un certain nombre de performances qu'il nous faut apprendre à prévoir (c'est un minimum), voire même à corriger si elles ne sont pas satisfaisantes (c'est beaucoup mieux).

Reprenons l'exemple de la régulation du système de chauffage représenté sur la figure 5.4. Imaginons que lors de la mise en route du système, la température de la pièce soit de l'ordre de 10 °C et que la valeur de consigne soit égale à 20 °C.

Nous nous attendons alors à ce que le dispositif nous fournisse une température ambiante la plus voisine possible de 20 °C. Plus la température réelle sera voisine de la valeur de consigne, plus le système sera *précis*.

Nous nous attendons également à avoir une température de 20 °C le plus vite possible. Il n'est pas question d'attendre des heures pour disposer d'un confort thermique acceptable. Plus la valeur de consigne est atteinte rapidement en sortie du système, plus le dispositif est *rapide*. Autrement dit, il nous intéresse de disposer d'un système caractérisé par un régime transitoire le plus court possible.

La durée n'est pas la seule caractéristique du régime transitoire. Il nous faut aussi nous intéresser à sa forme, notamment à un phénomène dit de dépassement : on peut très bien imaginer que la température finale de 20 °C soit atteinte après un régime transitoire au cours duquel la température passe par un pic à 23 °C. Ceci n'est bien évidemment pas acceptable.

Précision, rapidité et limitation (voire absence) de dépassement sont trois performances essentielles d'un système asservi. Il nous faudra apprendre à les prévoir et, le cas échéant, à les corriger pour qu'elles puissent satisfaire à un cahier des charges imposé.

3.7.Exercices

3.7.1. Calcul d'une fonction de transfert en boucle fermée

On considère la boucle de régulation représentée sur la figure 3.6. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système et sa fonction de transfert en boucle fermée.

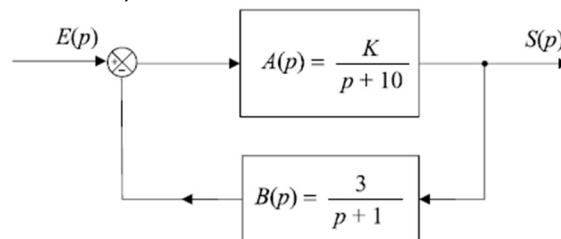


Figure 3.6 Boucle de régulation.

3.7.2. Réduction à retour unitaire d'une boucle de régulation

On considère la boucle de régulation représentée sur la figure 5.7. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système et sa fonction de transfert en boucle fermée. Proposer un schéma équivalent à cette boucle de régulation dans laquelle le retour sera unitaire.

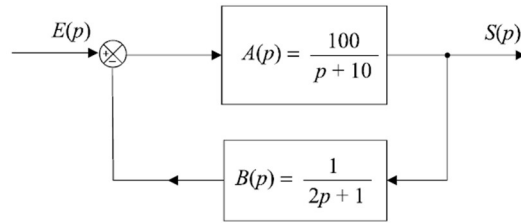


Figure 3.7 Boucle de régulation.

3.7.3. Calcul d'une fonction de transfert d'une double boucle

On considère la boucle de régulation représentée sur la figure 3.8. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système et sa fonction de transfert en boucle fermée.

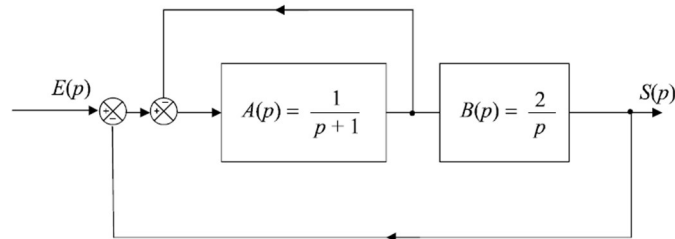


Figure 3.8 Boucle de régulation en BF

3.7.4. Calcul de la fonction de transfert d'un système perturbé

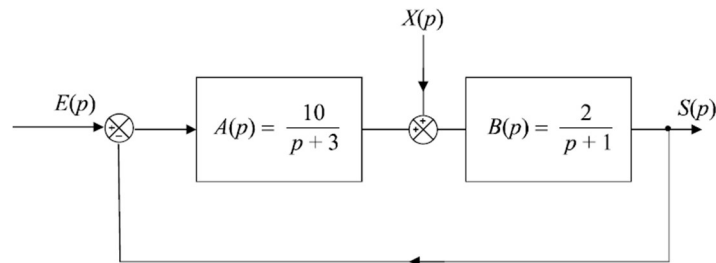


Figure 3.9 Boucle de régulation perturbée.

Dans le schéma de la figure 3.9, on a modélisé les perturbations susceptibles d'agir sur la chaîne directe d'une boucle de régulation par le signal $X(p)$. Calculer l'expression de $S(p)$ en fonction de $E(p)$, $X(p)$ et des différentes fonctions de transfert des éléments du système. Calculer la fonction de transfert $H_1(p)$ définie par :

$$H_1(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \text{ lorsque } X(p) = 0$$

Calculer la fonction de transfert $H_2(p)$ définie par :

$$H_2(p) = \frac{X(p)}{E(p)} \text{ lorsque } E(p) = 0$$

3.7.5. Fonction de transfert à retour régulé

Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système représenté sur la figure 3.10.

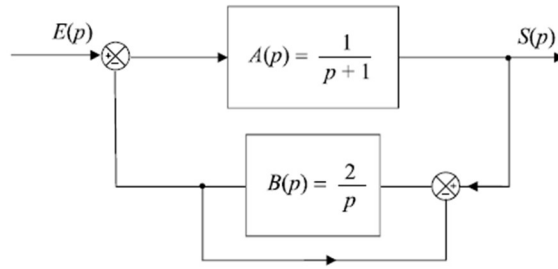


Figure 3.10 Boucle de régulation à retour réglé.

3.7.6. Détermination de l'état d'équilibre d'un système en boucle fermée

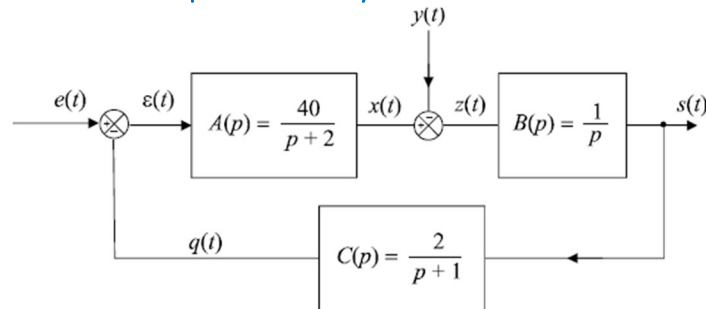


Figure 3.11 Boucle d'asservissement.

Le système asservi de la figure 3.11 est supposé stable. On applique, à l'instant $t = 0$, deux signaux $e(t)$ et $y(t)$ qui sont respectivement un échelon unité et un échelon de hauteur 4. Soit $e(t) = u(t)$ et $y(t) = 4 \cdot u(t)$.

Déterminer, en régime permanent, la valeur de tous les signaux présents dans cette boucle

3.7.7. Mise en équation et étude d'un asservissement de niveau dans une cuve

On considère une cuve parallélépipédique de section $S = 800 \text{ cm}^2$ munie d'un flotteur raccordé à une vanne. La vanne assure le remplissage de la cuve avec un débit q proportionnel à la différence de hauteur d'eau par rapport à une hauteur de consigne $h_0 = 24 \text{ cm}$. La vanne est donc fermée si $h = h_0$ et ouverte au maximum lorsque la cuve est vide. On notera k ce coefficient de proportionnalité et on donne : $k = 0,002 \text{ m}^2/\text{s}$.

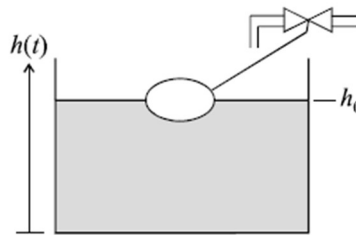


Figure 3.12 Commande du niveau d'eau dans une cuve.

Établir le schéma fonctionnel du système en faisant apparaître une boucle de régulation. h_0 correspond à la consigne, $h(t)$ correspond à la réponse du système. Établir la fonction de transfert en boucle fermée de ce système.

On suppose que la cuve se vide brutalement. Calculer le temps de réponse du système qui donne un ordre de grandeur du temps de remplissage de la cuve.

3.7.8. Solution

3.7.1 Il suffit d'appliquer les définitions des fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée. Ainsi, En boucle ouverte :

$$G(p) = A(p)B(p) = \frac{3K}{(p+10)(p+1)}$$

En boucle fermée :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{\frac{K}{(p+10)}}{1 + \frac{3K}{(p+10)(p+1)}}$$

soit :

$$H(p) = \frac{K(p+1)}{K(p+1)(p+10) + 3K}$$

3.7.2 Par définition, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{\frac{100}{(p+10)}}{1 + \frac{100}{(p+10)(2p+1)}}$$

Soit

$$H(p) = \frac{100(2p+1)}{(p+10)(2p+1) + 100} = \frac{100(2p+1)}{2p^2 + 21p + 110}$$

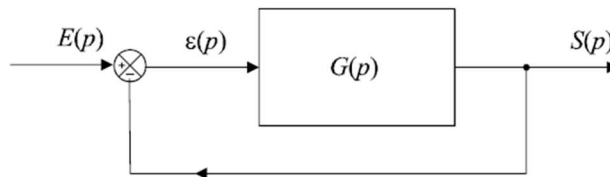


Figure 3.12 Boucle à retour unitaire.

A priori, nous pourrions rechercher un schéma équivalent dont la forme est représentée sur la figure 3.12. Un tel système posséderait une fonction de transfert en boucle fermée égale à :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

On devrait donc avoir :

$$\frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{100(2p+1)}{2p^2 + 21p + 110}$$

Plutôt que de rechercher une telle fonction de transfert, ce qui n'est pas obligatoirement possible, on préfère modifier la boucle en incluant la boucle de retour dans la chaîne directe (figure 3.13).

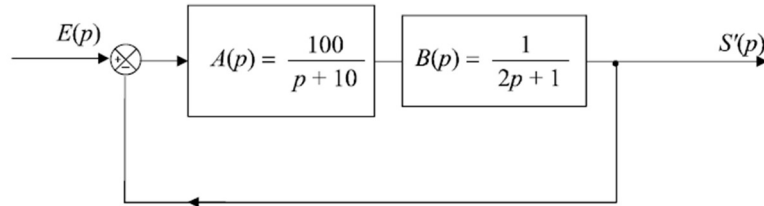


Figure 3.13 Transformation de la boucle de régulation.

Dans ces conditions, le système n'est plus tout à fait équivalent au système initial. La nouvelle sortie correspond en réalité à $S'(p)$, le signal $S(p)$ se retrouvant à la sortie du bloc $A(p)$. Si on désire retrouver $S(p)$ à la sortie du système, il suffit de transformer $S'(p)$ en plaçant, en sortie, comme indiqué sur la figure 3.14, un bloc de fonction de transfert :

$$\frac{1}{B(p)} = 2p + 1$$

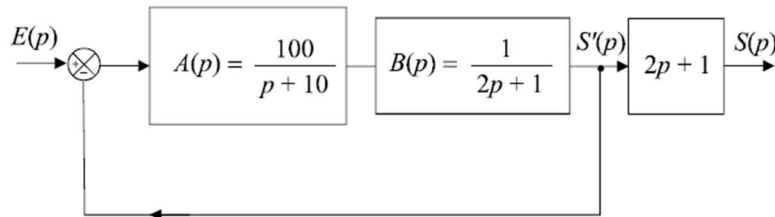


Figure 3.14 Transformation finale de la boucle de régulation.

3.7.3 Commençons par transformer le bloc constitué de $A(p)$. Soit $\varepsilon(p)$ le signal d'entrée du bloc et soit $X(p)$ son signal de sortie (figure 3.15). Appelons $A'(p)$ sa fonction de transfert en boucle fermée. Soit :

$$A'(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}.$$

Cette boucle étant à retour unitaire, on a :

$$A'(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{1}{p + 2}.$$

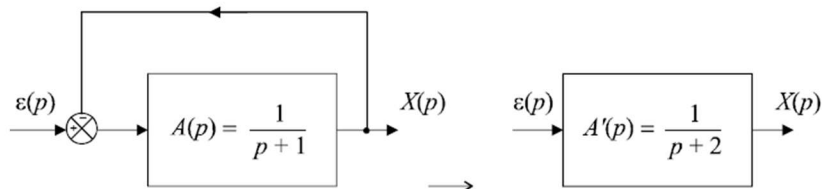


Figure 3.15 Réduction du bloc intermédiaire.

Nous pouvons donc remplacer l'ensemble du bloc par un système de fonction de transfert $A'(p)$, comme indiqué sur la figure 3.16. À partir de ce schéma simplifié, nous pouvons sans peine calculer successivement la fonction de transfert en boucle ouverte ou fermée :

$$G(p) = A'(p)B(p) = \frac{1}{p+2} \cdot \frac{2}{p} = \frac{2}{p(p+2)}$$

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{2}{p(p+2)+2} = \frac{2}{p^2+2p+2}$$

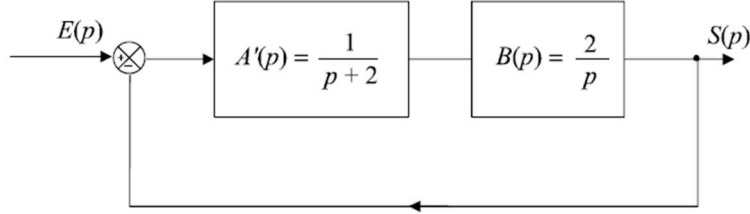


Figure 3.16 Boucle de régulation simplifiée.

Exprimons simplement le signal de sortie : $S(p) = B(p) [X(p) + A(p)' B(p)]$

Soit : $S(p) = B(p)X(p) + A(p)B(p) [E(p) - S(p)]$

$$S(p) [1 + A(p)B(p)] = B(p)X(p) + A(p)B(p)E(p)$$

$$S(p) = \frac{B(p)}{1 + A(p)B(p)} X(p) + \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)} E(p)$$

Par conséquent :

$$H_1(p) = \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)} \quad H_2(p) = \frac{B(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

3.7.4 Commençons par transformer le bloc constitué de $B(p)$. Soit $S(p)$ le signal d'entrée du bloc et soit $X(p)$ son signal de sortie (figure 3.17). Appelons $B'(p)$ sa fonction de transfert en boucle fermée. Soit :

$$B'(p) = \frac{S(p)}{X(p)}$$

Cette boucle étant à retour unitaire, on a :

$$B'(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{B(p)}{1 + B(p)} = \frac{2}{p+2}$$

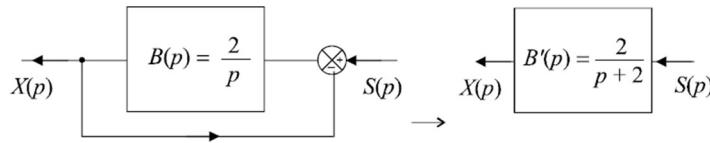


Figure 3.17 Réduction du bloc intermédiaire.

Nous pouvons donc remplacer l'ensemble du bloc par un système de fonction de transfert $B'(p)$, comme indiqué sur la figure 3.18. À partir de ce schéma simplifié, nous pouvons sans peine calculer successivement la fonction de transfert en boucle ouverte ou fermée :

$$G(p) = A(p)B'(p) = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{2}{p+2} = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

$$H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{2}{(p+1)(p+2)+2} = \frac{2}{p^2+3p+4}$$

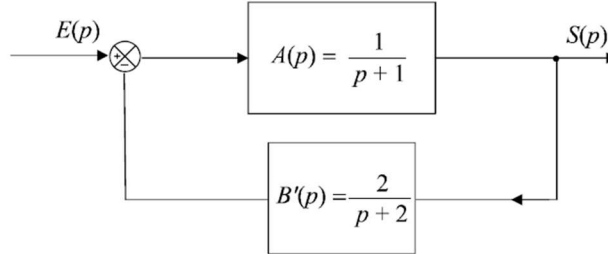


Figure 3.18 Boucle de régulation simplifiée.

3.7.5 Comme le système est supposé stable, tous les signaux tendent vers une valeur finie en régime permanent autrement dit lorsque $t \rightarrow +\infty$.

En particulier, $s(t) \rightarrow s_\infty$ qui est une valeur finie. Par conséquent, le signal d'entrée de l'intégrateur $B(p)$ ne peut tendre que vers 0, sinon, $s(t)$ ne pourrait pas converger. On a donc : $z_\infty = 0$.

Comme $y(t) = 4$ pour tout t , on a bien sûr : $y_\infty = 4$. On en déduit donc que :

$$x_\infty = z_\infty + y_\infty = 4$$

En régime permanent, chaque fonction de transfert se comporte comme un gain constant (son gain statique). Pour le système de fonction de transfert $A(p)$, ce gain statique, obtenu en faisant tendre p vers 0, est égal à $10/3$. On a donc :

$$\varepsilon_\infty = \frac{2x_\infty}{40} = \frac{2}{10} = 0,2$$

Comme $e_\infty = 1$, on a : $\varepsilon_\infty = e_\infty - q_\infty \Rightarrow q_\infty = e_\infty - \varepsilon_\infty = 1 - 0,2 = 0,8$. Pour finir :

$$s_\infty = \frac{0,8}{2} = 0,4$$

En conclusion :

$$\begin{cases} e_\infty = 1 \\ \varepsilon_\infty = 0,2 \\ x_\infty = 4 \\ y_\infty = 4 \\ s_\infty = 0,4 \\ q_\infty = 0,8 \end{cases}$$

3.7.5 Si on considère que la vanne est le système à commander et que le flotteur constitue le capteur de hauteur, nous devons considérer une boucle d'asservissement dont le schéma correspond à la figure 3.19.

Cette vision est conforme au fonctionnement du système : le signal $H_0(p)$ constitue la consigne, la hauteur $H(p)$ est mesurée par le flotteur et comme la vanne est commandée directement par la différence de hauteur $H_0(p) - H(p)$, on aura $B(p) = 1$. On a :

$$q = \frac{dV}{dt} = S \frac{dh}{dt} = k(h_0 - h)$$

Ce qui donne :

$$SpH(p) = k[H_0(p) - H(p)]$$

D'où

$$H(p) = \frac{k}{Sp} [H_0(p) - H(p)]$$

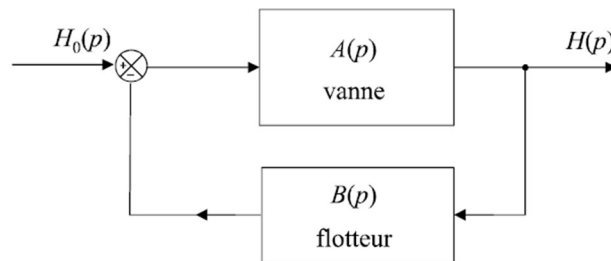


Figure 3.19 Modélisation du dispositif.

Comme le système qui lie $[H_0(p) - H(p)]$ à $H(p)$ n'est autre que $A(p)$, on en déduit :

$$A(p) = \frac{H(p)}{H_0(p) - H(p)} = \frac{k}{Sp}$$

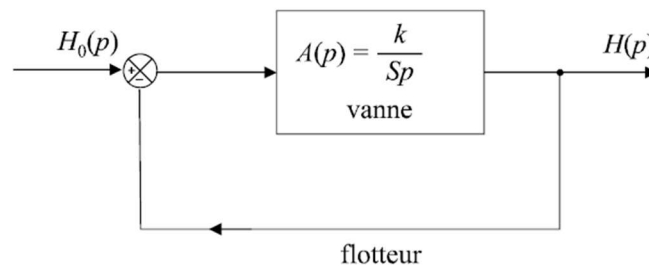


Figure 3.20 Modélisation de la boucle d'asservissement.

On peut donc calculer aisément la fonction de transfert en boucle fermée, que nous prendrons soin de nommer, exceptionnellement par une autre variable que H . Soit :

$$T(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{\frac{k}{Sp}}{1 + \frac{k}{Sp}} = \frac{1}{1 + \frac{S}{k}p} = \frac{1}{1 + \frac{0,08}{0,002}p} = \frac{1}{1 + 40p}$$

Si la cuve se vide brutalement, tout se passe comme si on appliquait brutalement, à l'entrée du système, un signal de consigne de hauteur 24 cm. S'agissant d'un système du premier ordre, nous

savons que le temps de réponse est de l'ordre de trois fois la constante de temps. Or celle-ci, visiblement, est égale à 40 s. Par conséquent : $t_r \approx 3 \times 40 \text{ s} = 120 \text{ s} = 2 \text{ mn}$
La cuve mettra donc environ 2 minutes à se remplir.

Chapitre 5

Stabilité des systèmes linéaires asservis

- Critère mathématique de stabilité,
- Critère algébrique de Routh,
- Exercices,
- Solutions

3.8. Critère mathématique de stabilité

3.8.1. Énoncé du critère de stabilité

Un système bouclé est stable si et seulement si sa sortie, autrement dit la grandeur physique réelle à réguler reste bornée lorsque l'on injecte un signal borné à son entrée. Dans la pratique, on exige que le signal de sortie converge effectivement vers une valeur finie. D'une manière plus générale, aucun signal dans la boucle de régulation, ne doit osciller ou tendre vers l'infini.

Remarque : Dans certains cas, notamment celui des systèmes non linéaires, on peut tolérer la présence d'oscillations dans les signaux, du moment qu'elles restent d'amplitudes limitées.

La stabilité d'un système asservi est une condition obligatoire : l'instabilité est en général synonyme de destruction du système. La condition mathématique de stabilité s'énonce ainsi : Un système asservi est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée ne possède aucun pôle à partie réelle positive. Même si elles ne constituent pas une démonstration complète à proprement parler, les lignes qui suivent permettent de justifier ce résultat qui est l'un des théorèmes les plus fondamentaux de l'automatique. Considérons le schéma général d'un système asservi représenté sur la figure 4.1. Sa fonction de transfert en boucle fermée est :

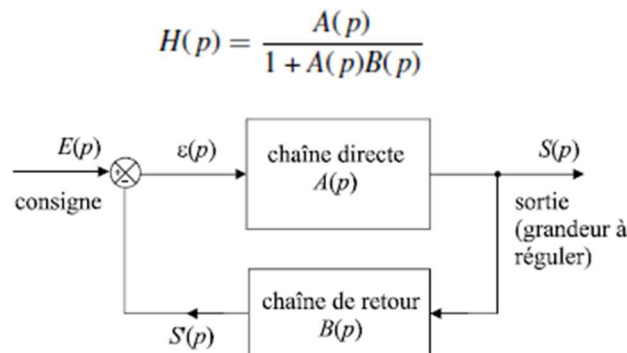


Figure 4.1 Schéma général d'une boucle de régulation.

Cette fonction de transfert est une fraction rationnelle de deux polynômes en p , factorisables dans le corps des complexes :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

Les p_i sont les n pôles de $H(p)$. Les z_j sont ses m zéros. Ces pôles et zéros peuvent être réels ou complexes.

Si un échelon de consigne unitaire est placé à l'entrée du système, on a :

$$S(p) = \frac{H(p)}{p} = \frac{\alpha \prod_{j=1}^m (p - z_j)}{p \prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

Imaginons une décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle et séparons, dans cette décomposition, les termes correspondant à des pôles réels r_i et ceux correspondant à des pôles complexes $\tau_k + j\omega_k$:

$$S(p) = \frac{a}{p} + \sum_i \frac{b_i}{p - r_i} + \sum_k \frac{b_k}{p - (\tau_k + j\omega_k)}$$

La transformée inverse de $S(p)$ est :

$$s(t) = au(t) + \sum_i b_i e^{r_i t} + \sum_k b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$$

Cette expression nous montre déjà que la présence d'un pôle réel positif r_i introduit dans le signal de sortie, une exponentielle croissante tendant vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. Le système ne peut donc pas être stable s'il existe un pôle réel positif.

Par ailleurs, les termes $b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t}$ peuvent s'écrire :

$$b_k e^{(\tau_k + j\omega_k)t} = b_k e^{\tau_k t} b_k e^{j\omega_k t}$$

Ces termes, en se recombinant avec les termes $b_k e^{(\tau_k - j\omega_k)t}$ (la présence d'un pôle complexe entraîne obligatoire la présence de son conjugué), vont donner naissance à des termes de la forme :

$$e^{\tau_k t} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t)$$

Les termes de ce type ne peuvent converger vers une valeur finie que si la partie réelle τ_k des pôles correspondant est négative. La présence d'un pôle complexe à partie réelle positive entraîne donc l'instabilité du système.

En rassemblant les deux cas, on montre bien que le système ne peut être stable que si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

3.8.2. Inconvénients du critère mathématique

Le critère mathématique énoncé précédemment possède l'avantage d'être inconditionnel et universel. Toutefois, il possède un certain nombre d'inconvénients.

- Il nécessite non seulement la connaissance de la fonction de transfert mais il suppose également que l'on soit capable de calculer ses pôles. Cette tâche peut être aisée pour des systèmes d'ordres peu élevés, mais elle devient très vite ardue pour des systèmes d'ordres élevés ou qui possèdent de nombreux paramètres.
- La fonction de transfert n'est qu'un modèle qui peut parfois, pour des raisons de simplifications nécessaires, être éloigné de la réalité physique de l'objet qu'il décrit. Le critère mathématique diagnostique la stabilité ou l'instabilité d'un système correspondant au modèle choisi et l'on ne peut jamais être sûr que le système réel, quant à lui, est stable ou pas.
- Pour finir, les lois qui régissent les systèmes physiques peuvent évoluer dans le temps : des pièces peuvent s'user ou des éléments peuvent être sensibles à des variations des conditions de l'environnement extérieur. Un système stable aujourd'hui peut très bien devenir instable par la suite. Il résulte de ces considérations, d'une part que le critère mathématique est la plupart du temps difficile à utiliser dans la pratique et d'autre part, qu'il possède un caractère trop « binaire ». Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à des critères plus faciles à mettre en œuvre et surtout à ceux qui introduisent une notion de marge de stabilité, autrement dit qui permettent de quantifier la stabilité comme une performance en faisant apparaître la notion de système plus ou moins stable. Plus un système sera stable, plus il aura des chances de le rester et les imprécisions de modélisation seront bien évidemment moins dangereuses.

3.9. Critère algébrique de Routh

3.9.1. Principe

Le critère algébrique de *Routh* ne permet pas de définir une telle notion de marge de sécurité, mais il autorise le diagnostic de stabilité pour des systèmes d'ordre élevé et possédant de surcroît, un ou plusieurs paramètres :

Soit $H(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée et soit $D(p)$ le dénominateur de $H(p)$. $D(p)$ est un polynôme de degré n :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0.$$

On applique le critère de *Routh* en plaçant la suite de coefficients a_i dans un tableau, sur deux lignes, dans l'ordre des n décroissants, alternativement une ligne sur deux. On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire, selon l'algorithme présenté sur le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \dots & a_1 \\
 a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \dots & a_0 \\
 \hline
 \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} & \dots & \frac{a_{n-1}a_1 - a_n a_0}{a_{n-1}} & \dots & &
 \end{array}$$

On dispose alors d'un tableau de trois lignes, la troisième ligne possédant moins de termes que les précédentes. On complète alors cette troisième ligne, à droite, par des zéros.

$$\begin{array}{cccccc}
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & a_1 & \\
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & a_0 & \\
 b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_0 & 0 &
 \end{array}$$

On recommence le même calcul sur les deux dernières lignes pour créer une quatrième ligne.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_n & & a_{n-2} & & a_{n-4} & \cdots & a_1 \\
 a_{n-1} & & a_{n-3} & & a_{n-5} & \cdots & a_0 \\
 b_m & & b_{m-1} & & b_{m-2} & b_0 & 0 \\
 \frac{b_m a_{n-3} - a_{n-1} b_{m-1}}{b_m} & & \frac{b_m a_{n-5} - a_{n-3} b_{m-2}}{b_m} & & \cdots & &
 \end{array}$$

On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ai plus que des 0 sur la ligne.

Le nombre de pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert $H(p)$ est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne. En conséquence, le système est stable en boucle fermée si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

Remarque - Le nombre maximal de lignes est égal au nombre de termes dans le polynôme $D(p)$, autrement dit à l'ordre du système, plus 1.

3.9.2. Exemple

Soit:

$$G(p) = \frac{K}{p(p^2 + p + 3)}$$

un système placé dans une boucle de régulation à retour unitaire (figure 4.2).

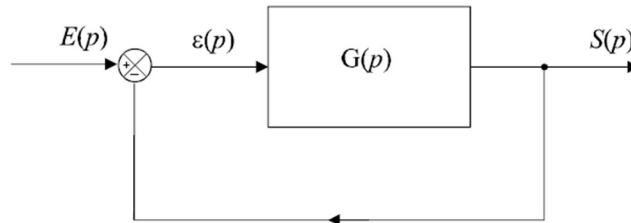


Figure 6.2 Boucle de régulation étudiée.

Calculons sa fonction de transfert en boucle fermée:

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{\frac{K}{p(p^2 + p + 3)}}{1 + \frac{K}{p(p^2 + p + 3)}} = \frac{K}{p(p^2 + p + 3) + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$D(p) = p(p^2 + p + 3) + K = p^3 + p^2 + 3p + K$$

Appliquons le critère de *Routh* en construisant le tableau suivant :

$$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & K \\ 3 - K & 0 \\ K & 0 \end{array}$$

Remarque - Une cinquième ligne ne serait composée que de 0.

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne, donc que $3 - K > 0$. Le système est donc stable si $K < 3$.

3.10. Exercices

3.10.1. Stabilité d'un système du premier ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{1 + Tp} \text{ avec } K > 0 \text{ et } T > 0$$

Montrer que ce système, placé dans une boucle à retour unitaire, est stable en boucle fermée quelle que soit la valeur du gain statique K .

3.10.2. Stabilité d'un système du second ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1} \text{ avec } K > 0, \xi > 0 \text{ et } \omega_n > 0$$

Montrer que ce système, placé dans une boucle à retour unitaire, est stable en boucle fermée quelle que soit la valeur du gain statique K .

3.10.3. Stabilité d'un système du troisième ordre

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par:

$$G(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer à l'aide du critère de *Routh* les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

3.10.4. Stabilité d'un système du troisième ordre à un pôle triple

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par:

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)^3} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer à l'aide du critère de *Routh* les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

3.10.5. Stabilité d'un système du troisième ordre à un pôle double

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+3)^2} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer à l'aide du critère de *Routh* les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

3.11. Solutions

3.10.1 La stabilité peut ici être facilement étudiée par le calcul de l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée. On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{Tp + 1 + K}$$

L'unique pôle de cette fonction de transfert en boucle fermée est :

$$p_1 = -\frac{K+1}{T}$$

Ce pôle est négatif, de toute évidence. Par conséquent le système est stable quelle que soit la valeur du gain statique K .

3.10.2 La fonction de transfert en boucle fermée a ici pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 + K}$$

Cette fonction de transfert possède deux pôles que nous pouvons facilement calculer. Calculons pour ce faire le discriminant du trinôme situé au dénominateur :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4\xi^2}{\omega_n^2} - \frac{4(1+K)}{\omega_n^2} = \frac{4}{\omega_n^2} [\xi^2 - (1+K)]$$

Si $\xi^2 - (1+K) > 0$, $\Delta > 0$ et la fonction de transfert $H(p)$ possède alors deux pôles réels ayant pour expressions :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_n} \pm \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\xi^2 - (1+K)}}{\frac{2}{\omega_n^2}}$$

De toute évidence:

$$\frac{2}{\omega_n} \sqrt{\xi^2 - (1+K)} < \frac{2\xi}{\omega_n}$$

Par conséquent, les deux pôles p_1 et p_2 sont toujours strictement négatifs. Dans ce cas, le système est donc toujours stable en boucle fermée.

Si $\xi^2 - (1+K) = 0$, $\Delta = 0$ et la fonction de transfert $H(p)$ possède alors un pôle réel double ayant pour expression :

$$p_1 = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_n}}{\frac{2}{\omega_n^2}} = -\xi\omega_n$$

Ce pôle est toujours négatif. Par conséquent le système est toujours stable en boucle fermée.

Si $\xi^2 - (1 + K) < 0$, $\Delta < 0$ et la fonction de transfert $H(p)$ possède alors deux pôles complexes conjugués ayant pour expressions :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_n} \pm j \frac{2}{\omega_n} \sqrt{(1 + K) - \xi^2}}{\frac{2}{\omega_n^2}}$$

La partie réelle de ces deux pôles est toujours négative. Le système est donc stable en boucle fermée. En conclusion, quels que soient les cas étudiés, le système proposé est toujours stable en boucle fermée.

3.10.3 Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{p(p+1)(p+2) + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert a pour expression :

$$D(p) = p(p+1)(p+2) + K = p^3 + 3p^2 + 2p + K$$

Établissons la table de *Routh* pour étudier la condition de stabilité :

1	2
3	K
6 - K	0
K	0

Le système est stable en boucle fermée s'il n'y a aucun changement de signe dans la première colonne, donc si $K < 6$.

3.10.4 Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(p+1)^3 + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert a pour expression :

$$D(p) = (p+1)^3 + K = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K$$

Établissons la table de *Routh* pour étudier la condition de stabilité :

1	3
3	K + 1
$\frac{8 - K}{3}$	0
K	0

Le système est stable en boucle fermée s'il n'y a aucun changement de signe dans la première colonne, donc si $K < 8$.

6.5 Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{p(p+3)^2 + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert a pour expression :

$$D(p) = p(p+3)^2 + K = p^3 + 6p^2 + 9p + K$$

Établissons la table de Routh pour étudier la condition de stabilité:

$$\begin{array}{cc} 1 & 9 \\ 6 & K \\ 54 - K & 0 \\ K & 0 \end{array}$$

Le système est stable en boucle fermée s'il n'y a aucun changement de signe dans la première colonne, donc si $K < 54$.