

Chapitre III : Déplacement des poutres symétriques en flexion plane.

Contenu :

1. Introduction
2. L'équation différentielle de la ligne élastique.
3. Méthodes de calcul des déplacements.
 - 3.1.Méthode d'intégration directe.
 - 3.2.Méthode des paramètres initiaux.
 - 3.3.Méthode des moments des aires.
 - 3.4.Méthode des superpositions.

1. Introduction :

Lorsqu'une poutre est fléchie, elle subit des déplacements qui peuvent être divisées en point de vue géométrique en deux types : les **translations** et les **rotations**.

Les translations correspondant aux déplacements linéaires des différents points de la poutre le long de l'axe de flexion dans la direction perpendiculaire à l'axe, dont le déplacement maximale est appelé **flèche**.

Les rotations, quant à elles, représentent les déplacements angulaires des sections transversales de la poutre par rapport à leur position initiale.

Le calcul des déplacements des poutres symétriques en flexion repose sur des méthodes mathématiques basé principalement sur **l'équation différentielle de la ligne élastique**, on peut citer :

- La méthode des **paramètres initiaux**.
- La méthode des **moments des aires**.
- La méthode des **superpositions**.

Comprendre les déplacements des poutres en flexion est crucial pour concevoir des structures résistantes et sécuritaires car on doit vérifier que la flèche de la poutre ne dépasse pas la valeur de la flèche maximale permise.

Aussi, le calcul des déplacements est requis dans les calculs des systèmes hyperstatiques largement utilisés dans les différentes constructions.

2. L'équation différentielle de la ligne élastique :

D'après l'essai de flexion sur les poutres, on constate que les lignes longitudinales prennent la forme d'un arc de cercle et que les sections transversales restent planes et perpendiculaires aux lignes longitudinales. Par conséquent, la fibre neutre a une courbure dont le rayon est appelé **R**. De plus, cette courbe est appelée déformée ou ligne élastique de la poutre et peut être décrite par une équation de la forme $y = f(x)$. Les ordonnées Y représentant les flèches subies par les sections de la pièce.

Considérons une couche EF à une distance y en dessous de la couche neutre NN. Après l'essai de flexion, cette couche sera allongée à E'F'.

Longueur d'origine de la couche neutre EF=dx.

Aussi la longueur de la couche neutre NN=dx.

Après flexion, la longueur de la couche neutre N'N' restera inchangé. Par contre la longueur de la couche E'F' augmentera. On a $N'N' = NN = dx$.

R : rayon de la courbe de l'axe neutre

θ : angle entre les sections A'B' et C'D'

$$N'N' = R. \theta$$

$$E'F' = (R + y). \theta$$

$$EF = N'N' = NN = dx$$

$$dx = R. \theta$$

Augmentation de la longueur EF :

$$E'F' - EF = (R + y). \theta - R. \theta = y. \theta$$

$$\varepsilon = \frac{E'F' - EF}{EF} = \frac{(R + y). d\theta - R. d\theta}{R. d\theta} = \frac{y}{R}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \frac{E}{R} y \rightarrow \frac{M. y}{I} = \frac{E}{R} y$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M_f}{EI} \dots \dots \dots (1)$$

Equation de déformation qui permet de calculer le rayon de courbure de la poutre déformée dans une section où la valeur du moment fléchissant est M_f .

M_f : moment fléchissant.

E : module de Young.

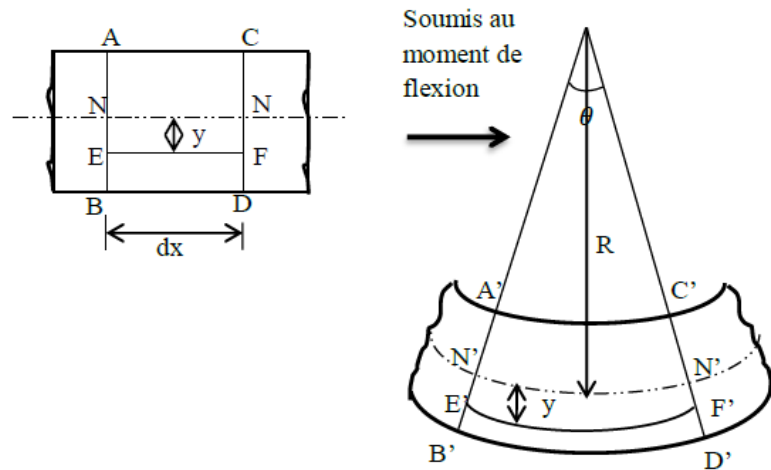
I : moment d'inertie.

R : rayon de courbure.

Considérons une poutre droite sollicitée en flexion simple par la force F en équilibre, soit AB la fibre neutre avant déformation. Après déformation, cette fibre neutre prend la forme d'une courbe AMB . Pour repérer les déplacements des différents points de cette fibre (au cours de la déformation le point C est venu en C'), choisissons le système d'axes xAy , orientés comme l'indique la figure ci-dessous. Le déplacement du point C , la flèche de la poutre en C d'abscisse x est mesurée par l'ordonnée $y=C'C$. La ligne AMB porte le nom déformé de la poutre ou de ligne élastique (voir paragraphe précédent). Pour connaître la flèche en chaque point d'abscisse x , il faut connaître l'équation $y=f(x)$ de la déformée. (Remarque : ne pas confondre y : flèche en un point avec y : distance d'une fibre à la couche neutre).

On démontre en géométrie analytique que le rayon de courbure en un point d'abscisse x d'une courbe d'équation $y=f(x)$ est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$



y' : étant la valeur que prend la dérivée première de y pour la valeur particulière de x ($\frac{dy}{dx}$)

y'' : étant la valeur que prend la dérivée seconde de y pour la valeur particulière de x ($\frac{d^2y}{dx^2}$)

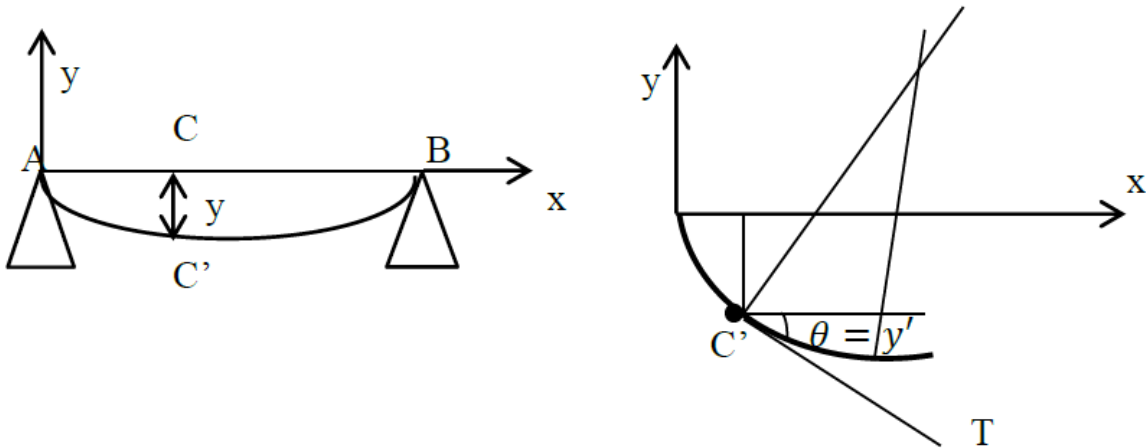
On sait d'autre part que la valeur de y' en un point est égale à la $\tan \theta$ de l'angle formé par la tangente $C'T$ à la courbe de l'axe des x . les déformations étant toujours très faibles, l'angle θ est très petit et $\tan \theta = y'$ est très petit. On peut négliger le terme y'^2 devant 1. L'expression du rayon de courbure est alors : $\frac{1}{R} = y''$

Dans l'équation (1) on obtient :

$$y'' = \pm \frac{M_f}{EI}$$

Convention de signe. Dans la suite du cours on adopte :

$$y'' = \frac{M_f}{EI} \dots \dots \dots (2)$$



3. Méthode de calcul des déplacements (y et θ) :

Pour calculer les angles de rotation et les flèches y , il faut intégrer l'équation (2), ce qui peut se faire de plusieurs méthodes, par exemple :

- Par la méthode de l'intégration directe.
- Par la méthode des équations universelles (des paramètres initiaux).
- Par la méthode des moments des aires.
- Par la méthode de superposition.

3.1 Méthode d'intégration directe :

L'équation de la déformée peut-être obtenu par intégration successive de l'équation différentielle (2). En intégrant une fois on obtient l'équation de l'angle de rotation θ :

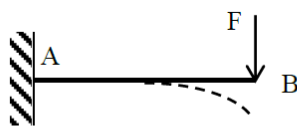
$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C_1$$

En intégrant une seconde fois, on obtient :

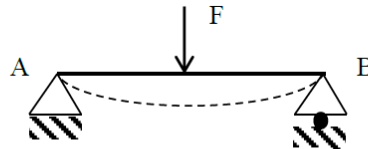
$$y(x) = \int \theta(x) = \int \left(\int \frac{M(x)}{EI} \right) dx^2 + C_1 x + C_2$$

Les constants C_1 et C_2 sont des constantes de l'intégration, déterminés à partir des conditions d'appuis de la poutre. On les appelle aussi les conditions aux limites.

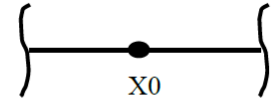
Les conditions aux limites :



$$\begin{aligned}\theta_A &= 0 \\ y_A &= 0 \\ MB &= 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}y_A &= 0 \\ y_B &= 0 \\ MA \text{ ou } MB &= 0\end{aligned}$$

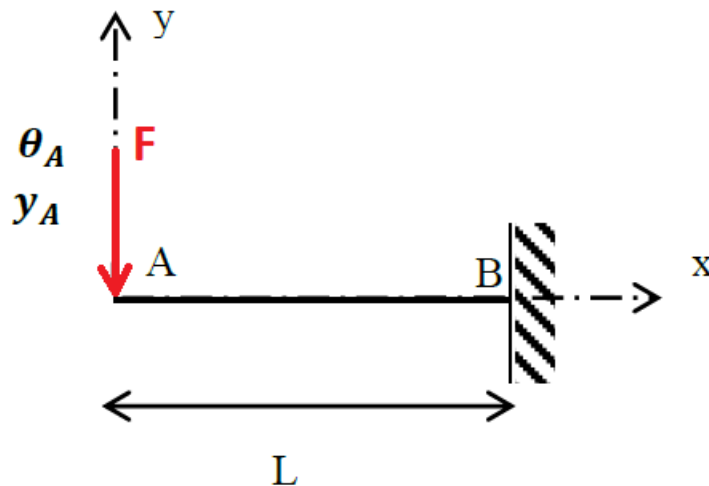


$$\begin{aligned}M^g(X_0) &= M^d(X_0) \\ y^g(X_0) &= y^d(X_0) \\ y'^g(X_0) &= y'^d(X_0)\end{aligned}$$

Il faut noter que dans le cas des poutres ayant plusieurs tronçons dont chacun possède sa propre équation du moment, il faut substituer l'expression de M dans chacune des équations différentielles et procéder à l'intégration. Les constantes d'intégration dans ce cas sont déterminées en utilisant les conditions aux appuis des extrémités de la poutre et aux conditions de continuité aux limites des tronçons.

Exemple d'application :

Déterminer l'expression de la déformée d'une console soumise à une charge uniformément répartie sur toute sa longueur ensuite calculer la flèche et rotation au point A.



Solution :

$$M(x) = -F \cdot x \text{ Donc : } y''(x) = \frac{1}{EI} (-F \cdot x) \dots \dots \dots (1)$$

$$1^{\text{ère}} \text{ intégration donne : } y'(x) = \theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-F \frac{x^2}{2} + C_1 \right) \dots \dots \dots (2)$$

$$2^{\text{ème}} \text{ intégration donne : } y(x) = \frac{1}{EI} \left(-F \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \right) \dots \dots \dots (3)$$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} x = L \rightarrow y'(x = L) = 0 \rightarrow C_1 = F \frac{L^2}{2} \\ x = L \rightarrow y(x = L) = 0 \rightarrow C_2 = -F \frac{L^3}{3} \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} y'(x) = \theta(x) = \frac{1}{EI} \left(-F \frac{x^2}{2} + F \frac{L^2}{2} \right) \\ y(x) = \frac{1}{EI} \left(-F \frac{x^3}{6} + F \frac{L^2}{2} \cdot x - F \frac{L^3}{3} \right) \end{cases}$$

$$\text{Au point A (x = 0) : } \begin{cases} \theta_A = \frac{FL^2}{2EI} \\ y_A = \frac{-FL^3}{3EI} \end{cases}$$

3.2 Méthode des paramètres initiaux :

Pour le cas d'une poutre constituée de plusieurs tronçons. Il est difficile de déterminer la déformée par la méthode d'intégration directe : ça revient à résoudre 2n équations, si la poutre est formée de n tronçons, pour déterminer les 2n constantes d'intégrations. Il est facile de contourner cette difficulté si on utilise la méthode des paramètres initiaux, car cette dernière elle ne nécessite pas d'intégrer les équations différentielles pour chaque tronçon de la poutre, elle consiste à déterminer les déplacements on se base sur les conditions initiales du problème.

Si on prend l'origine des coordonnées aux points situés à l'extrême gauche de la poutre, les expressions de y(x) et $\theta(x)$ sont données par les équations :

$$EI \cdot \theta(x) = EI \cdot \theta_0 + \sum M_i \frac{(x-a_i)}{1!} + \sum P_i \frac{(x-b_i)^2}{2!} + \sum q_{ci} \frac{(x-c_i)^3}{3!} - \sum q_{di} \frac{(x-d_i)^3}{3!} + \sum q_{ci}' \frac{(x-c_i)^4}{4!} - \sum q_{di}' \frac{(x-d_i)^4}{4!}$$

$$EI \cdot y(x) = EI \cdot y_0 + EI \cdot \theta_0 \frac{x}{1!} + \sum M_i \frac{(x-a_i)^2}{2!} + \sum P_i \frac{(x-b_i)^3}{3!} + \sum q_{ci} \frac{(x-c_i)^4}{4!} + \sum q_{di} \frac{(x-d_i)^4}{4!} + \sum q_{ci}' \frac{(x-c_i)^5}{5!} - \sum q_{di}' \frac{(x-d_i)^5}{5!}$$

Ces équations s'appellent équations universelles de l'axe fléchi d'une poutre ou équation des paramètres initiaux dont :

M : moments concentrés extérieurs ou à l'encastrement.

a : distance entre l'origine des coordonnées et les points d'application des moments M

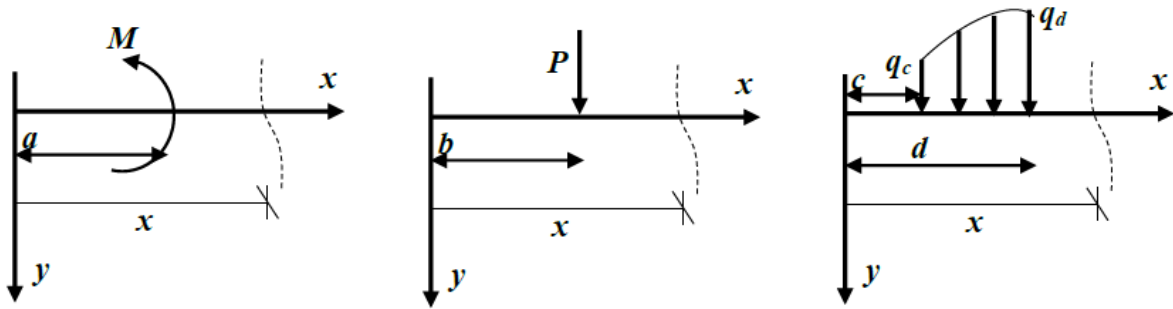
P : les forces concentrées y compris les réactions

b : distance entre l'origine des coordonnées et les points d'application des moments P

q_c et q_d : respectivement, les intensités au début et à la fin de la charge répartie

q_c' et q_d' : respectivement, les valeurs des dérivées de la charge q aux points $x=c$ et $x=d$

Les directions des charges sont positives comme indiquées ci-dessous :



Les paramètres initiaux y_0 et θ_0 sont déterminés par les conditions d'appui de la poutre.

3.3 Méthode des moments des aires :

La méthode des « moments d'aires » concerne la déformation des poutres en flexion, et permet de calculer la pente et la flèche d'une poutre. La méthode des moments d'aires est une méthode par intégration géométrique permettant de calculer la déformée d'une poutre en la reliant à un diagramme M/EI .

Théorème 01 : Calcul de la variation de l'angle θ

Une poutre AB porte un certain type de charge, et donc soumise à un moment de flexion comme indiqué dans la figure ci-dessus.

Soit A un point de pente nulle et de déviation nulle. Considérons un élément de petite longueur dx à une distance x de B. on a :

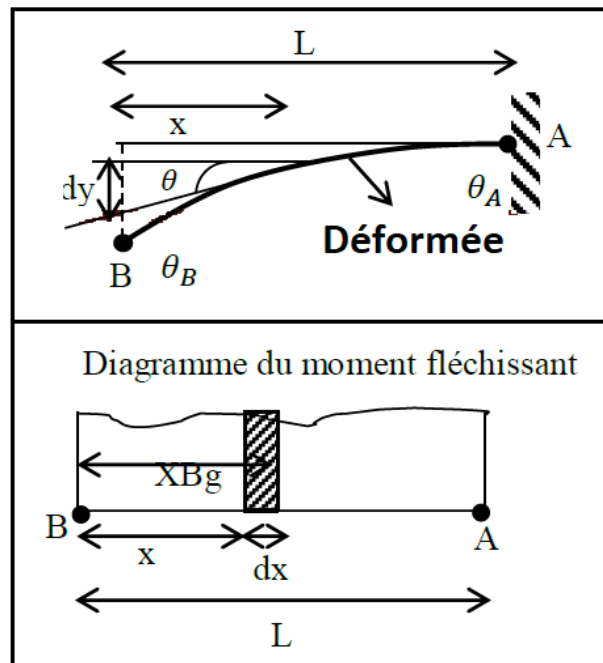
$$y'' = \frac{M_f}{EI} \rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{M_f}{EI}$$

$$dy' = d\theta = \frac{M_f}{EI} dx$$

$$\int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M_f}{EI} dx$$

$$\theta_B - \theta_A = \frac{1}{EI} \text{aire}[M_f]_{x_A}^{x_B}$$

Le changement de l'angle entre deux points sur la courbe élastique (la déformée) d'une poutre fléchie est égal à l'air du diagramme du moment fléchissant entre ces points sur la rigidité EI .



Théorème 02 : Calcul de la flèche

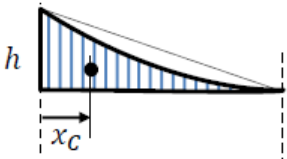
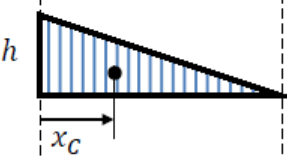
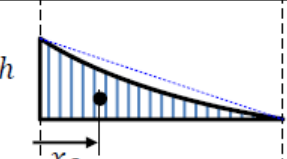
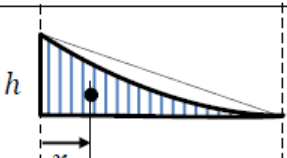
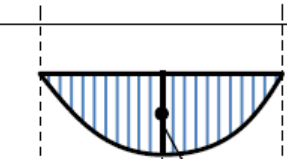
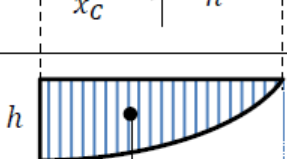
$$d\theta \cong \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{x} \rightarrow dy = (x)d\theta$$

$$\int dy = \frac{1}{EI} \int_{x_A}^{x_B} (x) M dx \rightarrow y_{BA} = x_{BG} \operatorname{aire} \left[\frac{M_f}{EI} \right]_{x_A}^{x_B}$$

Avec : x_{BG} Distance entre point B et le centre de gravité de la section $\left[\frac{M_f}{EI} \right]_{x_A}^{x_B}$

Remarques :

Si l'épure de M a une forme compliquée, on peut la décomposer en figures simples (voir tableau ci-dessous) pour lesquelles les aires et les coordonnées des centres de gravites sont connues.

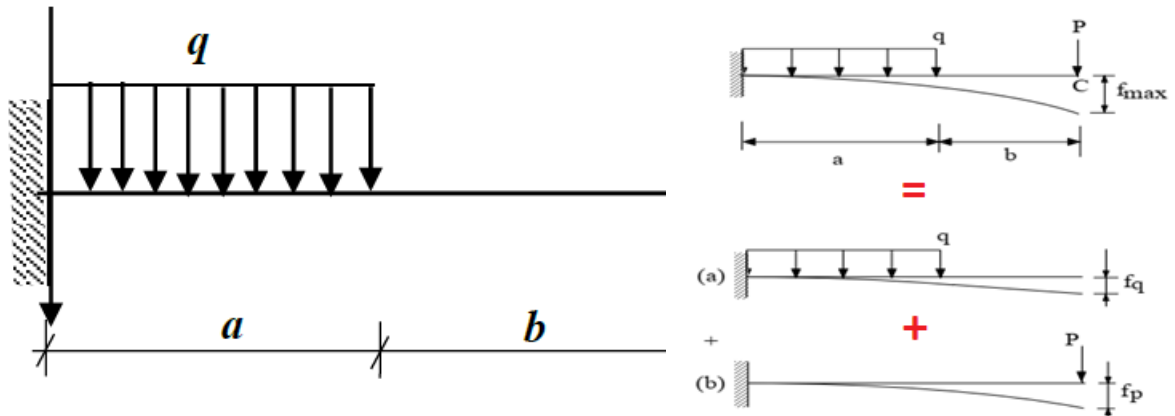
<i>Epure $M(x)$</i>	<i>L'abscisse du CDG x_c</i>	<i>Aire</i>
 Parabole du n° degré	$l / n+2$	$lh / n+1$
 triangle	$l/3$	$lh/2$
 Parabole du 2° degré	$l/4$	$lh/3$
 Parabole du 3° degré	$l/5$	$lh/4$
 Parabole du 2° degré	$l/2$	$2lh/3$
 Parabole du 2° degré	$3l/8$	$2lh/3$

3.4 Méthode des superpositions :

Les sollicitations vues dans les cours précédent sont rarement présentées seules. Les équations dans la résistance des matériaux sont linéaires. Les déformations dues à plusieurs cas de charges peuvent être donc superposées ou cumulées. Cette méthode est surtout utilisée quand le chargement est composé de plusieurs cas de charge élémentaire ou les déformations.

Exemple d'application :

Déterminer la flèche maximale de la poutre ci-dessous.



Solution :

$$f_{\max} = f_q + f_p$$

$$f_q = \frac{qa^3(4L-a)}{24EI}$$

$$f_p = \frac{qL^3}{3EI}$$

$$f_{\max} = \frac{qa^3(4L-a)}{24EI} + \frac{qL^3}{3EI}$$

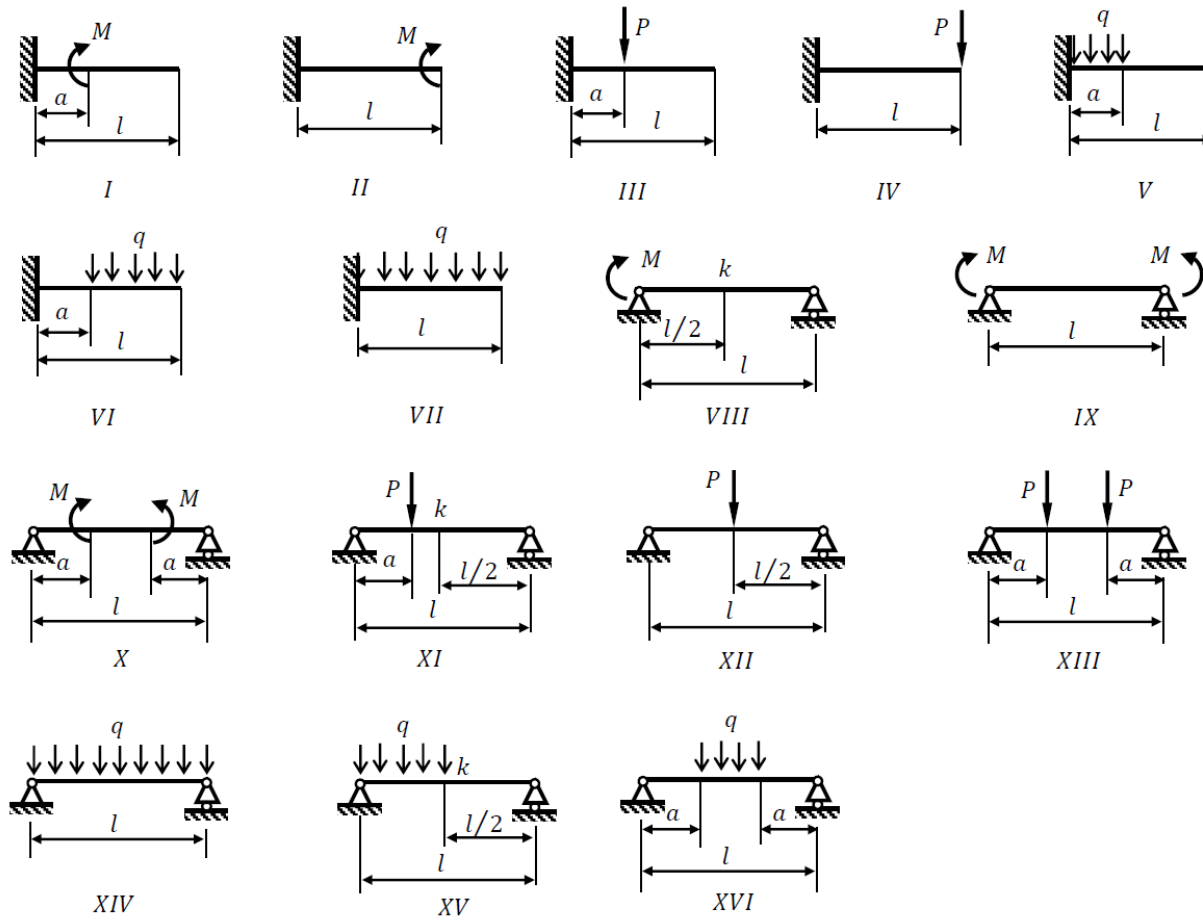
Valeurs des flèches maximales pour des chargements les plus courants :

schéma	Flèche maxi de la poutre (EI-rigidité de la section)	schéma	Flèche maxi de la poutre (EI-rigidité de la section)
<i>I</i>	$\frac{Ma}{EI} \left(l - \frac{a}{2} \right)$	<i>IX</i>	$\frac{Ml^2}{8EI}$
<i>II</i>	$\frac{Ml^2}{2EI}$	<i>X</i>	$\frac{M}{2EI} \left(\frac{l^2}{4} - a^2 \right)$
<i>III</i>	$\frac{Pa^2}{2EI} \left(l - \frac{a}{3} \right)$	<i>XI</i>	$\delta_k = \frac{Pa}{48EI} (3l^2 - 4a^2); a < \frac{l}{2}$
<i>IV</i>	$\frac{Pl^3}{3EI}$	<i>XII</i>	$\frac{Pl^3}{48EI}$
<i>V</i>	$\frac{qa^3}{24EI} (4l - a)$	<i>XIII</i>	$\frac{Pa}{2EI} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right)$
<i>VI</i>	$\frac{ql^4}{24EI} \left(3 - 4 \frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} \right)$	<i>XIV</i>	$\frac{5ql^4}{384EI}$
<i>VII</i>	$\frac{ql^4}{8EI}$	<i>XV</i>	$\delta_k = \frac{5ql^4}{768EI}$
<i>VIII</i>	$\delta_k = \frac{Ml^2}{16EI}$	<i>XVI</i>	$\frac{q}{48EI} \left(\frac{5}{8} l^4 - 3l^2 a^2 + 2a^4 \right)$