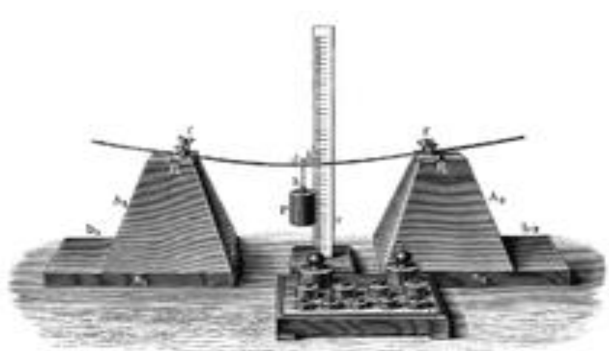
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**Université Mohammed Seddik BENYAHIA - Jijel**
**Faculté des Sciences et de la Technologie**
**Département : Génie Civil et Hydraulique**
**Spécialité : Travaux public**

**Polycopié de cours :**

# Poutre et treillis

**Préparé et présenté par :**
**Dr. HAMAIDIA Achref**



**Année 2020/2021**

# Chapitre 1
# Sollicitations composées

## Table des matières

# 1 Introduction :

Les sollicitations simples (compression, cisaillement, torsion, flexion simple et traction) agissent isolement : Les contraintes et les déformations qu'elles provoquent se calculent assez facilement. Cependant les organes de machines les poutres, les charpentes métalliques : subissent le plus souvent les sollicitations complexes et simultanées dites **sollicitations composées** :

Flexion accompagné de traction ou de compression, flexion accompagné de torsion, torsion accompagné de compression ou traction. Le mode de calcul des contraintes et des déformations engendré par ces sollicitations composées est l'objet de ce chapitre.

# 2 Flexion déviée simple (flexion oblique)

## 2.1 Définition

On parle de flexion déviée simple ou flexion oblique lorsque les sollicitations qui provoquent la flexion agissent dans un plan passant par l'axe de la poutre mais ne coïncident avec aucun des plans principaux. (Voir Fig.1.1)

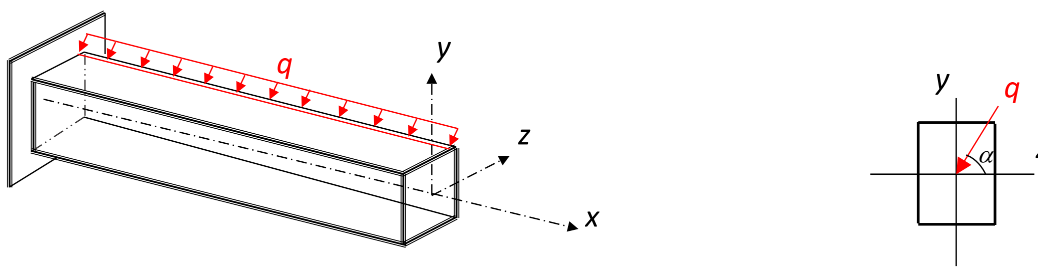



Fig.1.1

L'étude de la flexion déviée revient à considérer la flexion déviée comme la combinaison de deux flexion simples agissant dans les deux plans principaux xz et xy. (voir Fig.1.2)

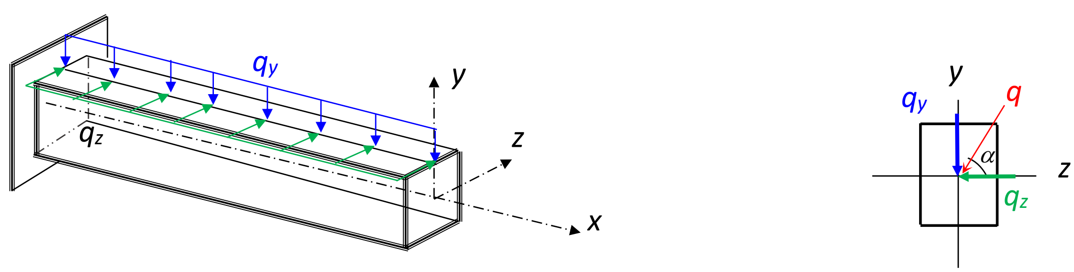



Fig. 1.2

- En flexion déviée simple, N=0.

### 2.2 Les Contraintes et les déformations

Pour étudier les contraintes et les déplacements, le plus simple est de décomposer la force transversale selon z et y puis on calcule Mz et My à partir des deux composantes de la force. (**Fig1.3**)

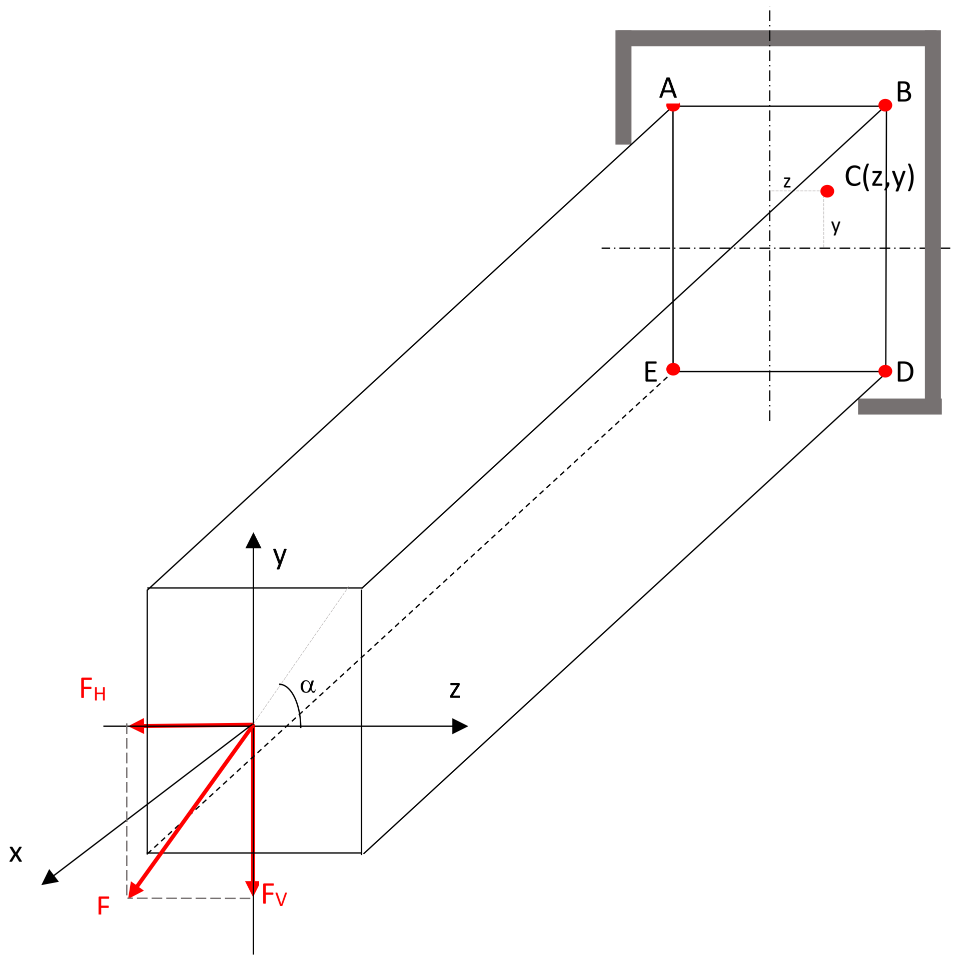



Fig1.3

Dans la section d'appui :

- Le moment fléchissant subi par la section de la barre dans le plan vertical d'axe neutre z :

$$M_z = F_V.L = F.L.sin(\alpha)$$

- Le moment fléchissant subi par la section de la barre dans le plan horizontal d'axe neutre y :

$$M_y = F_H.L = F.L.cos(\alpha)$$

### 2.2.1 Contraintes normales

Les contraintes normales pour des points situés dans le premier quadrant du système (par exemple le point c) se détermine par la somme des contraintes dues au moment $M_z$ et $M_y$ en vertu de principe de superposition.

$$\sigma(y,z) = -\frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z$$

La somme est algébrique.

### 2.2.2 La ligne neutre

C'est le lieu géométrique des points où $\sigma(y,z)$=0, a pour équation :

$-\frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z = 0 \quad \rightarrow \quad y = -z\left(\frac{M_y}{M_z}\frac{I_z}{I_y}\right)$ ;C'est la droite n-n'

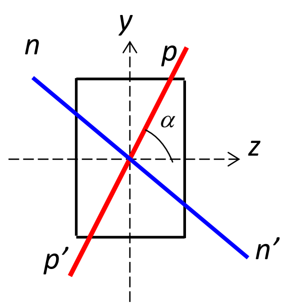



**Fig.1.4**

n-n': ligne neutre

pp' :ligne de force ou de moment fléchissant

En flexion déviée, la ligne neutre (n-n') n'est pas perpendiculaire au plan du moment fléchissant.

### 2.2.3 Détermination des points dangereux

Les points présentant un danger sont les points de la section où apparait la contrainte maximale en valeur absolue. Etant donné que l'épure des contraintes normales dans la section est linéaire, $\sigma(z,y)$ max apparait au points les plus éloignés de la ligne neutre.(voir figure 1.5)

Si $(z_1, y_1)$ sont les cordonnés de ce point alors :

$$\sigma_{max} = \left|-\frac{M_z}{I_z}y_1 - \frac{M_y}{I_y}z_1\right|$$

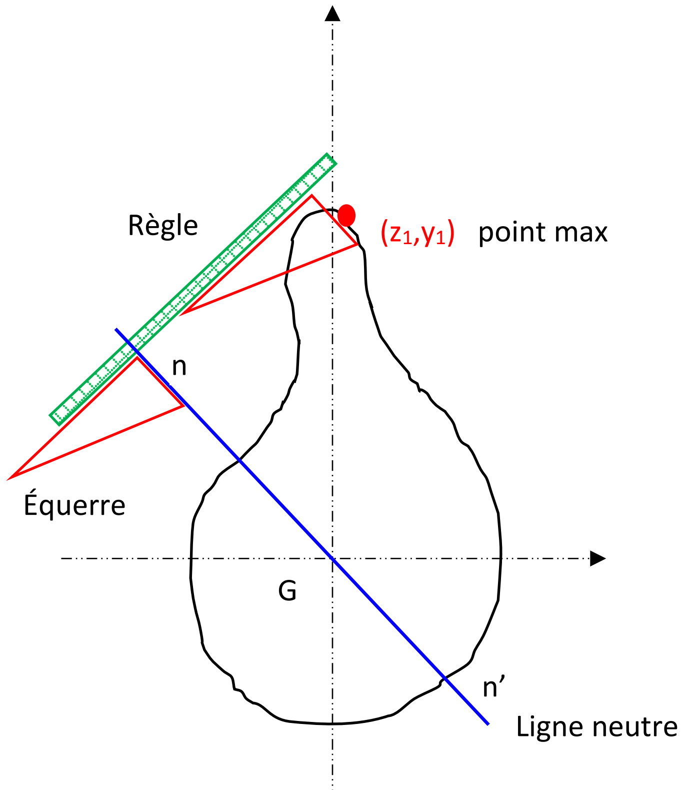



**Fig.1.5**

Si la section comporte les points angulaires en saillie ( , ) telle que $Z_{max}$ et $Y_{max}$ sont atteint simultanément (section rectangulaire et section en H ). Les points présentant un danger sont les points angulaires de la section où sont sommées les contraintes de même signe.

Par exemple sur le schéma de la figure (1.3), les points les plus dangereux sont **B** et **E.**

$$\sigma_B = -\frac{M_z}{2\,I_z}h - \frac{M_y}{2\,I_y}b \quad \text{et} \quad \sigma_E = \frac{M_z}{2\,I_z}h + \frac{M_y}{2\,I_y}b$$

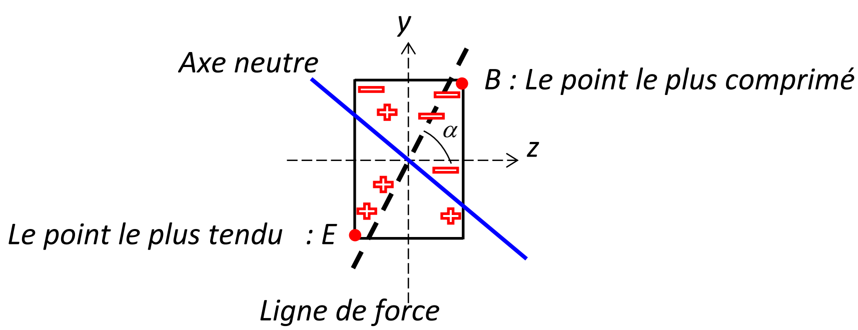



**Fig 1.6**

a) Choix de la section

Le calcul de vérification de la résistance s'effectue à la base des données sur la contrainte totale maximale. Pour une section symétrique on a:

$$\sigma_{max} = \left| -\frac{M_{zmax}}{I_z} y_{max} - \frac{M_{ymax}}{I_y} z_{max} \right| \leq [\sigma_{adm}{}^{+}]$$

$$\sigma_{min} = -\left| -\frac{M_{zmax}}{I_z} y_{max} - \frac{M_{ymax}}{I_y} z_{max} \right| \leq [\sigma_{adm}{}^{-}]$$

**2.3 Exemple d'application**

Dimensionner une poutre d'un toit simplement appuyée de longueur L = 6 m. Le rapport h/b = 2, l'angle entre le toit et l'horizontale est de 35°. La charge verticale q = 0.5 kN/m est répartie sur toute la longueur. On donne [σ] = 15 MPa .

**Solution**

C'est une flexion déviée simple, la condition de résistance est :

$$\sigma_{max} = \left| -\frac{M_{zmax}}{I_z} y_{max} - \frac{M_{ymax}}{I_y} z_{max} \right| \leq [\sigma_{adm}{}^{+}]$$

Avec

$y_{max} = \frac{h}{2}$, $z_{max} = \frac{b}{2}$, $I_z = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$

$\begin{cases} q_y = q.sin(\alpha) \\ q_z = q.cos(\alpha) \end{cases}$ $\begin{cases} M_{ymax} = \frac{q_z L^2}{8} \\ M_{zmax} = \frac{q_y L^2}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} M_{ymax} = \frac{q\,L^2}{8} cos(\alpha) = M_{max} cos(\alpha) \\ M_{zmax} = \frac{q\,L^2}{8}\ sin(\alpha) = M_{max} sin(\alpha) \end{cases}$

$$\sigma_{max} = \left| -M_{max} \left( \frac{12}{bh^3}\frac{h}{2}\ sin(\alpha) + \frac{12}{hb^3}\frac{b}{2} cos(\alpha) \right) \right|$$

Pour $h = 2b$

$$\sigma_{max} = \left| -\frac{3}{b^3} M_{max} \left( \frac{1}{2}\ sin(\alpha) + cos(\alpha) \right) \right|$$

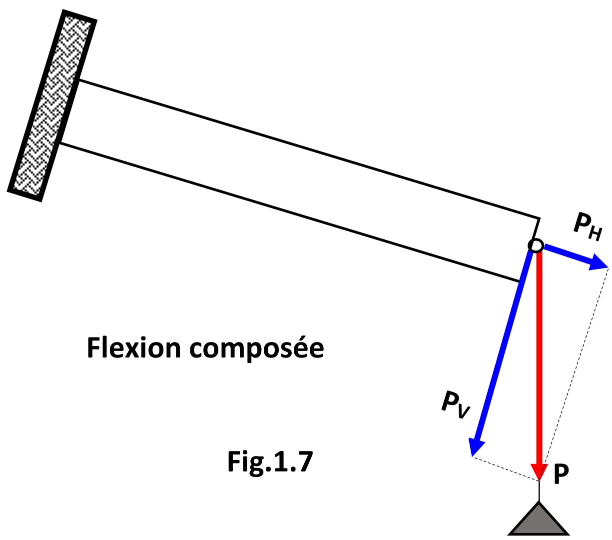
$$b^3 \geq \sqrt[3]{\frac{3}{[\sigma]} M_{max} \left( \frac{1}{2}\, sin(\alpha) + cos(\alpha) \right)}$$

**A.N**

$$b = 8cm \; et \; h = 16$$

## 3 Flexion composée

Une poutre est sollicitée en flexion composée lorsqu'elle est soumise simultanément à une flexion plane ou déviée et à un effort normal.




**Flexion composée**

**Fig.1.7**

### 3.1 Flexion plane composée

Soit une poutre soumise simultanément à la flexion plane et à la traction (flexion plane composée).

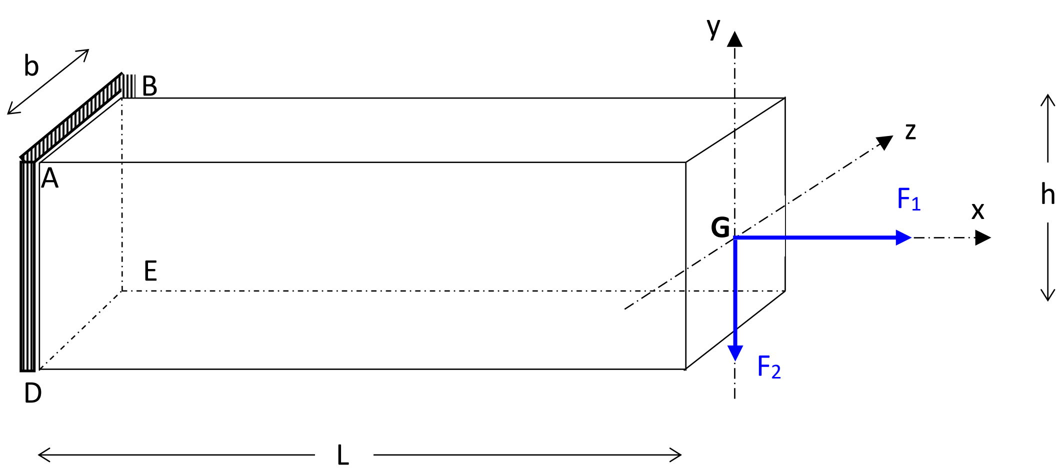



**Fig.1.8**

### 3.1.1 Calcul des contraintes

Pour déterminer les contraintes globales, on utilise le principe de la superposition des effets.

- Les contraintes dues à F1 (traction) :

  $\sigma_t = \frac{F_1}{A} = \frac{N}{A}$ ; avec F1 = N dans notre cas

- Les contraintes dues à F2 (flexion plane) :

  $$\sigma_f = -\frac{M_z}{I_z} y$$

  Les contraintes globales (flexion plane composée)

  $$\sigma = \sigma_t + \sigma_f = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y$$

  La contrainte globale atteint ses extrema pour les fibres les plus éloignées de l'axe neutre.

  $$\sigma_1 = \sigma_{max} = \left|\frac{N}{A} - \frac{M_z}{2\,I_z} h\right|$$

  $$\sigma_2 = \sigma_{min} = \left|\frac{N}{A} + \frac{M_z}{2\,I_z} h\right|$$

Les contraintes tangentielles provoquées par l'effort tranchant peuvent se calculer par la formule de Jourasky, mais comme elles sont nulles dans les fibres extrêmes où les contraintes sont maximales, elles ne jouent aucun rôle dans la résistance et de ce fait, on ne s'intéresse ici qu'aux contraintes normales. Cependant il faut vérifier à part si les contraintes tangentielles sont admissibles.

### 3.1.2 Conditions de résistance

Pour les barres qui résistent de la mémé façon à la traction et à la compression (ex : l'acier), la condition de la forme :

$$\sigma_{max} = \left|\frac{N}{A} - \frac{M_z}{2I_z} h\right| \leq \sigma_{adm}$$

- Si l'effort tranchant est pris en considération, pour déterminer la section dangereuse et le moment fléchissant max, il faut construire au préalable, le diagramme des moments fléchissant.
- Pour les barres qui résistent de façon différente à la traction et à la compression, la résistance doit être vérifier vis-à-vis des contraintes de traction et des contraintes de compression (2 vérifications à faire).

### 3.2 Flexion déviée composée

En pratique, la flexion se trouve souvent combinée avec la traction (compression) suite à une application excentrée de la sollicitation parallèle à l'axe de la barre en sorte que la résultante F ne coïncide pas avec l'axe de cette dernière. (voir figure 1.9)

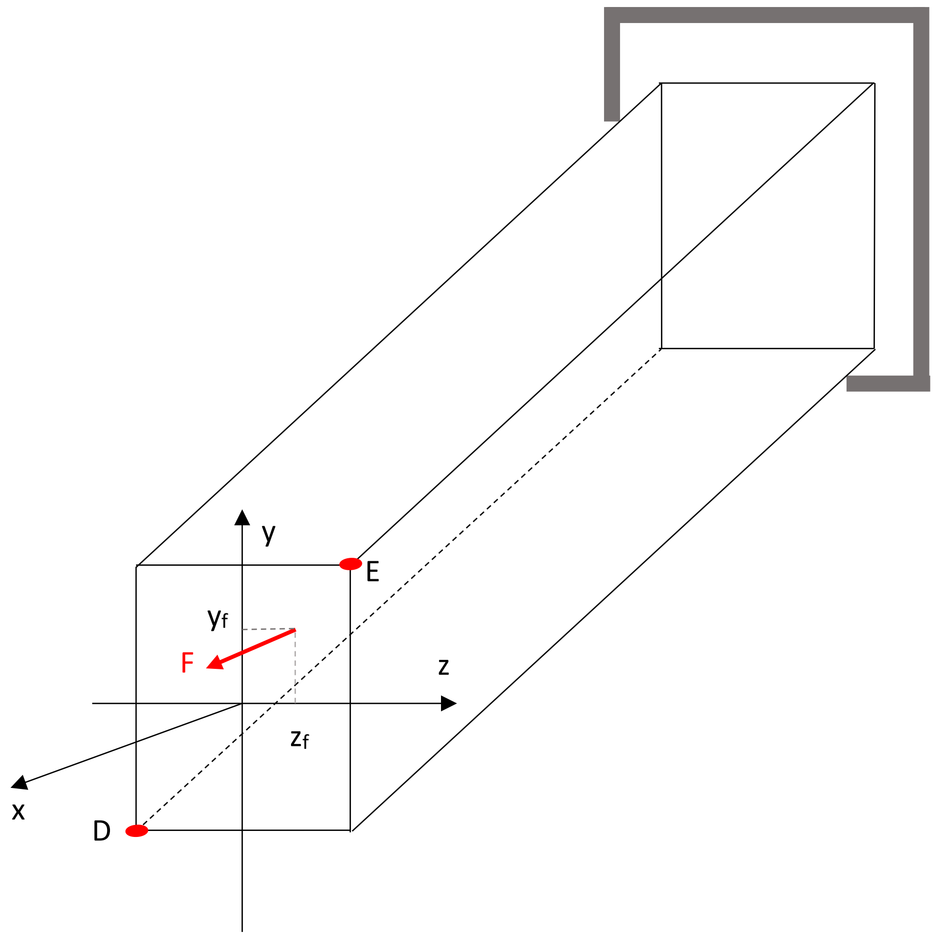



Fig. 1.9

#### 3.2.1 Calcul des contraintes

En appliquant la méthode des sections, on a dans toute section droite, on a :

- ✓ Un effort normal $N = F$
- ✓ Un moment fléchissant par rapport à l'axe z :$M_z = F.y_f = N.y_f$
- ✓ Un moment fléchissant par rapport à l'axe y :$M_y = F.z_f = N.z_f$

Par superposition, la contrainte en un point quelconque de la section droite de coordonnées (z, y) est égale :

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

Pour les sections possédant les points anguleux saillants les contraintes extrema s'écrivent :

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{2I_z} h \pm \frac{M_y}{2I_z} b$$

Dans notre exemple, la contrainte maximale est au point **E** :

$$\sigma_E = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{2I_z} h - \frac{M_y}{2I_z} b$$

- La contrainte minimale (sens algébrique) est au point **D** :

$$\sigma_D = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{2I_z} h + \frac{M_y}{2I_z} b$$

### 3.2.2 Conditions de résistance

Par rapport aux contraintes de tractions, elles s'écrivent :

$$\sigma_t = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_z}{2I_z} h + \frac{M_y}{2I_z} b \right| \le \sigma_{adm}^t$$

### 3.2.3 L'équation de la ligne neutre

Pour déterminer la position des points dangereux, il faut établir la position de la ligne neutre, dont l'équation s'obtient en annulant la contrainte.

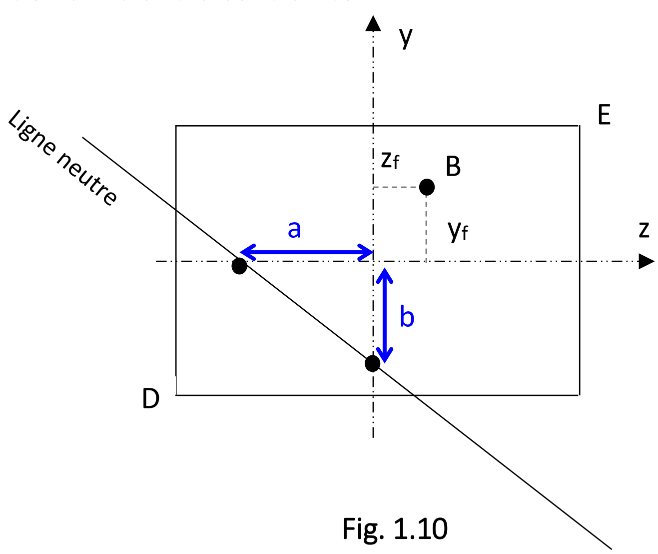



Fig. 1.10

$$\frac{N}{A} - \frac{N.y_f}{I_z} y_0 - \frac{N.z_f}{I_y} z_0 = 0$$

Où $z_0$ et $y_0$ : cordonnées courantes des points de l'axe neutre introduisons les notations :

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} \qquad \text{et} \qquad i_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

Les quantités suivantes : $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ et $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ caractérisent la géométrie de la section et s'appellent les Rayons de giration de la section par rapport aux axes z et y.

Maintenant, la formule précédente devient :

$$\frac{N}{A}\left(1 - \frac{z_f.z_0}{i_y^2} - \frac{y_f.y_0}{i_z^2}\right) = 0$$

Comme $\frac{N}{A} \neq 0$ alors

$$1 - \frac{z_f.z_0}{i_y^2} - \frac{y_f.y_0}{i_z^2} = 0$$

Ou bien :

$$\frac{z_0}{\frac{i_y^2}{z_f}} + \frac{y_0}{\frac{i_z^2}{y_f}} = 1$$

On peut la mettre sous la forme de la droite

$$\frac{z_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1$$

Où

$a = \frac{i_y^2}{z_f}$ et $b = \frac{i_z^2}{y_f}$ sont les segments sectionnés pal la ligne neutre sur les axes de cordonnées z, et y.

Le rayon de giration est toujours positif, par contre a et $z_f$ ainsi que b et $y_f$ ont des signes différents.

### 3.2.4 Diagramme des contraintes

Voir figure 1.11

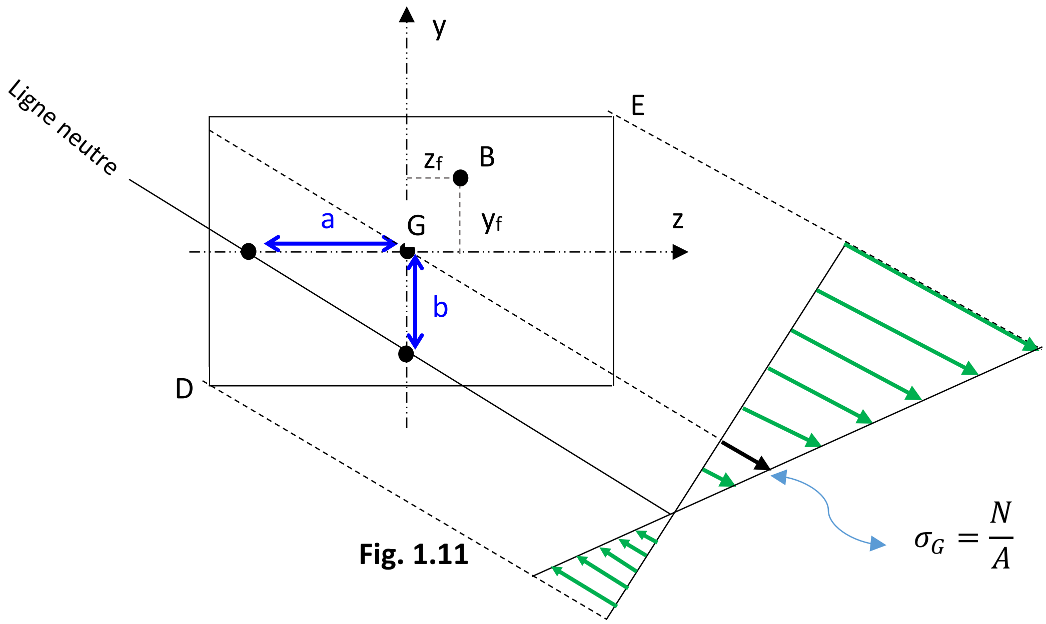



**Fig. 1.11**

### 3.2.5 Noyau central de la section

Pour les matériaux qui résistent mal à la traction (par exemple une maçonnerie en brique), il est intéressant de trouver la région de la section droite dans laquelle l'effort normal de compression excentré peut agir sans produire aucune contrainte de traction. Cette région est le noyau central de la section.

Le contour du noyau central de la section est déterminé par l'ensemble des positions des points d'application de la force excentrée qui fait passer l'axe par tous les points tangents à la section de telle manière qu'elle ne le coupe nulle part. Il en résulte que la ligne de contrainte nulle ne coupe jamais la section. Cette dernière propriété permet de déterminer le noyau central illustré ci-dessous pour la section rectangulaire.

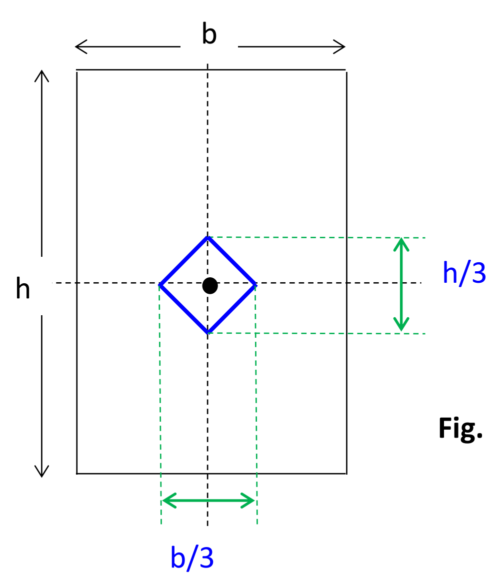



**Fig. 1.12**