République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Notes de cours

pour

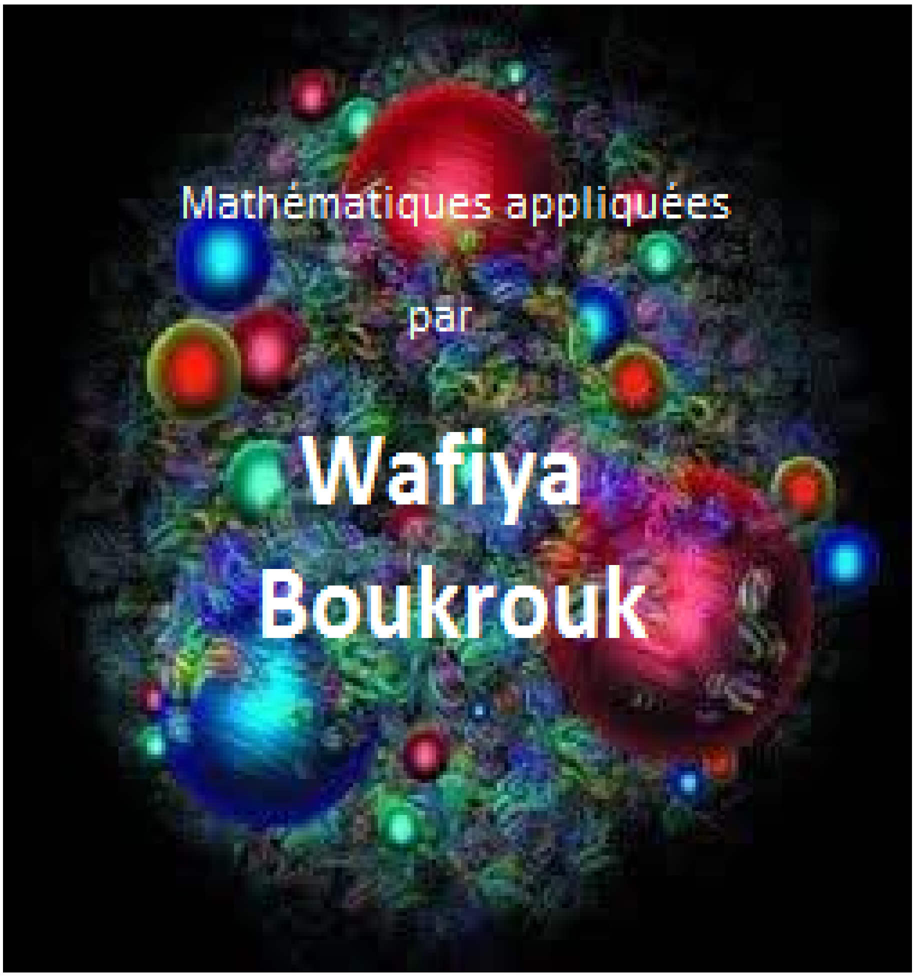
deuxième année LMD, chimie/physique.

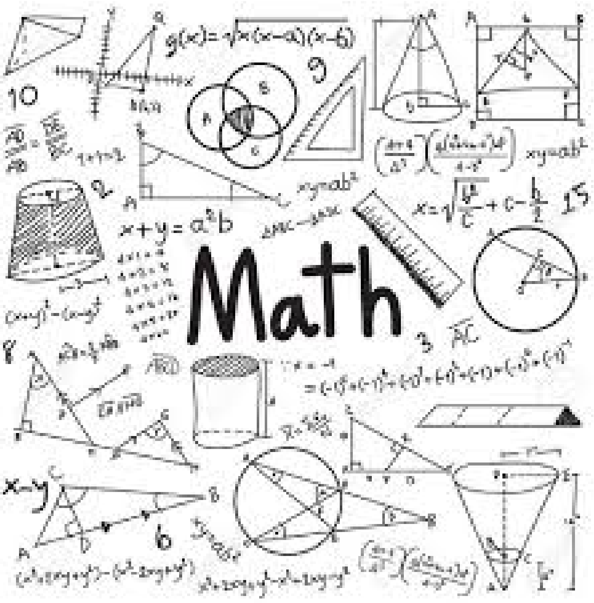
Mathématiques appliquées

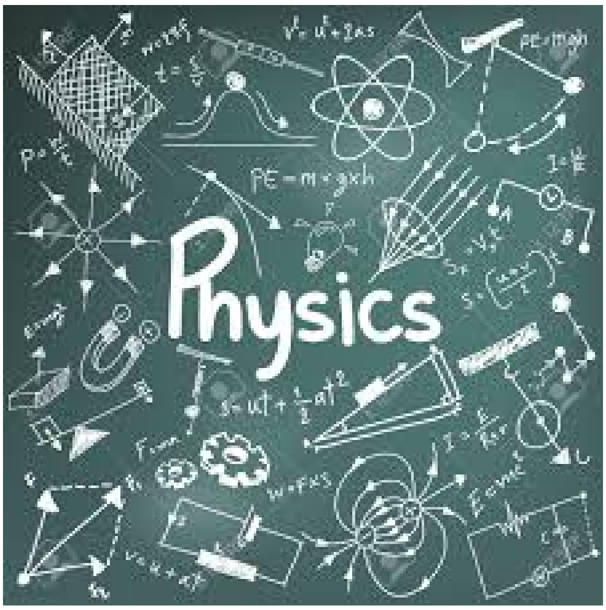
par

Wafiya Boukrouk

"On se souviendra d'Archimède quand on aura oublié Eschyle, parce que les langues meurent, mais pas les idées mathématiques."


Mathématiques appliquées
par
Wafiya
Boukrouk


Math


Physics

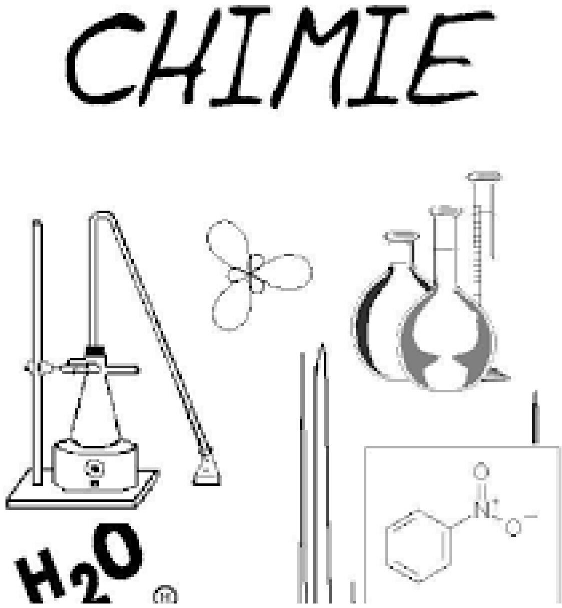

CHIMIE
H2O

Table des matières

Introduction **1**

1 Intégrales Simples et Multiples (3 semaines) **2**

1.1 Intégrales Simples . . . 2

1.1.1 Primitives . . . 2

1.1.2 **Intégrale de Riemann** . . . 6

1.1.3 **Intégrale et primitives** . . . 14

1.2 Intégrales multiples . . . 15

1.2.1 **Intégrales doubles et applications** . . . 16

1.2.2 **Intégrales triples et applications** . . . 26

1.3 Exercices . . . 32

2 Intégrales généralisées (2 semaines) **35**

2.1 Propriétés . . . 37

2.2 Intégrale de Riemann . . . 37

2.3 Intégrales de Bertrand . . . 37

2.4 Critères de convegence des intégrales généralisées . . . 38

2.4.1 Pour les fonctions positives : . . . 38

2.4.2 Pour les fonctions de signe non constant : . . . 38

2.5 Exercices . . . 39

3 Séries (3 semaines) **41**

3.1 Séries numériques . . . 41

3.1.1 Définitions et propriétés . . . 42

3.1.2 Critères deconvergence . . . 43

3.1.3 Quelques séries célèbres . . . 44

3.2 Suites et séries de fonctions . . . 45
3.2.1 Suite de fonctions . . . 45
3.2.2 Série de fonctions . . . 47
3.3 Séries entières, séries de Fourier . . . 48
3.3.1 Séries entières . . . 48
3.3.2 Séries de Fourier . . . 50
3.4 Exercices . . . 54

4 Equations Différentielles (5 semaines) 56
4.1 C'est quoi et pourquoi (motivation) ? . . . 56
4.2 Généralités . . . 58
4.3 Equations différentielles ordinaires du 1^{er} ordre . . . 60
4.3.1 À variables séparables . . . 62
4.3.2 Linéaires . . . 69
4.3.3 De Bernoulli . . . 77
4.3.4 de Riccati . . . 78
4.4 Equations différentielles ordinaires du 2^{nd} ordre . . . 79
4.4.1 EDOs du 2^{nd} ordre linéaires à coefficients constants . . . 80
4.4.2 EDOs du 2^{nd} ordre linéaires à coefficients non constants . . . 91
4.5 Changements de variables dans les équations différentielles . . . 97
4.6 Exercices . . . 101

5 Transformées de Fourier (2 semaines) 108
5.1 Définitions . . . 108
5.2 Propriétés . . . 111
5.3 Application à la résolution d'équations différentielles . . . 112
5.4 Exercices . . . 113

6 Transformées de Laplace (1 semaine) 117
6.1 Définitions . . . 117
6.2 Propriétés . . . 119
6.3 Application à la résolution d'équations différentielles . . . 120
6.4 Exercices . . . 122

Introduction

Ce cours est destiné beaucoup plus mais pas uniquement aux étudiants de deuxième année préparant une Licence en chimie ou même en physique. C'est le fruit de plusieurss années d'enseignements, que ça soit des cours donnés en amphie ou travaux dirigés en classe, au sein du département de chimie, le premier cours depuis mon recrutement à l'université de Jijel, puis le département de physique. Comme son nom l'indique, il porte sur quelques notions mathématiques très appliquées au domaine de chimie et physique, notament, ça tourne beaucoup plus autour des équations différentielles.
Le but est de donner à l'étudiant d'une part une maitrise des outils mathéatiques nécessaires dont il a besoin dans certains modules de chimie ou physique dans son parcours de Licence, mais aussi une sorte de culture générale et une ouverture d'esprit vers les différentes disciplines de la science, en plus, bien evidemant, de renforcer son résonnement logique pour un bon raisonnement scientifique.

Soumise aux exigences du caneva ainsi que le volume horaire limité, certains chapitres ont été volentairement un peu plus résumés que d'autres, gardant l'intention de les développer profondement, au future, chacun indépendement.

Amatrices des Mathématiques pures depuis ma naissance, dont je considère comme Maths artistiques, j'ai commencé à découvrir les mathématiques appliquées en enseignant ce module, que je considère comme un acqui intéressant dans mon parcours scientifique, et pour mon esprit.

Chapitre 1

Intégrales Simples et Multiples (3 semaines)

1.1 Intégrales Simples

1.1.1 Primitives

Prennons pour exemple la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x$, nous savons qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée est $x \mapsto f'(x) = 2$. Mais, existe-il une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa fonction dérivée est égale à f ?

Effectivement, oui. Il suffit de prendre la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x^2$, on a bien $F'(x) = 2x = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On appelle F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^2 + \frac{3}{5}$ est aussi une primitive. En fait, il y on a une infinité de primitives, ce sont toutes les fonctions $x \mapsto x^2 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

De même, la fonction $x \mapsto \cos x - 1$ admet comme primitives les fonctions $x \mapsto \sin x - x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$. Les primitives de la fonction $x \mapsto e^x$ sont les fonctions $x \mapsto e^x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

• Attention, il existe des fonctions qui n'admettent aucune primitive.

Définition 1.1.1. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I (I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$). S'il existe une fonction F définie et dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, on dit que F est* ***une primitive*** *de f sur I.*

Notation. On notera les primitives de f par $\int f(x)dx$ ou $\int f(t)dt$ ou $\int f(u)du$ (les lettres x, t, u, ... sont des lettres dites muettes, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter les primitives simplement par $\int f$, et on dit aussi "**intégrale indéfinie**".

- $\int f(x)dx$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
- Trouver une primitive est l'opération inverse de dérivation.
- Une primitive, si elle existe, n'est pas unique, en effet, si F est une primitive de f sur I alors toute fonction $x \longmapsto F(x) + c$, où c est une constante réelle quelconque, est aussi une primitive de f. Et toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où c est une constante réelle.

Théorème 1.1.1. *Toute fonction continue sur un intervalle admet au moins une (et donc une infinité de) primitive sur cet intervalle.*

La continuité est donc une condition suffisante pour l'existence de primitive. Cependant, ça existe des fonctions qui ne sont pas continues mais elles admettent des primitives. La continuité est donc une condition pas nécessaire.

A partir des propriétés de dérivation on en déduit des propriétés pour les primitives :

Proposition 1.1.1. *Si F est une primitive de f, et G une primitive de g, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$. Et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors αF est une primitive de αf. i.e. pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Comment trouver l'expression d'une primitive ?

- **Par calcul direct :** en faisant apparaitre, si c'est possible, une dérivée usuelle. Par exemple,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+3}}dx = 2. \int \frac{1}{2\sqrt{x+3}}dx = 2.\sqrt{x+3} + c, \; \textit{tel que } c \in \mathbb{R} \;\; \textit{car } (\sqrt{x+3})' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}.$$

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \; \textit{tel que } c \in \mathbb{R} \;\; \textit{car } (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}dx = \int (\sqrt{x^2+3})'dx = \sqrt{x^2+3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \cos x \sin x dx = \frac{1}{2}\int 2 \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\sin^2 x)'dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Intégration par parties :**

Soient $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 $\big($dérivables à dérivées continues$\big)$ sur I. Alors,

$$\boxed{\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x)u'(x)dx.}$$

En effet, pour tout $x \in I$

$$\Big(u(x).v(x)\Big)' = u'(x).v(x) + v'(x)u(x),$$

d'où

$$\int \Big(u(x).v(x)\Big)' dx = \int \Big(u'(x).v(x) + v'(x)u(x)\Big) dx,$$

par conséquent

$$u(x).v(x) = \int u'(x).v(x)dx + \int v'(x)u(x)dx,$$

et donc

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx.$$

Exemples.

$$\int (1+x).e^x \, dx$$

On prend

$$\begin{cases} u(x) = 1 + x \Longrightarrow \ u'(x) = 1, \\ v'(x) = e^x \qquad \Longrightarrow \ v(x) = e^x, \end{cases}$$

alors

$$\int (1+x).e^x \, dx = (1+x)e^x - \int \ e^x \, dx = (1+x)e^x - e^x + c = xe^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De même pour $\int \ln x \, dx$, $\int \ln^2 x \, dx$, $\int \sin(3x).\cos x \, dx$, et $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx$.

- **Par changement de variable :**

Théorème 1.1.2. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \longrightarrow I$ une fonction de classe C^1. Alors, la fonction $t \longmapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ admet une primitive sur J, et nous avons*

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

Exemples.

1.

$$int \frac{x}{\sqrt{x+1}} := F(x)$$

On prend $t = \sqrt{x+1}$, alors

$$\begin{cases} \frac{dt}{dx} = \frac{d(\sqrt{x+1})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2t} \Longrightarrow \ dx = 2tdt. \\ t^2 = x + 1 \Longrightarrow x = t^2 - 1 \end{cases}$$

d'où

$$F(x) = \int \frac{(t^2-1)\ 2\ t\ dt}{t} = 2\int \left(t^2-1\right) dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right] + c = \frac{2}{3}\sqrt{x+1}^3 - 2\sqrt{x+1} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

2. De même pour $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}\ dx$.

Rappels

$$\boxed{\int k.x^n\ dx = \frac{k}{n+1}.x^{n+1}}$$

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)}\ dx = \ln \mid g(x) \mid}$$

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g^n(x)}\ dx = \frac{-1}{(n-1)g^{n-1}}}$$

$$\boxed{\int g'(x).e^{g(x)}\ dx = e^{g(x)}}$$

$$\boxed{\int 2.g(x).g'(x)\ dx = g^2(x) + cst}$$

$$\boxed{\int k.g^{k-1}(x).g'(x)\ dx = g^k(x)}$$

Fonction f	Une primitive	
$x \mapsto a$ (a réel)	$x \mapsto ax$	
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$)	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	s sur
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	

Fonction f	Une primitive
ku' (k réel)	ku
$u' + v'$	$u + v$
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$ c'est-à-dire : $\ln u$ si u strictement p $\ln(-u)$ si u strictemen
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$

1.1.2 Intégrale de Riemann

Soit $[a, b]$ un intervalle compact (fermé et borné) de $\mathbb{R}$.

• On appelle "subdivision de $[a, b]$" toute suite finie ordonnée de points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a, b]$ telle que

$$\mathbf{a} = x_0 < x_1 < ... < x_n = \mathbf{b}.$$

Les points x_i sont quelconques dans $[a, b]$.

Par exemple, $\Delta_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $\Delta_2 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\}$ sont deux subdivisions de $[0, 1]$.

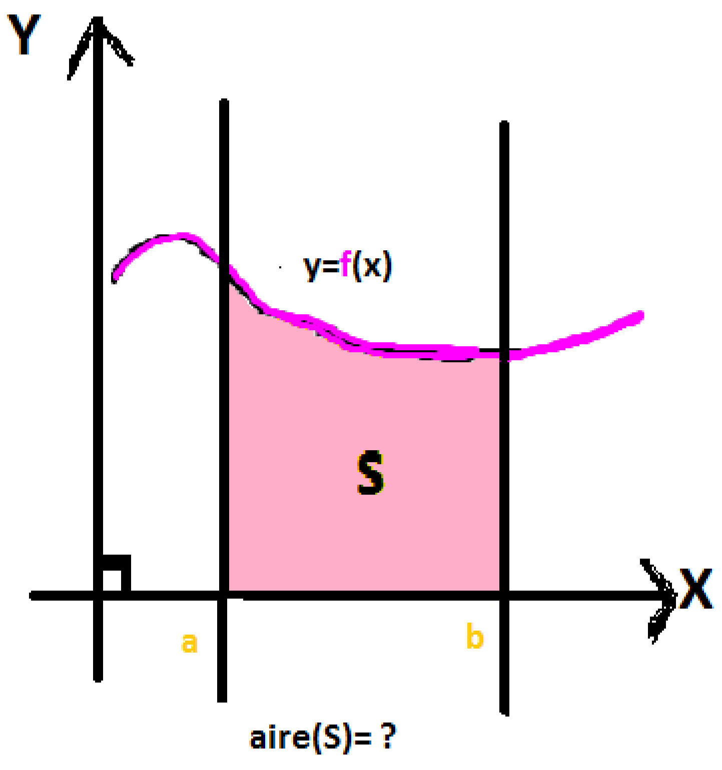
• Pour tout n, on peut trouver une infinité de subdivisions pour $[a, b]$.

• Pour tout $\mathbf{n}$, si on partage $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ en $\mathbf{n}$ intervalles partielles égaux, alors la longueur de chacun sera $\frac{b-a}{\mathbf{n}}$, et on obtient : $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} = a + 2.\frac{b-a}{n}$, ... etc, i.e.

$$\boxed{x_i = \mathbf{a} + i.\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{n}}.}$$

On appelle ça une subdivision régulière.

Maintenant, soit $f : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et bornée sur $[a, b]$.
Nous aimerions trouver **l'aire** de la surface S délimitée par la courbe d'équation $y = \mathbf{f}(x)$, l'axe des abscisses (OX), et les deux droites d'équations $x = \mathbf{a}$ et $x = \mathbf{b}$.

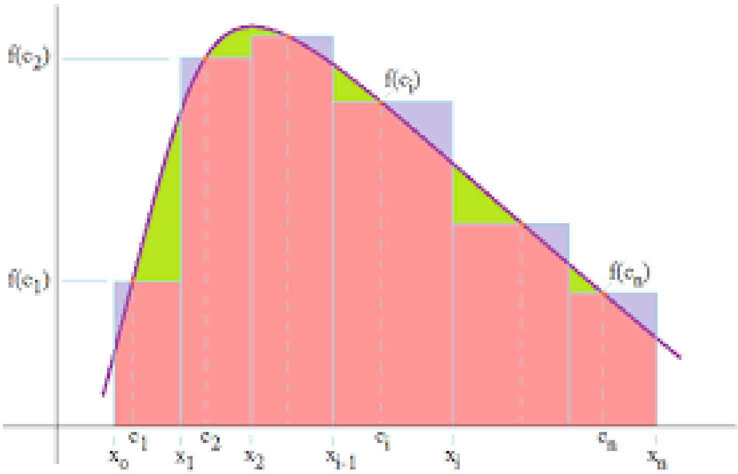


• Si f est continue par exemple, partageons $[a, b]$ en n intervalles partielles, on obtient une subdivision $\Delta = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$. Pour chaque intervalle partiel $[x_{i-1}, x_i]$ choisissons un $\varepsilon_i \in [x_{i-1}, x_i]$. On obtient n rectangles dont la largeur de chacun est $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur $f(\varepsilon_i)$.

Notons par

$$\boxed{R_{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^{\mathbf{n}} (x_i - x_{i-1}).f(\varepsilon_i)}$$

Cette somme représente la somme des aires (algébriques) des rectangles dans la figure suivante.



On l'appelle **somme de Riemann** de f selon la subdivision Δ et par rapport au système de points $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$.

• Plus les rectangles sont petits, plus cette somme soit proche de l'aire de la surface S recherchée. Autrement dit, plus le nombre d'intervalles $\mathbf{n}$ est grand, plus cette somme converge vers l'aire de la surface S recherchée. Lorsque $\mathbf{n}$ est suffisement grand ($\mathbf{n} \to \infty$), on tombe sur la valeur de l'aire recherchée.

Prenons par exemple, la fonction exponentielle $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = e^x$ (elle est **continue** sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[a, b]$).

$$\boxed{aire(S) = \lim_{n \to +\infty} R_n.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute subdivision $\Delta = \{\mathbf{a} = x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n = \mathbf{b}\}$ et tout système de points $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_i, ..., \varepsilon_n\}$, la somme de Riemann de f est

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) e^{\varepsilon_i}.$$

En choisissant $\varepsilon_i = x_i$, on obtient

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) e^{x_i},$$

et en choisissant une subdivision Δ régulière, on obtient

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{n}.e^{(\mathbf{a}+i.\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{n})},$$

Pour $\mathbf{a} = 0$ et $\mathbf{b} = 1$ par exemple, on obtient

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\, e^{\frac{i}{n}},$$

d'où

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(e^{\frac{1}{n}})^i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y^i,$$

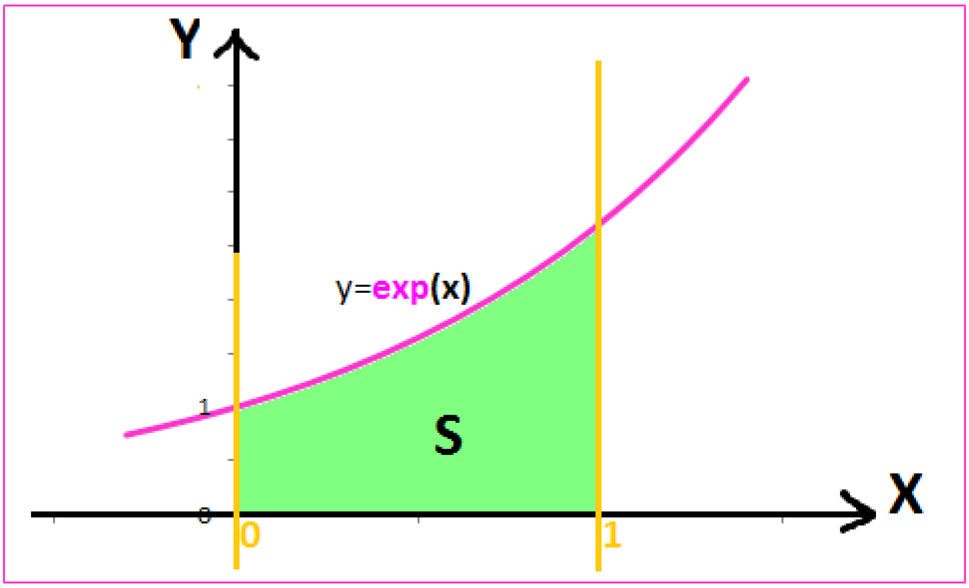
avec $y = e^{\frac{1}{n}}$. Or, $\sum_{i=1}^{n} y^i = y^1 + y^2 + y^3 + ... + y^n$ est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison y, et dont le premier terme est y. Donc $\sum_{i=1}^{n} y^i = y\,\frac{y^n - 1}{y-1}$, et on obtient

$$R_n = \frac{1}{n}\, y\, \frac{y^n-1}{y-1} = \frac{1}{n}\, e^{\frac{1}{n}}\, \frac{(e^{\frac{1}{n}})^n - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e-1)\, e^{\frac{1}{n}}\, \frac{1}{n}\, \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = (e-1)\, e^{\frac{1}{n}}\, \frac{1}{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}},$$

Comme $\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{1n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} R_n = e - 1$. En conclusion, d'où $aire(S) = e - 1$.

On dit que la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$, et son intégrale est égale à $e - 1$, et on écrit

$$\int_0^1 e^x\, dx = e - 1 = aire(S).$$



Exercice. Soit $x \in [0, 2]$. Refaire les calculs pour

$$\int_0^x e^u \, du.$$

Solution. La fonction $u \mapsto h(u) = e^u$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0, x]$, pour tout $x \in [0, +\infty[$. Donc, sur $[0, x]$ elle est intégrale au sens de Riemann, et

$$\int_0^x e^u \, du = \lim_{n \to +\infty} R_n$$

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme de Riemann

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) h(\varepsilon_i),$$

et ceci pour toute subdivision $\Delta = \{x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n = b\}$ et tout système, de points $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_i, ..., \varepsilon_n\}$.

En choisissant $\varepsilon_i = x_i$, on obtient

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) h(x_i),$$

et en choisissant une subdivision Δ régulière, on obtient

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}\, h(a + i\,\frac{b-a}{n}).$$

Pour $a = 0$ et $b = x$, on obtient

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{n}\, h(i\,\frac{x}{n}),$$

Pour $h(u) = e^u$, on obtient

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{n}\, e^{i\frac{x}{n}} = \frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n} (e^{\frac{x}{n}})^i = \frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n} y^i,$$

avec $y = e^{\frac{x}{n}}$. Or, $\sum_{i=1}^{n} y^i = y^1 + y^2 + y^3 + ... + y^n$ est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison $r = y$, et dont le premier terme est y. Donc $\sum_{i=1}^{n} y^i = y\,\frac{y^n - 1}{y-1}$, et on obtient

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x}{n}\, y\, \frac{y^n - 1}{y - 1} \\ &= \frac{x}{n}\, e^{\frac{x}{n}}\, \frac{(e^{\frac{x}{n}})^n - 1}{e^{\frac{x}{n}} - 1} \\ &= (e^x - 1)\, e^{\frac{x}{n}}\, \frac{x}{n}\, \frac{1}{e^{\frac{x}{n}} - 1} \\ &= (e^x - 1)\, e^{\frac{x}{n}}\, \frac{1}{\frac{e^{\frac{x}{n}} - 1}{\frac{x}{n}}}, \end{aligned}$$

Comme $\frac{e^{\frac{x}{n}} - 1}{\frac{x}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = e^x - 1.$$

En conclusion,

$$\int_0^x e^u\, du = e^x - 1, \qquad \forall x \in [0, 2].$$

En fait, il est clair géométriquement que toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est intégrable sur cette intervalle (nous pouvons calculer l'aire). Mais pour une fonction qui n'est pas continue ce n'est pas évident.

Cependant ça existe des fonctions qui ne sont pas continues et pourtant elles sont intégrables. La continuité est une condition suffisante pour l'intégrabilité au sens de Riemann mais pas nécessaire.

Alors, c'est quoi une fonction intgrable ?

En général,

Définition 1.1.2. *Si la somme de Rieman R_n admet une limite lorsque $n \to \infty$ (qui ne dépend pas de la subdivision de $[a, b]$), on dit que f est intégrable, on appelle cette limite* ***"l'intégrale de Riemann de f sur** $[a, b]$**"***, *et on la note $\int_a^b f(x)\, dx$.*
i.e.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} R_n = l'aire\ algébrique\ de\ S.$$

Théorème 1.1.3. *Toute fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone est intégrable.*

Théorème 1.1.4. *Toute fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$* ***continue*** *est intégrable.*

A noter donc que dans le cas où f est continue sur $[a, b]$, nous pouvons définir sur $[a, b]$ la fonction $\mathbf{x} \longmapsto \int_a^{\mathbf{x}} f(t)dt$. Cette dernière est dérivable sur $[a, b]$, et sa dérivée en tout point x est égale à $f(x)$. Autrement dit, c'est une primitive pour f sur $[a, b]$, c'est celle qui s'annule en a.

Propriétés. Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann, alors

1) f est intégrable sur tout sous-intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$,
(elle est donc intégrable sur tout sous-intervalle $[a, x]$, $\forall x \in [a, b]$),

2) (Relation de Chasles) pour tout $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3) si $f \geq 0$ $\Big(f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]\Big)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$,
(la surface S est située au-dessus de l'axe (OX) des abscisses),

4) si $f \leq g$ $\Big(f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]\Big)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$,
(la courbe représentative de f est plus basse que celle de g, sur le même intervalle, donc la première surface est plus petite).

5) La fonction $\mid f \mid$ est intégrable sur $[a, b]$, et

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b \mid f(x) \mid dx.$$

6) (Linéarité) La fonction somme $f + g$, et la fonction λf sont intégrables, et

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b \lambda.f(x)dx = \lambda. \int_a^b f(x)dx, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.1.1. *On pose par définition*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Remarque 1.1.2. *Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors,*
Si f est paire, $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Théorème 1.1.5. *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, alors il existe un élément c de $[a, b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

- **Intégration par parties d'une intégrale de Riemann**

Soient $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 $\Big($dérivables à dérivées continues$\Big)$ sur $[a, b]$. Alors,

$$\boxed{\int_a^b u(x).v'(x)dx = u(x).v(x)\Big]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.}$$

Par exemple, pour

$$\int_0^1 (1+x).e^x \, dx,$$

en prenant

$$\begin{cases} u(x) = 1 + x \Longrightarrow u'(x) = 1, \\ v'(x) = e^x \quad \Longrightarrow v(x) = e^x, \end{cases}$$

alors

$$\int_0^1 (1+x).e^x \, dx = (1+x)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = (1+x)e^x\Big]_0^1 - e^x\Big]_0^1 = xe^x\Big]_0^1 = e.$$

- **Changement de variable pour une intégrale de Riemann**

Théorème 1.1.6. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ une fonction de classe C^1 telle que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Alors, la fonction $t \longmapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ est intégrable sur $[\alpha, \beta]$, et nous avons*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.}$$

Par exemple, pour $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx := I$, en prenant, $t = \sqrt{x+1}$, on a obtenu $dx = 2tdt$ et $x = t^2 - 1$. Maintenant nous cherchons les valeurs des bornes

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow t = 1, \\ x = 1 \Longrightarrow t = \sqrt{2}, \end{cases}$$

d'où

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)\,2\,t\,dt}{t} = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(t^2 - 1\right) dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{2}).$$

1.1.3 Intégrale et primitives

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. D'après ce que nous avons vu précédemment,

• f admet au moins une (donc une infinité de) primitive,

• d'autre part f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, et donc sur $[a, x]$, i.e. $\int_a^x f(t)dt$ existe, pour tout $x \in [a, b]$.

Sous continuité, Newton et Leibnitz ont trouvé une relation entre les deux :

Théorème 1.1.7. *(théorème fondamental de l'analyse, Newton-Leibnitz) Si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors*

$$\boxed{\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(x)dx = \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}(x)\Big]_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}}.$$

Plus généralement, $\forall x \in [a, b]$,

$$\int_a^{\mathbf{x}} f(t)dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(a) = \mathbf{F}(t)\Big]_a^{\mathbf{x}}.$$

Grâce à ce théorème, par exemple

$$\int_0^1 e^x\, dx = e^x\Big]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Pour récapituler :

si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction **continue**, et $\mathbf{F}$ l'une de ses primitives, alors deux choses à retenir

$$\boxed{\int_a^{\mathbf{x}} \mathbf{F}'(t)dt = \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(a) \quad \textit{et} \quad \left(\int_a^{\mathbf{x}} f(t)dt\right)' = f(\mathbf{x}),}$$

pour tout $\mathbf{x} \in [a, b]$.

Même si le fameux théorème de Newton-Leibnitz a facilité le calcul des intégrales à trvars les primitives, c'est dans certains cas très limités qu'une intégrale peut être calculée analytiquement (à la main). Cependant, ce n'est que très rarement possible. Le plus souvent un des cas suivants se présente

• le calcul analytique est long et compliqué,

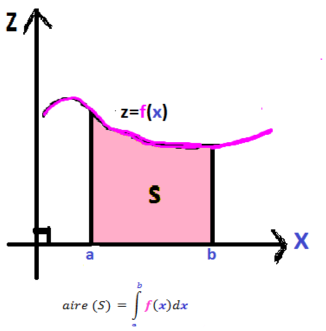
• le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée qui fait appel à d'autres fonctions elles-même longues à évaluer,

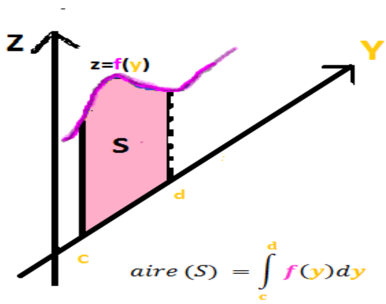
• ou bien cette intégrale n'a pas d'expression analytique (par exemple la fonction erreur).

Dans tous ces cas, on préférera calculer "**numériquement**" la valeur de l'intégrale, malgré les erreurs.

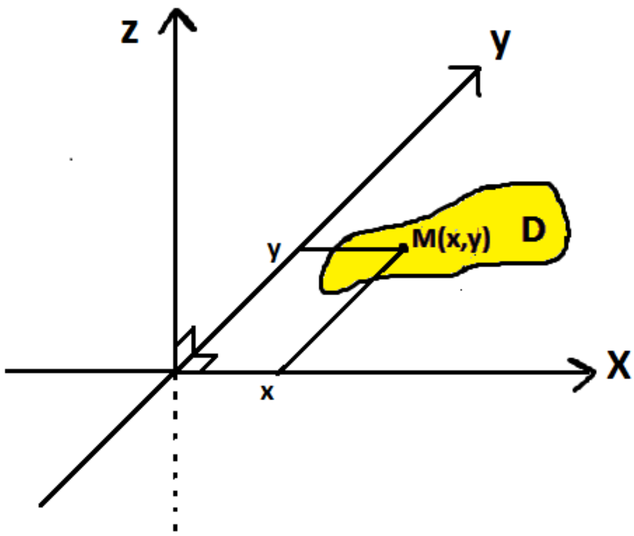
1.2 Intégrales multiples

D'abord, d'après ce qu'on a vu prcédement, dans chacunes des situations suivantes, nous pouvons calculer l'aire de la surface tant que nous connaissons l'équation de la courbe qui la délimite.





Dans la suite, on muni l'espace d'un repère orthonormé (o, X, Y, Z).

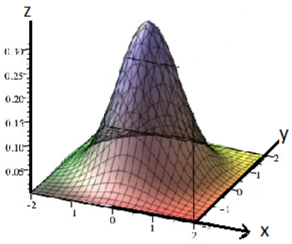


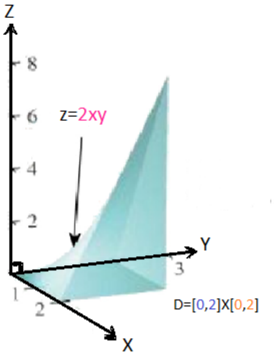
1.2.1 Intégrales doubles et applications

Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ (une partie du plan (OXY)) et f une fonction à deux variables x, y, définie et bornée sur D. L'ensemble de points

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D \ \ et \ \ \mathbf{0} \leqslant z \leqslant f(x, y)\}$$

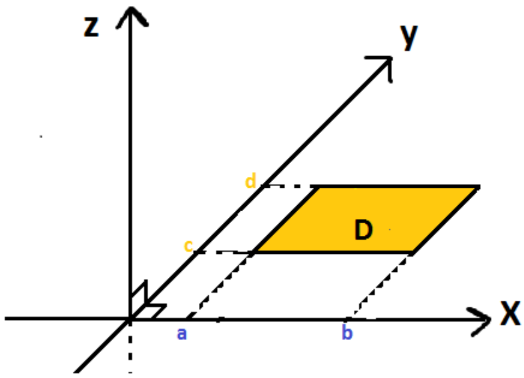
resprésente le corps (pseudo-cylindrique) de base D et de hauteur $f(x, y)$, c'est à dire, le corps situé **sous** la surface d'équation $z = f(x, y)$.



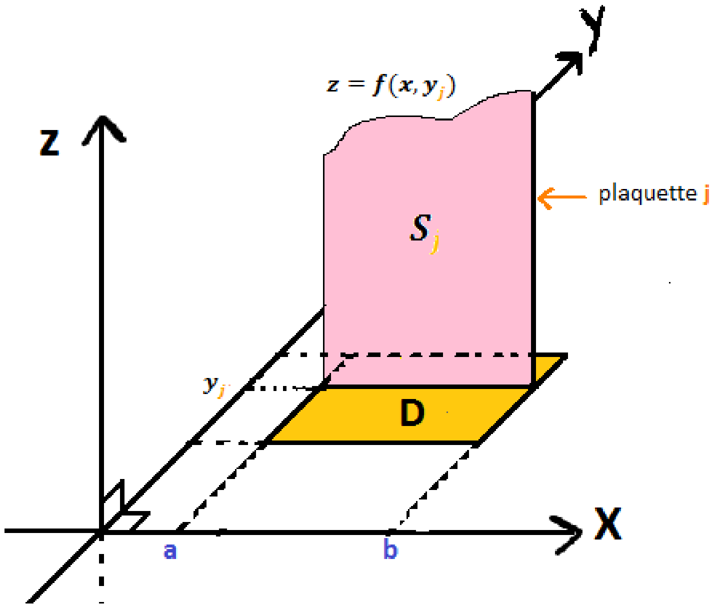


On aimerait trouver la valeur du volume V de ce corps. Ceci dépend de la forme de la base D.

• Si la base D est rectangle, i.e $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \mathbf{a} \leq x \leq \mathbf{b}\ et\ c \leq y \leq d\right\} = [a, b] \times [c, d]$



partageons, divisons, le corps C au long de l'axe (OY) en m plaquettes. Cela correspond à une subdivision $\Delta = \{c = y_0, y_1, ..., y_j, ..., y_m = d\}$ de l'intervalle $[c, d]$.



D'après la première section de ce chapitre, pour tout $j \in \{1, ..., m\}$

$$\boxed{l'aire\ de\ la\ plaquette\ j = \int_a^b f(x, y_j)\, dx.}$$

Le volume V est assimilé à la somme des aires des plaquettes issues du partage, car, plus le nombre m des plaquettes est grand, plus celles ci deviennent plus fines, d'épesseurs négligeables, voir des lammelles, et la somme de leurs aires converege vers la valeur du volume V.

La limite de cette convergence (lorsque m est suffisement grand) est la valeur du volumre.

Ceci nous conduit implicitement à une deuxième intégration. (Valeur exacte!?

$$\begin{aligned} V &\simeq \sum_{j=1}^{m} aire\ de\ la\ plaquette\ j \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} aire\ de\ la\ plaquette\ j \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\int_a^b f(x, y_j)\, dx \right) \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy. \end{aligned}$$

On note cette double intégrale par

$$\iint_D f(x,y)dxdy,$$

avec $D = [a,b] \times [c,d]$, et on dit "intégrale double de la fonction f sur le domaine D. Autrement dit,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right) dy = Volume\ de\ (C),$$

tel que $C = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in D\ \ et\ \ 0 \leq z \leq f(x,y)\Big\}$.

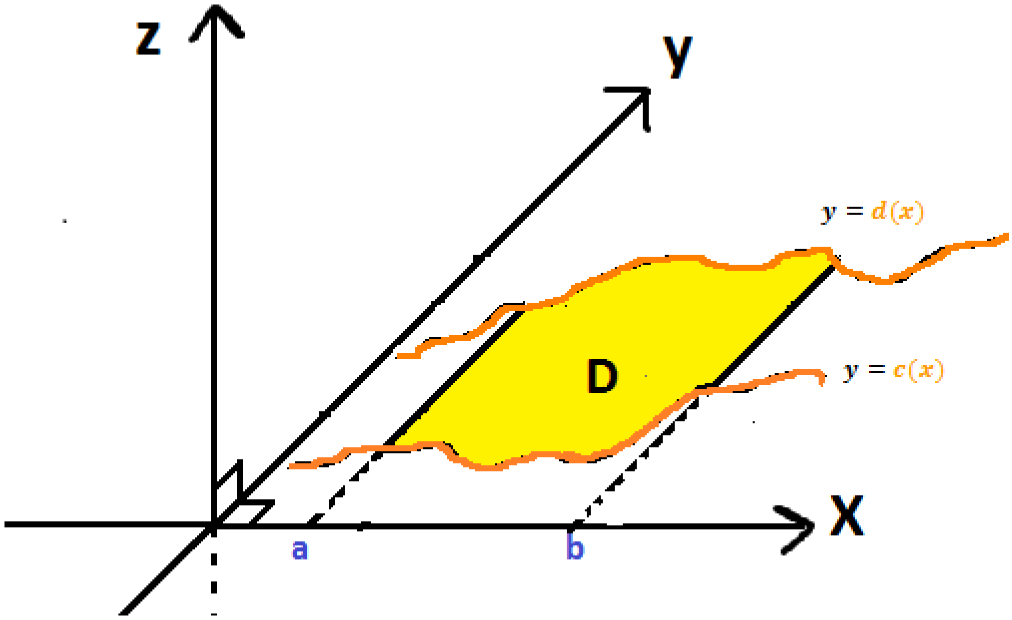
$\longrightarrow$ On peut aussi partager, le corps C au long de l'axe (OX) en n plaquettes. Cela correspond à une subdivision $\Delta = \{a = x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n = b\}$ de l'intervalle $[a,b]$. D'après le cours de l'intégrale de Riemann, pour tout $\mathbf{i}$

$$\boxed{l'aire\ de\ la\ plaquette\ \mathbf{i} = \int_c^d f(x_{\mathbf{i}}, y)\ dy.}$$

Par le même raisonnement, le volume V est assimilé à la somme des aires des plaquettes $\mathbf{i}$ issues du partage lorsque le nombre n de celles ci est suffisement grand.

$$\begin{aligned}
V &\simeq \sum_{\mathbf{i}=1}^{n} l'aire\ de\ la\ plaquette\ \mathbf{i} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{\mathbf{i}=1}^{n} l'aire\ de\ la\ plaquette\ \mathbf{i} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{\mathbf{i}=1}^{n} \left(\int_c^d f(x_{\mathbf{i}}, y)\ dy \right) \\
&= \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left(\int_c^d f(\mathbf{x}, y)\ dy \right) d\mathbf{x} \\
&= \iint_D f(x,y)dxdy.
\end{aligned}$$

• Maintenant, si $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\ \ et\ c(x) \leq y \leq d(x)\Big\}$ telles que les deux **fonctions** c, d sont continues sur $[a,b]$ et $c(x) \leq d(x)$, $\forall x \in [a,b]$,



Ici, on doit partager le corps C au long de l'axe (OX) en n plaquettes, ce qui correspond à une subdivision $\Delta = \{a = x_0, x_1, ..., x_i, ..., x_n = b\}$ de l'intervalle $[a, b]$.

Ici chaque plaquette $\mathbf{i}$ a sa largeur $[c(x_\mathbf{i}), d(x_\mathbf{i})]$, par conséquent, pour tout $\mathbf{i}$

$$\boxed{l'aire\ de\ la\ plaquette\ \mathbf{i} = \int_{c(x_\mathbf{i})}^{d(x_\mathbf{i})} f(x_\mathbf{i}, y)\, dy.}$$

Par le même raisonnement,

$$\begin{aligned} V &\simeq \sum_{\mathbf{i}=1}^{n} l'aire\ de\ la\ plaquette\ \mathbf{i} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\mathbf{i}=1}^{n} l'aire\ de\ la\ plaquette\ \mathbf{i} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\mathbf{i}=1}^{n} \left(\int_{c(x_\mathbf{i})}^{d(x_\mathbf{i})} f(x_\mathbf{i}, y)\, dy \right) \\ &= \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \iint_D f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

• Par contre si $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a(y) \leq \mathbf{x} \leq b(y)\ \ et\ c \leq y \leq d\Big\}$ telles que les deux **fonctions** a, b sont continues sur $[c,d]$ et $a(y) \leq b(y), \forall y \in [c,d]$, là, on doit partager le corps C au long de l'axe (OY) en m plaquettes. Par le même raisonnement, nous obtenons

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx\right) dy = \iint_D f(x,y) dxdy.$$

Récapitulons :

Le volume est égale à une intégrale double, et pour calculer on a distingué trois cas

1) Si $D = [a,b] \times [c,d]$ (Théorème de Fubbini)

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx.$$

2) Si $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b\ \ et\ \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq y \leq \mathbf{d}(\mathbf{x})\Big\}$ telles que les deux fonctions c, d sont continues sur $[a,b]$ et $c \leq d$ sur $[a,b]$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\mathbf{c}(\mathbf{x})}^{\mathbf{d}(\mathbf{x})} f(x,y)\mathbf{dy}\right) dx.$$

3) Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \mathbf{a}(\mathbf{y}) \leq x \leq \mathbf{b}(\mathbf{y})\ et\ \ c \leq y \leq d\}$ telles que les deux fonctions a, b sont continues sur $[c,d]$ et $a \leq b$ sur $[c,d]$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\mathbf{a}(\mathbf{y})}^{\mathbf{b}(\mathbf{y})} f(x,y)dx\right) dy.$$

Exemple 1. Le volume du corps

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{1} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{2},\ \ 2 \leq y \leq 3\ \ et\ \ \mathbf{0} \leqslant z \leqslant x + y^3\}$$

est

$$V = \iint_{[1,2]\times[2,3]} (x+y^3)\ dxdy = \int_1^2 \left(\int_2^3 (x+y^3)\ dy\right) dx = \int_2^3 \left(\int_1^2 (x+y^3)\ dx\right) dy.$$

Pour la première méthode, nous calculons d'abord,

$$\int_2^3 (x+y^3)\ dy = xy + \frac{y^4}{4}\Big]_2^3 = (3x + \frac{3^4}{4}) - (2x + \frac{2^4}{4}) = x + \frac{65}{4},$$

d'où

$$V = \int_1^2 (x + \frac{65}{4})dx = \frac{x^2}{2} + \frac{65}{4}x\Big]_1^2 = \frac{71}{4}(unité\ de\ x \times unité\ de\ y \times unité\ de\ z).$$

Sinon, pour la deuxième méthode nous calculons d'abord,

$$\int_1^2 (x+y^3)\ dx = \frac{x^2}{2} + y^3 x\Big]_1^2 = (\frac{2^2}{2} + y^3.2) - (\frac{1^2}{2} + y^3.1) = \frac{3}{2} + y^3,$$

d'où

$$V = \int_2^3 (\frac{3}{2} + y^3)dy = \frac{3}{2}y + \frac{y^4}{4}\Big]_2^3 = \frac{71}{4}.$$

Un autre exemple. Calculons le volume V du corps dont la base est le rectangle $[0,1] \times [-1,2]$, situé sous la surface d'équation $z = x^2y^3$.

Il s'agit de la valeur de l'intégrale double

$$V = \iint_{[0,1]\times[-1,2]} x^2y^3 \, dxdy.$$

C'est le premier cas, donc

$$V = \int_0^1 \left(\int_{-1}^2 x^2y^3 \, dy\right)dx = \int_{-1}^2 \left(\int_0^1 x^2y^3 \, dx\right)dy.$$

Pour la première méthode par exemple, nous calculons d'abord,

$$\int_{-1}^2 x^2y^3 \, dy = x^2 \int_{-1}^2 y^3 \, dy = x^2\frac{y^4}{4}\Big]_{-1}^2 = \frac{x^2}{4}(2^4 - (-1)^4) = \frac{15}{4}x^2,$$

d'où

$$V = \int_0^1 \left(\frac{15}{4}x^2\right)dx = \frac{15}{12}x^3\Big]_0^1 = \frac{5}{4}.$$

Remarque. Dans ce dernier exemple, si nous calculons

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3},$$

$$\int_{-1}^2 y^3dy = \frac{15}{4},$$

alors

$$\frac{1}{3}.\frac{15}{4} = \frac{5}{4} = \iint_{[0,1]\times[-1,2]} x^2y^3 \, dxdy.$$

En fait, en général, dans le premier cas, si $f(x,y) = f_1(x).f_2(y), \ \forall (x,y) \in D$ alors

$$\iint_D f(x,y)dxdy = (\int_a^b f_1(x)dx).(\int_c^d f_2(y)dy).$$

Exemple 2.

$$\iint_D e^{x^2} dxdy,$$

avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2 \ et \ 0 \leq y \leq \frac{x}{3}\}$.

Il s'agit du deuxième cas, donc

$$I := \iint_D e^{x^2} dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} dy\right) dx,$$

$\int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} dy = e^{x^2} \int_0^{\frac{x}{3}} dy = e^{x^2} \big(y\big]_0^{\frac{x}{3}} = e^{x^2}\left[\frac{x}{3} - 0\right] = \frac{x}{3}e^{x^2}$.

Donc

$$I = \int_0^2 \frac{x}{3}e^{x^2}\, dx = \int_0^2 \frac{2x}{6}e^{x^2}\, dx = \frac{1}{6}\int_0^2 2xe^{x^2}\, dx = \frac{1}{6}\Big[e^{x^2}\Big]_0^2 = \frac{1}{6}\Big(e^4 - 1\Big).$$

Remarque. Une surface D peut être considérée comme base d'un corps cylindrique de hauteur 1. Du coup, l'aire de D est égale au volume de ce corps, et on peut écrire

$$\boxed{\textit{Aire de } D = \iint_D 1dxdy.}$$

Propriétés de l'intégrale double. Pour $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$,

1) si $f \leq g$ alors

$$\iint_{\mathbf{D}} f(x,y)dxdy \leq \iint_{\mathbf{D}} g(x,y)dxdy$$

(les deux corps ont la même base mais l'un est plus bas, donc plus petit, que l'autre).

2)

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

3)

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy - \iint_{D_1\cap D_2} f(x,y)dxdy$$

(on a réparti le corps en partageant la base).

4) L'intégrale double est linéaire, i.e.,

$$\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy.$$

$$\iint_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)dxdy, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Changement de variables

Pour simplifier les calculs, que ça soit il s'agit d'une fonction complquée ou d'un domaine compliqué, on peut utiliser un changement de variables comme suit

Si on arrive à trouver une bijection

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \Delta && \longrightarrow D \\ & (u,v) && \longmapsto \varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) = (x,y), \end{aligned}$$

alors dans ce cas

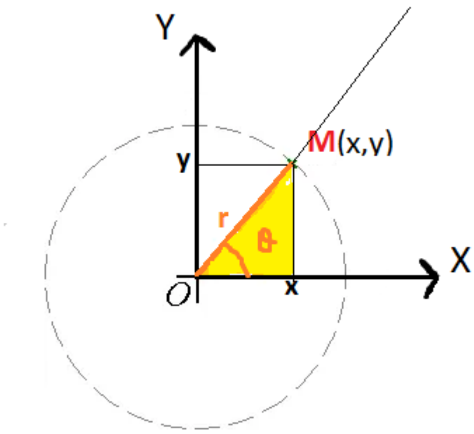
$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(\varphi(u,v)).det(J(\varphi))\; dudv},$$

telle que $J(\varphi)$ est la matrice Jacobienne

$$J(\varphi)=\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, \end{pmatrix}$$

et $det(J(\varphi)) = |J(\varphi)| =$ est le déterminant de la matrice Jacobienne (Le Jacobien). Ceci, est vrai tant que φ est de classe C^1 sur $\triangle$, et $det(J(\varphi)) \neq 0$.

Changement de variables particulier : passage aux coordonnées polaires

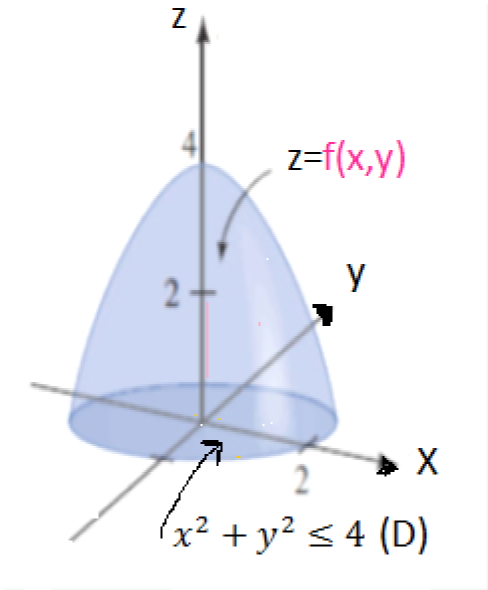


Au lieux de carectériser la position d'un point M dans le plan par les coordonnées cartésiennes (x, y), on peut le faire par (r, θ), appelées coordonnées polaires, telles que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ avec\ \ 0 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Dans ce cas $det(J(\varphi)) = r$, et

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\triangle} \Big(f(r\cos\theta, r\sin\theta).\mathbf{r}\Big)drd\theta}.$$



Exemple. $f(x,y) = x^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Le domaine D représente le disque entré en origine $(0,0)$, de rayon $R = 1$.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta).\mathbf{r}\ drd\theta = \iint_{\Delta} r^2(\cos\theta)^2.\mathbf{r}\ drd\theta = \iint_{\Delta} r^3\cos^2\theta\ drd\theta.$$

Cherchons le domaine Δ en fonction des coordonnées polaires (r,θ). Nous avons

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq 1 &\iff r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \leq 1 \\ &\iff r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \leq 1 \\ &\iff r^2 \leq 1 \\ &\overset{r>0}{\Longrightarrow} r \leq 1 \end{aligned}$$

donc,

$$\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2;\ \ 0 \leq r \leq 1\ et\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

$$\iint_{\Delta} r^3 \cos^2\theta \, dr d\theta = (\int_0^1 r^3 \, dr).(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta) = \frac{\pi}{4}. \quad \left(car \ \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \right).$$

Applications.

Exemple 1. Une charge lectrique est répartie sur une région D. Si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par $\rho(x,y)$ en un point (x,y) de D, alors la charge totale Q présente sur cette région est donnée par

$$\iint_{D} \rho(x,y) \, dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D ci-dessous de manière telle que la densité de charge en (x,y) est donnée par $\rho(x,y) = 2xy$, mesurée en coulombs par mètre carré (C/m^2). Calculer la charge totale présente sur D.

Remarque. L'intégrale double apparaît aussi dans les lois du calcul du moment d'inertie et aussi les centres de masses.

Exemple 2. Soit D une partie bornée et fermée du plan et qui est homogène. Le centre de masse de D est définie comme le point de coordonnées (x_D, y_D) où

$$x_D = \frac{1}{A}\iint_{D} x \, dxdy, \quad y_D = \frac{1}{A}\iint_{D} y \, dxdy$$

telle que A est l'aire du domaine D. Déterminons la position, c'est à dire x_D et y_D du centre de masse d'une plaque homogène D dont la forme est

1.2.2 Intégrales triples et applications

Soient $D \subset \mathbb{R}^3$ et f une fonction à trois variables $x, y \; et \; z$, définie et bornée sur D. La quantité notée par

$$\iiint_{D} f(x,y,z) \, dxdydz$$

désigne l'intégrale triple de la fonction f sur D.

• Si en particulier, $f(x,y,z) = 1$, alors l'intégrale triple de f sur D représente le volume du corps D

$$volume \; de \; D = \iiint_{D} 1 \, dxdydz.$$

• On retrouve les mêmes propriétés que celles de l'intégrale double.

• **Comment calculer ?**

1) Si $D=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ (un pavé)

$$\begin{aligned}\iiint_D f(x,y,z)dxdydz &= \iint_{[c,d]\times[e,f]}\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dydz\\ &= \iint_{[a,b]\times[e,f]}\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dxdz\\ &= \iint_{[a,b]\times[c,d]}\left(\int_e^f f(x,y)dz\right)dxdy\ .\end{aligned}$$

Exemple. Pour $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 0\leq x\leq 1\ ,\ 0\leq y\leq 2\ ,\ 0\leq z\leq 3\}$,

$$\begin{aligned}\iiint_D\ e^{x-y+3z}\ dxdydz &= \iint_{[0,2]\times[0,3]}\left(\int_0^1\ e^{x-y+3z}\ dx\right)dydz\\ &= \iint_{[0,1]\times[0,3]}\left(\int_0^2\ e^{x-y+3z}\ dy\right)dxdz\\ &= \iint_{[0,1]\times[0,2]}\left(\int_0^3 f(x,y)dz\right)dxdy.\end{aligned}$$

Pour la première méthode par exemple,

$$\int_0^1\ e^{x-y+3z}\ dx=\int_0^1\ e^x.e^{-y+3z}\ dx=e^{-y+3z}\int_0^1\ e^x\ dx=e^{-y+3z}.(e^x\Big]_0^1=(e-1)e^{-y+3z},$$

d'où

$$\iiint_D\ e^{x-y+3z}\ dxdydz=\iint_{[0,2]\times[0,3]}\ (e-1)e^{-y+3z}\ dydz=(e-1)\iint_{[0,2]\times[0,3]}\ e^{-y+3z}\ dydz,$$

cependant on retrouve encore trois méthodes pour calculer ce dernier,

$$\begin{aligned}\iint_{[0,2]\times[0,3]}\ e^{-y+3z}\ dydz=\int_0^3\left(\int_0^2\ e^{-y+3z}\ dy\right)dz &= \int_0^2\left(\int_0^3\ e^{-y+3z}\ dz\right)dy\\ &= \left(\int_0^2\ e^{-y}\ dy\right).\left(\int_0^3\ e^{3z}\ dz\right).\end{aligned}$$

On obtient après calculs,

$$\iiint_D\ e^{x-y+3z}\ dxdydz=\frac{-1}{3}(e-1)(e^{-2}-1)(e^9-1)$$

Remarque. Dans ce dernier exemple, on aurait pu faire directement

$$\begin{aligned}\iiint_D\ e^{x-y+3z}\ dxdydz &= \left(\int_0^1\ e^x\ dy\right).\left(\int_0^2\ e^{-y}\ dy\right).\left(\int_0^3\ e^{3z}\ dz\right)\\ &= (e^x\Big]_0^1.(-e^{-y}\Big]_0^2.(\frac{1}{3}e^{3z}\Big]_0^3\\ &= \frac{-1}{3}(e-1)(e^{-2}-1)(e^9-1).\end{aligned}$$

En général, lorsque $D = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, si $f(x,y,z) = f_1(x).f_2(y).f_3(z),\ \forall(x,y,z) \in D$ alors

$$\iint_D f(x,y,z)dxdydz = (\int_a^b f_1(x)dx).(\int_c^d f_2(y)dy).(\int_e^f f_3(z)dz).$$

2) Si $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in K \;\; et \;\; \Phi_1(x,y) \leq z \leq \Phi_2(x,y)\}$ avec

- les deux fonctions Φ_1, Φ_2 sont continues sur K et $\Phi_1(x,y) \leq \Phi_2(x,y),\ \forall(x,y) \in K$,
- K est compact,

alors

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_K \left(\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz\right) dxdy.$$

Exemple. $\iiint_D xyz\ dxdydz$ avec

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 4 \; et \; 0 \leq z \leq x^2+y^2\}$.

En posant

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2+y^2 \leq 4\},$$

il est clair que K est compact dans $\mathbb{R}^2$ (fermé et borné) et que $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in K \; et \; 0 \leq z \leq x^2+y^2\}$. On obtient donc

$$\iiint_D xyz\ dxdydz = \iint_K \left(\int_0^{x^2+y^2} xyz\ dz\right) dxdy.$$

On calcule d'abord

$$\int_0^{x^2+y^2} xyz\ dz = xy\int_0^{x^2+y^2} z\ dz = \frac{xy}{2}\ z^2\Big]_0^{x^2+y^2} = \frac{1}{2}xy(x^2+y^2)^2,$$

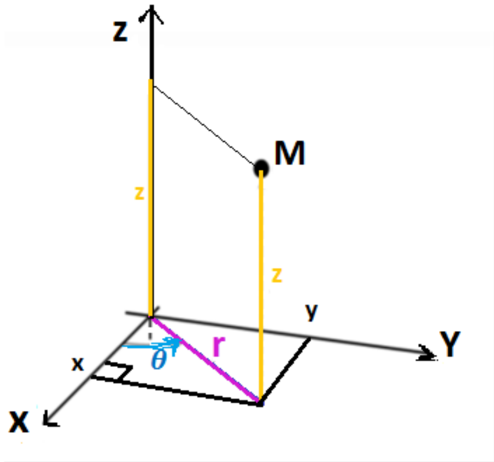
d'où

$$\iiint_D xyz\ dxdydz = \iint_K \frac{1}{2}xy(x^2+y^2)^2 dxdy.$$

Un autre exemple.

$$\iiint_{0\leq x\leq y\leq z\leq 1} xyz\ dxdydz = \frac{1}{48}.$$

Coordonnées cylindriques



On définit les coordonnées cylindriques par l'application φ de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi(\mathbf{r}, \theta, \mathbf{z}) = (x, y, z)$$

telles que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

D'où $\quad det(J(\varphi)) = r$, et

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z).\mathbf{r}\ drd\theta dz}.$$

Exemples. Pour $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 \ et\ 0 \leq z \leq 1\}$, comme le domaine est pseudo cylindrique, il serait intéressant de passer aux coordonnées cylindriques, on obtient

$$\iiint_D ze^{x^2+y^2}\, dxdydz = \iiint_{D'} ze^{r^2}\, rdrd\theta dz = \frac{\pi}{2}(e^4 - e),$$

tel que $D' = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ et\ 0 \leq z \leq 1\}$,

alors

$$\iiint_{D'} ze^{r^2}\, rdrd\theta dz = \int_1^2 re^{r^2}dr. \int_0^{2\pi} d\theta. \int_0^1\ zdz = \frac{\pi}{2}(e^4 - e).$$

De même pour $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4 \; et \; 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$,

$$\iiint_D xyz \; dxdydz = \iiint_{D'} r^3 \cos\theta \sin\theta z \; drd\theta dz = \iint_{\substack{0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} \left(\underbrace{\int_0^{r^2} r^3 \cos\theta \sin\theta z dz}_{J} \right) drd\theta,$$

or

$$J = \frac{1}{2} r^3 \cos\theta \sin\theta z^2 \Big]_0^{r^2} = \frac{1}{2} r^7 \cos\theta \sin\theta,$$

donc

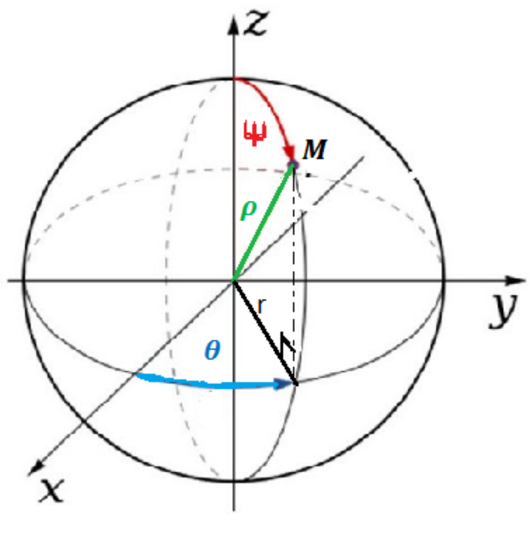
$$\iiint_D xyz \; dxdydz = \frac{1}{2} \int_0^2 r^7 dr. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta = 8.$$

Coordonnées sphériques

On définit les coordonnées sphériques par l'application φ de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi(\rho, \psi, \theta) = (x, y, z) \quad telles \; que$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\psi \cos\theta, \\ y = \rho \sin\psi \sin\theta, \\ z = \rho \cos\psi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases}$$



D'où $\quad det(J(\varphi)) = \rho^2 \sin\psi$, et

$$\boxed{\iiint_D f(x, y, z) dxdydz = \iiint_{D'} f(\rho \sin\psi \cos\theta, \rho \sin\psi \sin\theta, \rho \cos\psi).\rho^2.\sin\psi \; d\rho d\psi d\theta}.$$

Exemple. Pour $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$,

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ dxdydz = \frac{\pi}{8} R^4.$$

En effet, D représente le quart de la boule centrée en l'origine $(0, 0, 0)$, de rayon R,

$$D' = \{(\rho, \psi, \theta);\ 0 \leq \rho \leq R,\ 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ dxdydz = \iiint_{\mathbf{D'}} \sqrt{\rho^2}.\rho^2.\sin\psi\ d\rho d\psi d\theta = \iiint_{\mathbf{D'}} \rho^3.\sin\psi\ d\rho d\psi d\theta.$$

Applications.

Exemple 1. En coordonnées sphériques, pour l'**atome d'hydrogène** dans son état fondamental, la distance moyenne entre l'électron et le noyau est donnée par l'expression

$$dist = \iiint_{V'} (\rho\ \Psi^2_{1s})\ \rho^2\ \sin\psi\ d\rho\ d\psi\ d\theta, \qquad avec$$

$\Psi_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi\ a_0^3}}\ e^{\frac{-\rho}{a_0}}$ $(la\ fonction\ d'onde)$, et $V' = [0, +\infty[\times[0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Calculer **dist**, en utilisant le fait que $\int_0^{+\infty} u^n\ e^{-qu} du = \frac{n!}{q^{n+1}}$ (Montrer que la distance moyenne électron-noyau est égale à $\frac{3}{2} a_0$.)

Exemple 2. Si $f : D \to \mathbb{R}^+$ représente une concentration de matière (une densité volumique), une densité de courant ou une densité d'énergie, alors on appelle "quantité totale" de matière (courant/énergie) en D le nombre

$$\iiint_D f(x, y, z)\ dxdydz,$$

et on appelle "quantité moyenne" en D le nombre

$$\frac{1}{Volume(D)} \iiint_D f(x, y, z)\ dxdydz.$$

Un **matériau** est réparti dans un cube $D = [0, R]^3$ selon la densité volumique $f(x, y, z) = \frac{x+y}{(z+1)^2}$. Calculer La quantité totale du matériau.

1.3 Exercices

Exercice 1.1. *Trouver les primitives*

$$1)\quad \int tgx\, dx, \quad 2)\ \int \frac{1}{(1+x)^2}\, dx, \quad 3)\ \int (1+tg^2t)\, dt,$$

$$4)\quad \int \frac{x}{5\sqrt{x^2+x+2}} dx, \quad 5)\ \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x+1}, \quad 6)\ \int \frac{x^2+2x+3}{x-2} dx,$$

$$7)\quad \int ln^2x\, dx, \quad \mathbf{8})\ \int \frac{dx}{x^2+5}, \quad 9)\ \int \frac{x^2}{x^2-4}\, dx,$$

$$\mathbf{10})\quad \int_0^{\pi} \sin 3x\ \cos x\, dx, \quad 11)\ \int_e^{e^3} \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx, \quad 12)\ \int \frac{1}{t^2+2-3t}\, dt,$$

$$13)\quad \int \frac{1}{t^2+t}\, dt \quad 14)\ \int \frac{dx}{\cos x}, \quad 15)\ \int \arcsin x\, dx.$$

$$16)\quad \int x\sqrt{(c^2-x^2)}\, dx \quad 17)\ \int \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx \quad 18)\ \int_1 \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx$$ *(par le changement* $\sqrt{x}=y$*).*

Exercice 1.2. *Calculer les intégrales doubles*

$I_1 = \iint_D (x+y^3)dxdy$ *avec* $D = [0,1]\times[-1,2]$.

$I_2 = \iint_D x^3y^2dxdy$ *avec* $D = [0,1]\times[-1,2]$, *puis* $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0<x<1, 0<y<x\}$.

$I_3 = \iint_D (x^2+y^2)dxdy$ *avec* $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\le x, 0\le y, x^2+y^2\le 1\}$.

$I_4 = \iint_D \frac{x}{y}dxdy$ *avec* $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1\le x^2+y^2\le 4, |x|\le|y|\}$.

$I_5 = \iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$ *avec* $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\le x, 0\le y, x+y<1\}$.

$I_6 = \iint_D \frac{x}{2\sqrt{4+y^2}}\, dxdy$ *avec* $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\le y\le \quad, 0\le x\le\sqrt{y}\right\}$.

Exercice 1.3. *Dessiner puis calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes :*
$y = x$ *et* $y = 2-x^2$.

Exercice 1.4. *Calculer les intégrales triples*

$\iiint_D e^{x-y+2z}\, dxdydz \quad avec \;\; D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; 0 \leq x \leq 1\;,\; 0 \leq y \leq 2\;,\; 0 \leq z \leq 3\}.$

$\iiint_D z^{x^2+y^2}\, dxdydz \quad avec \;\; D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; x^2+y^2 \leq 9 \;et\; 0 \leq z \leq 1\}.$

$\iiint_D ze^{x^2+y^2}\, dxdydz \quad avec \; D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2,\; 0 \leq z \leq 1\Big\}.$

Exercice 1.5. *Calculer I_1 et I_2 avec*

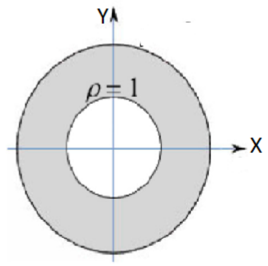
$$D_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\;\; 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2.x}\Big\} \quad et \quad D_2 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2+y^2 \leq 1\Big\}.$$

$$I_1 = \iint_{D_1} \cos(xy)\, dxdy$$

$$I_2 = \iint_{D_2} \frac{1}{9}\frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$$

Exercice 1.6. *Donner l'expression analytique du domaine D suivant, puis calculer*

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy.$$



Exercice 1.7. *En utilisant le bon changement de variable, calculer chacun des intégrales :*

$$\int x\sqrt{(c^2-x^2)}\, dx,$$

$$\iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)}\;\; dxdy,$$

avec $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\;\; x \geq 0, \;\; y \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 9\Big\}.$

$$\iint_D \frac{y}{2\sqrt{4+x^2}}\, dxdy,$$

avec $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\;\; 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}\Big\}.$

Exercice 1.8. *En coordonnées sphériques, la fonction d'onde correspondant à l'orbitale* $2p_x$ *de l'atome d'hydrogène est donnée par (en unités atomiques)*

$$\Psi_{2p_x} = Nre^{\frac{-r}{2}} \sin\theta \cos\varphi$$

La constante de normalisation N *est donnée par*

$$\iiint_V \Psi_{2p_x}^2 \, dV = 1$$

où dV *est l'élément de volume. Trouver* N*.*
Utiliser le fait que $\int_0^{+\infty} x^n \, e^{-qx} dx = \frac{n!}{q^{n+1}}$*.*

Exercice 1.9. *Calculer la valeur de la température* T *dans une plaque circulaire* D *décrite par* $x^2 + y^2 < R^2$ *si au point* (x, y) *cette température vaut*

$$T(x, y) = T_0 e^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Chapitre 2

Intégrales généralisées (2 semaines)

"Un mathématicien ce n'est pas quelqu'un qui passe son temps à faire des calculs, c'est quelqu'un qui trouve des techniques pour ne pas avoir à les faire."

Nous nous intéressons à l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$. Lorsque l'intervalle d'intégration $[a, b]$ est compact (fermé et borné) et la fonction f est définie sur $[a, b]$, il s'agit alors d'une intégrale au sens de Riemann (chapitre précédent).

- On parle d'une "intégrale généralisée" lorsque :

1) l'intervalle d'intégration n'est pas borné, i.e. $a = -\infty$ ou $b = +\infty$,

2) La fonction f n'est pas définie au moins en un point t_0 de $[a, b]$.

Exemples.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt, \qquad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{t}\,dt, \qquad \int_{-1}^{2} \frac{1}{t}\,dt, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt.$$

généralisée en $+\infty$, généralisée en $-\infty$, généralisée en 0, généralisée en $-\infty$ et 0 et $+\infty$.

• Si l'inégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est généralisée en b :

C'est le cas où : $b = +\infty$ ou bien f n'est pas définie en b $\big(f$ est continue sur $[a, b[\big)$.

Dans ce cas, si pour tout $x \in [a, b[$, la limite $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} b} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et vaut l, alors on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge et on écrit

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} b} \int_a^x f(t)\,dt = l.$$

Sinon, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Exemples.

1) $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est généralisée en $+\infty$.

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\int_0^x e^{-t}\ dt = -e^{-t}]_0^x = 1-e^{-x}$, d'où $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_a^x\ e^{-t}\ dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty}(1-e^{-x}) = 1$. Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt = 1$.

2) Par contre, $\int_1^{+\infty}\ \frac{dt}{t}dt$ diverge.

Remarque. Supposons que $b \neq +\infty$. $\int_a^b\ f(t)\ dt$ est généralisée en b car f n'est pas définie en b. Dans ce cas, si $\lim_{t\overset{<}{\longrightarrow}b} f(t)$ existe, alors $\int_a^b\ f(t)\ dt$ converge. On dit qu'il s'agit d'un faux problème en b.

Exemple. $\int_{-1}^0\ \frac{\sin t}{t}\ dt$ est généralisée en 0.

$\lim_{t\overset{<}{\longrightarrow}0} \frac{\sin t}{t} = 1$, donc $\int_{-1}^0\ \frac{\sin t}{t}\ dt$ est convergente (faux problème en 0).

• Si l'inégrale $\int_a^b\ f(t)\ dt$ est généralisée en a :

C'est le cas où : $a=-\infty$ ou bien f n'est pas définie en a. $\big(f$ est continue sur $]a,b]\big)$.

Dans ce cas, si pour tout $x\in]a,b]$, $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}a}\ \int_x^b\ f(t)\ dt$ existe et vaut l, alors on dit que l'intégrale $\int_a^b\ f(t)dt$ converge et on écrit

$$\int_a^b\ f(t)\ dt = \lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}a}\ \int_x^b\ f(t)\ dt = l.$$

Sinon, on dit que $\int_a^b\ f(t)dt$ diverge.

Exemples.

1) $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}dt$ est généralisée en $-\infty$.

Pour tout $x\in]-\infty,0]$, $\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t]_x^0 = -\arctan x$, d'où $\lim_{x\longrightarrow-\infty}\ \int_x^0\ \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\longrightarrow-\infty}(-\arctan x) = \frac{\pi}{2}$, donc $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ converge et $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

2) Par contre, $\int_0^1\ \frac{dt}{t}$ diverge.

Remarque. Supposons que $a \neq -\infty$. $\int_a^b\ f(t)\ dt$ est généralisée en a car f n'est pas définie en a. Dans ce cas, si $\lim_{t\overset{>}{\longrightarrow}a} f(t)$ existe, alors $\int_a^b\ f(t)\ dt$ converge. On dit qu'il s'agit d'un faux problème en a.

Exemple. $\int_0^1\ \frac{\sin t}{t}\ dt$ généralisée en 0.

$\lim_{t\overset{>}{\longrightarrow}0} \frac{\sin t}{t} = 1$, donc $\int_0^1\ \frac{\sin t}{t}\ dt$ est convergente (faux problème en 0).

• Si l'inégrale $\int_a^b\ f(t)\ dt$ est généralisée en a et b :

Soit f une fonction définie et continue sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

On suppose que $\int_a^b\ f(t)\ dt$ est généralisée en a et b.

• On dit que $\int_a^b\ f(t)\ dt$ converge si, ayant choisi un point $c\in]a,b[$, chacune des intégrales $\int_a^c\ f(t)\ dt$ et $\int_c^b\ f(t)\ dt$ converge. Dans ce cas :

$$\int_a^b\ f(t)\ dt = \int_a^c\ f(t)\ dt + \int_c^b\ f(t)\ dt.$$

• Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

Exemple. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$, par contre $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge.

Plus généralement, soit f définie et continue sur $]a, b[$ privé d'un point c (ou un nombre fini de points). On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si les intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ sont convergentes et on pose alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

2.1 Propriétés

Soient $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b g(t)\,dt$ deux intégrales généralisées convergentes. Alors,

• $\int_a^b (f(t) + g(t))\,dt$ converge, et $\int_a^b (f(t) + g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

• $\int_a^b \lambda f(t)\,dt$ converge, et $\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Si $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente et $\int_a^b g(t)\,dt$ est divergente, alors l'intégrale $\int_a^b (f+g)(t)\,dt$ est divergente (pour $[a, b[$, $]a, b]$ *ou bien* $]a, b[$).

2.2 Intégrale de Riemann

Soient c un nombre réel strictement positif et α un nombre réel quelconque. Les intégrales généralisées $\int_0^c \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ sont dites de Riemann.

Théorème 2.2.1.

$$\int_0^c \frac{1}{t^\alpha} dt \ \ \textit{converge} \Leftrightarrow \ \ \alpha < 1.$$

$$\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \ \ \textit{converge} \Leftrightarrow \ \ \alpha > 1.$$

2.3 Intégrales de Bertrand

Théorème 2.3.1. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pour $a > 1$,

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \quad \textit{converge si et seulement si } \alpha > 1 \ \textit{ ou } \ (\alpha = 1 \textit{ et } \beta > 1).$$

Pour $0 < a < 1$,

$$\int_0^{a} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt \quad \textit{converge si et seulement si } \alpha < 1 \ \textit{ ou } \ (\alpha = 1 \textit{ et } \beta > 1).$$

2.4 Critères de convegence des intégrales généralisées

2.4.1 Pour les fonctions positives :

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et soient f, g deux fonctions positives continues sur $[a, b[$.

Règle de comparaison

Si

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b[,$$

alors

$$\int_a^b g(t)\, dt \;\; converge \Longrightarrow \int_a^b f(t)\, dt \;\; converge$$

et

$$\int_a^b f(t)\, dt \;\; diverge \Longrightarrow \int_a^b g(t)\, dt \;\; diverge.$$

Exemples : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ converge, par contre $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt$ diverge.

Définition 2.4.1. *On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de b, et on écrit $f \underset{b}{\sim} g$, si* $\lim\limits_{x \longrightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Règle d'équivalence

Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b g(t)\, dt$ ont la même nature.

• On peut appliquer cette règle si f et g sont toutes deux négatives.

Exemple.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^3} dx.$$

Remarque. Les règles précédentes restent vraies si on suppose que l'intervalle est du type $]a, b]$ ou bien $]a, b[$.

2.4.2 Pour les fonctions de signe non constant :

Définition 2.4.2. *On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente. Autrement dit,*

$$\int_a^b f(t)dt \ \text{ converge absolument} \Leftrightarrow \int_a^b |f(t)|dt \text{ converge.}$$

Exemple.

$$\int_0^3 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt \qquad \text{est généralisée en } 0.$$

Nous avons pour tout $t \in]0,3]$, $|\cos t| \leq 1$, d'où

$$\mid \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \mid \leq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Or, $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente (intégrale de Riemann généralisée en 0 et $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), alors par le critère de comparaison, on conclut que $\int_0^3 \mid \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \mid dt$ converge, i.e. $\int_0^3 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ converge absolument.

Théorème 2.4.1. *La convergence absolue implique la convergence.*

Remarque l'inverse de ce Théorème n'est pas vrai, c.à.d., il se peut qu'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, cependant elle ne converge pas absolument. Dans ce cas, on dit qu'elle est semi-convergente.

Exemple. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$.

2.5 Exercices

Exercice 2.1. *Déterminer la nature des intégrales suivantes et calculer leur valeur en cas de convergence :*

$$1) \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}, \quad 2) \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx, \quad 3) \int_0^{+\infty} 1\, dt,$$

$$4) \quad \int_0^1 lnx\, dx, \quad 5) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}, \quad 6) \int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt,$$

$$7) \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\, dt, \quad \mathbf{8)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+5}, \quad 9) \int \frac{x^2}{x^2-4}\, dx.$$

Exercice 2.2. *Etudier la nature des intégrales suivantes :*

$$1)\quad \int \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}dx\ ,\quad 2) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}dt,\quad 3)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan t}}dt,$$

$$4)\quad \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx\ ,\quad 5)\ \int_0^1 \frac{e^x}{x}dx,\quad 6)\ \int_0^1 \frac{x^2+1}{x}dx,$$

$$7)\quad \int_{-\infty}^1 \frac{e^{\cos x}}{x}\,dx,\quad 8)\ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1},\quad 9)\ \int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt,\quad 10)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

Exercice 2.3. *Etudier la convergence absolue des intégrales suivantes :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx,\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt,\qquad \int_0^1 (\ln t)(\sin\frac{1}{t})dt,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos t dt,\qquad \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}dt,\qquad \int_0^1 \ln t \sin t dt,$$

Chapitre 3

Séries (3 semaines)

Le but à travers ce chapitre est d'introduite deux notions :

• **les séries entières** : qui seront principalement appliquées en résolution d'équations différentielles au chapitre 4.

• **les séries de Fourier** : qui trouvent plusieurs applications en physique et en chimie.

Pour arriver à ceci, nous allons d'abord introduire la notion de "série numérique", puis, progressivement les "suites de fonctions", ensuite les "séries de fonctions", et enfin, comme cas particuliers celles dites "entières" et celles dites "de Fourier". Tout ceci se construit à la base d'une "suite numérique".

3.1 Séries numériques

Prenons un récipient vide de contenance deux litres. On verse dans celui-ci un litre d'eau, puis un demi-litre, puis un quart de litre, puis un huitième de litre, ... et ainsi de suite.

Est-ce que le récipient va déborder ?

$$1\,l + \frac{1}{2}\,l + \frac{1}{4}\,l + \frac{1}{8}\,l + \frac{1}{16}\,l + \;... \geq 2\,l \quad ?$$

En fait, il s'agit d'une somme d'une infinité de termes, chacun de la forme $\frac{1}{2^n}$. C'est la somme de tous les termes de la suite $(\frac{1}{2^n})_n$. On appelle cela une série numérique de terme général $\frac{1}{2^n}$.

3.1.1 Définitions et propriétés

En général, soit $(u_n)_n$ une suite numérique à valeurs réelles (ou complexes).

• On appelle série numérique de terme général u_n la somme de tous les termes :

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

Par exemple, $x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + ...$ est la série numérique de terme général $\frac{x^n}{n!}$, i.e.

$$x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

• Pour tout entier naturel n, notons par S_n la somme des n premiers termes de la suite, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

• La suite $(S_n)_n$ est appelée " suite des sommes partielles" de $(u_n)_n$.

• On voit bien que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

• Si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge vers une limite S $\left(\lim_{n\to\infty} S_n = S\right)$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S$. On dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge vers S.

• Si, au contraire, la suite $(S_n)_n$ diverge, on dit que la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ diverge $\Big($le cas où $\lim_{n\to\infty} S_n$ n'existe pas ou bien $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty\Big)$. Par exemple, pour $u_n = \ln(n+1) - \ln n, \quad n \geq 1$.

• Si $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_n \lambda u_n$ converge, et $\sum_n \lambda u_n = \lambda \sum_n u_n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

• Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent, alors $\sum_n (u_n + v_n)$ converge, et $\sum_n (u_n + v_n) = \sum_n u_n + \sum_n u_n$.

• Si la série $\sum_n u_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

i.e. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ est une condition nécessaire pour que $\sum_n u_n$ converge. Autrement dit

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Longrightarrow \sum_n u_n \textit{ ne converge pas}$$

• La condition nécessaire de convergence n'est pas suffisante, car on peut avoir $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ cependant $\sum_n u_n$ diverge. Par exemple, la série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge malgré que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

• la nature d'une série numérique ne change pas en éliminant un nombre fini de termes.

3.1.2 Critères deconvergence

Peut-on savoir ou prédire la convergence ou non d'une série numérique sans passer par S_n ? Parfois oui, grâce à des théormes dits "règles de convergence".

Le cas des séries à termes réels positifs

Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries numériques à termes positifs $\left(i.e.\ u_n \geq 0,\ v_n \geq 0\ \forall n\right)$.

Théorème 3.1.1. ***(Règle de comparaison)*** *Si $u_n \leq v_n, \quad \forall n$, alors*

• $\sum_n v_n$ *converge* $\Longrightarrow$ $\sum_n u_n$ *converge.*

• $\sum_n u_n$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\sum_n v_n$ *divverge.*

Théorème 3.1.2. ***(Règle de D'Alembert)*** *Si la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ existe, alors*

• $l < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_n u_n$ *converge.*

• $l > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_n u_n$ *diverge.*

Théorème 3.1.3. ***(Règle de Cauchy)*** *Si la limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ existe, alors*

• $l < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_n u_n$ *converge.*

• $l > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_n u_n$ *diverge.*

Théorème 3.1.4. ***(Règle d'équivalence)*** *Si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum\limits_n u_n$ et $\sum\limits_n v_n$ sont de même nature.*

Exemple. $\sum\limits_n \ln \frac{n^2-1}{n^2}$.

Remarque. La règle d'équivalence peut être appliquée si tous les termes ont le même signe.

Le cas des séries numériques à termes quelconques

Définition 3.1.1. ***(la convergence absolue)***

Soit $\sum\limits_n u_n$ une série numérique. On dit que la série $\sum\limits_n u_n$ est absolument convergente (converge absolument) si la série $\sum\limits_n \mid u_n \mid$ est convergente.

Par exemple, $\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{n^2}$ convege absolument car $\sum\limits_n |\frac{(-1)^n}{n^2}| = \sum\limits_n \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème 3.1.5. *Si $\sum\limits_n u_n$ converge absolument, alors elle converge.*

Par exemple, $\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge puisque elle converge absolument.

Remarque. La réciproque n'est pas vraie. Par exemple, $\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{n}$ ne converege pas absolument $\left(\sum\limits_n |\frac{(-1)^n}{n}| = \sum\limits_n \frac{1}{n}\right)$, mais elle $\left(\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge (voir après). On dit qu'elle est semi-convergente.

Le cas des séries alternées

Définition 3.1.2. *On appelle série alternée toute série numérique dont le terme général est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$, avec $v_n \geq 0$.*

Théorème 3.1.6. *(Leibnitz) Soit $\sum\limits_n (-1)^n v_n$ une série alternée. Si la suite $(v_n)_n$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, alors la série $\sum\limits_n (-1)^n v_n$ est convergente.*

Par exemple, $\sum\limits_n \frac{(-1)^n}{n}$.

3.1.3 Quelques séries célèbres

Séries géométriques

$$\left(\sum_{n\geq 0} x^n \; converge\right) \;\; SSI \;\; \left(\mid x \mid < 1\right).$$

En cas de convergence $\sum\limits_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Séries de Riemann

$$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}\ converge\right)\ \ SSI\ \ \left(\alpha>1\right).$$

Séries de Bertrand $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$

- Si $\alpha>1$, elle converge $(\forall\beta)$.
- Si $\alpha<1$, elle diverge $(\forall\beta)$.
- Si $\alpha=1$, alors

  Si $\beta>1$, elle converge.

  Si $\beta\leq 1$, elle diverge.

Donc

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Il s'agit d'une série géométrique avec $\mid \frac{1}{2}\mid <1$, elle converge donc vers $\frac{1}{1-(\frac{1}{2})}=2$ litres. Le récipient ne va pas déborder.

3.2 Suites et séries de fonctions

3.2.1 Suite de fonctions

• On appelle suite de fonctions définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et on note $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont le terme général est une fonction f_n définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. i.e,

$$\begin{aligned}\forall n,\ \ f_n:\ \ I &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\mapsto f_n(x).\end{aligned}$$

Par exemple,

$$\left(\frac{x}{n(1+x^n)}\right)_n,\quad \left(\frac{x^n}{n!}\right)_n,\quad \left(\cos(nx)\right)_n.$$

• Si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers un $y_x \in \mathbb{R}$ (qui peut varier selon x), alors on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction

$$\begin{aligned} f: \quad I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) = y_x = \lim_{n\to\infty}[f_n(x)]. \end{aligned}$$

On appelle f la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $f_n \xrightarrow[I]{C.S.} f$ *dans* $\mathbb{R}$.

Par exemple, la suite de fonctions $\left(\frac{x}{n(1+x^n)}\right)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

• On appelle domaine de convergence simple de $(f_n)_n$ l'ensemble des $x \in I$ tels $(f_n(x))_n$ converge.

• Si les suites numériques $\{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}, x \in I\}$ convergent dans $\mathbb{R}$ chacune vers $f(x)$ mais avec une même vitesse, autrement dit, si

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{x\in I} f_n(x)\Big) = f(x),$$

alors on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction f. On appelle f la limite uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $f_n \xrightarrow[I]{C.U.} f$.

Par exemple, pour $\left(\frac{x}{n(1+x^n)}\right)_n$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{x\in I} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2(n-1)^{\frac{1}{n}}} = 0,$$

d'où $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{C.U.} 0$.

• Par définition, on peut montrer que la convergence uniforme implique la convergence simple. Par contre, l'inverse n'est pas vrai.

• Dans le cas de convergence uniforme, si chaque terme f_n est continue, alors

1) la fonction limite uniforme f est continue ;

2) pour $I = [a, b]$, la suite numérique $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $\int_a^b f(x)\,dx$. i.e.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Touts ces fonctions sont intégrables en étant continues sur $[a, b]$)

• On déduit de la propriété 1) précédente que si jamais la fonction limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas continue, alors la convergence n'est pas uniforme.

• Pour la propriété 2) l'intégrabilité de f est due à sa continuitée sur $[a, b]$. Si on a une convergence simple et pas uniforme, alors l'intégrabilité de f n'est pas assurée, et même lorsque elle est intégrable, son intégrale n' est pas forcément égale à la limite des intégrales.

3.2.2 Série de fonctions

Soient $(f_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• La somme (au sens de fonctions) de tous les termes de cette suite, notée $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est appellée série de fonctions (de terme général f_n). On peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_n : \quad I &\longrightarrow [-\infty,+\infty] \\ x &\mapsto \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{f_n(x)}. \end{aligned}$$

La série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est donc une fonction dont les valeurs peuvent être infinies, qui à chaque $x \in I$ associe la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Par exemples,

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+x^n)}, \qquad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

• Parfois on note $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ et on appelle f somme de la série.

• L'ensemble des $x \in I$ tels la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge **simplement** est appelé domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$. Par exemple pour $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, le domaine $D =]-1,1[$ (série de Riemann).

• Convergence simple : On dit que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge simplement sur I si pour tout $x \in I$ la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge (simplement) dans $\mathbb{R}$.

• Convergence absolue : On dit que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge absolument sur I si pour tout $x \in I$ la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge dans $\mathbb{R}$.

La convergence absolue d'une série de fonctions implique sa convergence simple.

• Convergence uniforme : On dit que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(S_n)_n$ telle que $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ converge uniformément sur I. $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles.

La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple.

Théorème 3.2.1. *(Intégrabilité) Si*

- *la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$;*
- *chaque terme f_n est continue sur $[a,b]$.*

Alors, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est intégrable. De plus la série numérique constituée des valeurs des intégrales est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_a^b f_n(t)dt \Big) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)(t)\, dt.$$

Théorème 3.2.2. *(Dérivabilité) Si*

- *il existe* $t_0 \in [a,b]$ *tel que la série numérique* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(t_0)$ *converge ;*
- *chaque terme* f_n *est dérivable de dérivée* f'_n *continue sur* $[a,b]$ *;*
- *la série des fonctions dérivées* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f'_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$.

Alors, la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$, *elle est dérivable de dérivée continue. De plus*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

3.3 Séries entières, séries de Fourier

3.3.1 Séries entières

Vu le volume horaire, les exemples sur cette section seront réservés à la partie des exercices.

Une série enitière (réelle) est un cas particulier d'une série de fonctions. C'est le cas où la fonction terme générale $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = a_n x^n$ telle que $(a_n)_n$ est une suite numérique réelle. i.e. $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Par exemlpe,

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \textit{ici} \;\; a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \textit{ici} \;\; a_n = \frac{1}{n!}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \textit{ici} \;\; a_n = 1, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit $\sum\limits_{n} a_n x^n$ une série entière.

- Il est clair qu'elle converge au moins en 0.
- Il existe un unique $\rho \in [0, +\infty]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

  $-\rho < x < \rho \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ converge,

  $\mathbf{x} < -\rho$ ou $\rho < x \implies \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge.

On appelle ce ρ le rayon de convergence de la série.

Par exemple, nous savons que pour tout $x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{n} x^n$ converge, cependant elle diverge pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Donc le rayon $\rho = 1$.

• On appelle $]-\rho,\rho[$ l'intervalle ouvert de convergence.

• Pour calculer ρ on peut, si la limite existe, appliquer :

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \qquad (\textit{règle de D'Alembert})$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}| \qquad (\textit{règle de Cauchy})$$

avec les conventions $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $\rho > 0$, et notons sa somme par f, i.e. $f(x) = \sum_n a_n x^n$. Alors,

• f est continue sur $]-\rho,\rho[$.

• Intégration :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_n t^n\, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \forall x \in]-\rho,\rho[.$$

• Dérivation :

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n$$

• f est infiniment dérivable sur $]-\rho,\rho[$ et les coefficients a_n satisfont

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc on peut écrire

$$f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n, \quad \forall x \in]-\rho,\rho[.$$

Cette dernière propriété permet de développer certaines fonctions en séries entières au voisinage d'un point, ce qui facilite l'utilisation de ces fonctions, notament en résolution d'équations différentielles.

En général, soit $f :]-a,a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

• On dit que V est un voisinage d'un réel x_0 s'il existe $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\subset V$.

• On dit que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 s'il existent un voisinage V de 0 et une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, de rayon ρ, tels que pour tout $x \in V$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Par exemple pour $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$, nous savons déja que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, *pour* $|x| \leq 1$. Dans ce cas $V =]-1,1[$.

• On dit que f admet un développement en série entière au voisinage d'un x_0 si la fonction $g(x) = f(x_0 + x)$ admet un développement au voisinage de 0.

• **Si** f admet un développement en série entière au voisinage de 0, alors f est infiniment dérivable et

$$\boxed{f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \forall x \in]-\rho, \rho[.}$$

Dévelopement (de Taylor) en séries entières de quelques fonctions usuelles

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

3.3.2 Séries de Fourier

Si une fonction f est **périodique** avec une période égale à 2π, si son intégrale sur la période est finie et si elle possède un nombre fini de discontinuités, elle peut être décomposée en une série de fonctions de la forme

$$x \longmapsto f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big]$$

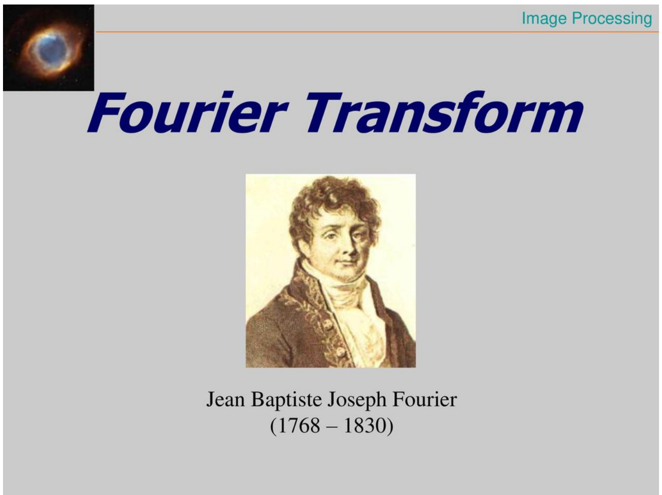
où les coefficients a_0, a_n, $b_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ se déterminent par des intégrales définies.

C'est en **1822**, dans un ouvrage intitulé "**Théorie analytique de la chaleur**", que le mathématicien-physicien **Joseph Fourier** a présenté le fondement de cette notion qui porte aujourd'hui son nom. C'est un développement en fonctions trigonométriques.

Mathématiquement, on peut grâce à ce développement obtenir, par des méthodes élémentaires, des résultats difficiles é vérifier par d'autres approches.

En physique ce développement correspond é la décomposition d'un phénoméne périodique compliqué en une somme d'oscillations "pures".

Notons que Fourier a permis de représenter certaines fonctions par une série sur tout un intervalle, cependant le développement de Taylor ne représentait une fonction qu'au voisinage d'un point.



Coefficients de Fourier :

• pour une fonction périodique de période 2π $(f(x) = f(x+2\pi))$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.}$$

Si en particulier f est paire $(f(-x) = f(x))$:

$$a_n = \frac{\mathbf{2}}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Si elle est impaire $(f(-x) = -f(x))$:

$$a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{\mathbf{2}}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

• Plus généralement, pour une fonction périodique de période 2ω $(f(x) = f(x+\omega))$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\cos(n\frac{\pi}{\omega}x)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\sin(n\frac{\pi}{\omega}x)dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.}$$

Exemple. Considérons la fonction **créneau régulière** de largeur 2π, définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & si \ -\pi \leq x \leq 0, \\ 1, & si \ 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Calculons les coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{0}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(\mathbf{0})dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-1)dx + \int_{0}^{\pi} 1\ dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-x]_{-\pi}^{0} + x]_{0}^{\pi}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\hat{e}$

$$\begin{aligned}
a_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(\mathbf{n}x)dx &= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} -\cos(\mathbf{n}x)dx + \int_{0}^{\pi}\cos(\mathbf{n}x)dx\Big)\\
&= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{1}{n}\sin(nx)]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\sin(nx)]_{0}^{\pi}\Big)\\
&= \frac{1}{n\pi}\Big(-\sin(nx)]_{-\pi}^{0} + \sin(nx)]_{0}^{\pi}\Big)\\
&= \frac{1}{n\pi}\Big(-\sin(0)+\sin(-n\pi)+\sin(n\pi)-\sin(0)\Big)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(\mathbf{n}x)dx &= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} -\sin(\mathbf{n}x)dx + \int_{0}^{\pi}\sin(\mathbf{n}x)dx\Big)\\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{n}\cos(nx)]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\cos(nx)]_{0}^{\pi}\Big)\\
&= \frac{1}{n\pi}\Big(\cos(nx)]_{-\pi}^{0} - \cos(nx)]_{0}^{\pi}\Big)\\
&= \frac{1}{n\pi}\Big(\cos(0)-\cos(-n\pi)-\cos(n\pi)+cos(0)\Big)\\
&= \frac{1}{n\pi}\Big(1-(-1)^n-(-1)^n+1\Big)\\
&= \frac{2}{n\pi}\big(1-(-1)^n\big).
\end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[0.\cos(nx) + \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).\sin(nx)\Big]\\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}.\sin(nx)\\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{2k+1}}{2k+1}.\sin((2k+1)x)\\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}.\sin((2k+1)x).
\end{aligned}$$

Donc, le développement en série de Fourier de la fonction créneau est

$$f(x) = \frac{4}{n\pi}\Big[\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + ...\Big].$$

Série de Fourier sous la forme complexe

Egalité de Liapunov-Parseval

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n^2+b_n^2\Big)}.$$

Applications des séries de Fourier.

On en trouve plusieurs applications en physique et en chimie. Par titre d'exemple en **optique** (voir [6]) : Décomposition d'une polarisation non linéaire en ses composantes fixe, fondamentale et première harmonique. L'optique non linéaire repose sur la polarisation moléculaire en présence d'un champ électrique externe.

. Lorsque le champ est faible, la polarisation P est proportionnelle à l'intensité du champ E, i.e,

$$P = \varepsilon_0 \chi E$$

telle que χ est la susceptibilité électrique linéaire. Ici, la réponse est directement proportionnelle au champ.

. En présence de champs électriques intenses (comme ceux produits par les lasers) des termes non-linéaires apparaissent

$$P = \varepsilon_0 \chi E + \varepsilon_0 \chi_2 E^2 + \varepsilon_0 \chi_3 E^3 + \ ...$$

telles que χ_2 et χ_3 sont les premières et secondes hyperpolarisabilités nonlinéaires.

Dans ce cas, l'introduction d'un champ électrique oscillant $E = E_0 sin(\omega t)$ provoque la polarisation qui, par développement en série de Fourier, nous donne une polarisation totale qui n'est plus proportionnelle au champ incident et qui est, donc, une réponse non symétrique

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon_0 \Big(\chi E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + \ ... \Big) \\ &= \varepsilon_0 \Big(\chi E_0 sin(\omega t) + \chi_2 \big(E_0 sin(\omega t) \big)^2 + \chi_3 \big(E_0 sin(\omega t) \big)^3 + \ ... \Big) \end{aligned}$$

et comme $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon_0 \Big(\chi E_0 sin(\omega t) + \chi_2 E_0^2 \frac{1-\cos(2\omega t)}{2} + \ ... \Big) \\ &= \varepsilon_0 \Big(\chi E_0 sin(\omega t) + \frac{1}{2} \chi_2 E_0^2 - \frac{1}{2} \chi_2 E_0^2 \cos(2\omega t) + \ ... \Big) \\ &= \underbrace{\varepsilon_0 \frac{1}{2} \chi_2 E_0^2}_{composante\ fixe} + \underbrace{\varepsilon_0 \chi E_0 sin(\omega t)}_{composante\ fondamentale} \underbrace{- \varepsilon_0 \frac{1}{2} \chi_2 E_0^2 \cos(2\omega t)}_{seconde\ harmonique} + \ ... \end{aligned}$$

Un champ de fréquence $\omega = 2\pi V$ génère une réponse de fréquence double 2ω.

C'est le phénomène de génération de seconde harmonique.

Par exemple, un rayonnement de laser dans le domaine du rouge traverse un cristal de phosphate d'hydrogène d'ammonium et en ressort avec une fréquence double dans le bleu.

3.4 Exercices

Exercice 3.1. • *Etudier la nature des séries numériques de terme général* u_n

$$1)\ u_n = e^{-n}, \qquad 2)\ u_n = \frac{1+n^2}{n!}, \qquad 3)\ u_n = \frac{n+2}{3^{n+1}},$$

$$4)\ u_n = \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}), \qquad 5)\ u_n = \frac{\sin^2}{n^2}, \qquad 6)\ u_n = (-1)^n,$$

$$7)\ u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}, \qquad 8)\ u_n = \frac{1}{n(1+\ln n)}, \qquad 9)\ u_n = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}},$$

$$10)\ u_n = \frac{2^n}{n+3^n},$$

puis

$$11)\ u_n = \frac{1}{n\cos n}, \qquad 12)\ u_n = (-1)^n \cos\frac{\pi}{n}, \qquad 13)\ u_n = (-1)^n \cos\frac{2^n}{n!}.$$

• *Considérons la série suivante*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+a)}, \quad \textit{avec } a \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer qu'elle est convergente. Calculer sa somme.

Exercice 3.2. • *Etudier la convergence simple et absolue des séries de fonctions de terme général*

$$f_n = e^{-nx}\ \cos x, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

• *Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général*

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-\sqrt{n}x}}{n}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Exercice 3.3. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes*

$$\sum_{n\geq 1} x^n \log x$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

Exercice 3.4. *Développer en série entière la fonction définie par*

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad (\textit{au voisinage de } 0).$$

Puis

$$f(x) = e^x \quad (\textit{au voisinage de } x_0 = -2).$$

Exercice 3.5. *(pour chapitre 4) Résoudre les EDO suivantes par la méthode des séries*

$$y'' = -y; \qquad\qquad y'' + xy' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Exercice 3.6. *Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2, définie par*

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad (-1 \leq x \leq 1).$$

Exercice 3.7. *Donner la décomposition en série de Fourier de la fonction périodique de période 2π, définie par*

$$f(x) = \pi + x \qquad\qquad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

Exercice 3.8. *Développer en série de Fourier* ***l'impulsion rectangulaire*** *de période 2π et de largeur π, f, définie par*

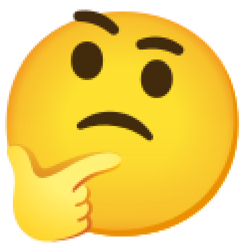
$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 1, & si\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0,, & si\ \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Chapitre 4

Equations Différentielles (5 semaines)

4.1 C'est quoi et pourquoi (motivation) ?

Un gâteau est sorti du four à $16^h : 00$. Après quelques minutes sa température diminue. La température de la cuisine est $20°C$. Sachant que, sorti du four à $16^h : 00$, il était brulant et qu'à $16^h : 10$ sa température est de $80°C$, à quelle heure dois-je servir le gateaux à mes chers invités pour qu'il soit à $60°C$?



Newton a trouvé qu'en certaines circonstances, un corps à la température T, plongé dans un milieu à la température S $(S < T)$ se refroidira de telle sorte que la vitesse de refroidissement sera proportionnelle à la différence de température $T - S$ entre le corps et le milieu ambiant. C'est à dire, il existe une constante k telle que $la\ vitesse = k.(T - S)$.

La température du gâteau varie avec le temps, (par expérience elle diminue), c'est une fonction de la variable temps notée t (en minutes), on va la noter $y(t)$. C'est un phénomène de refroidissement

La vitesse en général, ...

Si la "vitesse" était constante par rapport au temps, elle serait

$$v = \frac{la\ distance}{le\ temps\ pris} = \frac{\Delta Y}{\Delta t} = \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t},$$

pour deux instants quelconques t_1, t_2. Or, ici la vitesse n'est pas constante, elle est variable aussi en fonction du temps t, elle est ponctuelle, instantannée, en chaque instant t, on va la noter $v(t)$. Dans ce cas, pour chaque instant t, on choisit deux instants très proche l'un de l'autre $t, t + h$ $(h \to 0)$, d'où

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t + h) - y(t)}{h}$$

cette dernière quantité n'est d'autre que "la dérivée" de la fonction y à l'instant t (par définition mathématique), i.e

$$v(t) = y'(t), \forall t$$

Remarque : En général, la dérivée d'une fonction f en x mesure le taux instantané de variation de f en x.

Donc d'après la loi de refroidissement de Newton, il existe une constante k telle que

$$y'(t) = k(y(t) - temp_{cuisine}) = k(y(t) - 20).$$

Nous sommes face à une relation d'égalité (équation) faisant intervenir une variable t, une fonction de cette variable y (inconnue) et sa dérivée première y'.

Les inconnues sont les fonctions $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (I est son intervalle de définition).

On appelle cela "une équation différentielle" du premier ordre. En éliminant la variable t, pour simplifier l'écriture, on obtient

$$\dot{y} = k(y - 20).$$

Comment trouver $y(t)$? Autrement dit, comment résoudre une équation différentielle ?

La Mécanique, la dynamique, l'électricité, la biologie, l'économie, la démographie, les probabilités, ... fournissent des situations dont l'étude conduit à une équation différentielle, que nous ne craindrons pas de présenter sommairement comme une relation, sous la forme d'une équation, entre une fonction et ses dérivées successives.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire les modèles mathématiques efficaces qui traduisent des phénomènes dynamiques en sciences appliquées, véritables pans de notre réalité : physique-chimie, biologie, économie... Elles représentent un très vaste champ d'étude dans le domaine de la mathématique. Ces équations apparaissent en quelque sorte éconstitutivesé de la nature et de ses sciences, un langage étonnamment fondamental et universel qui réussit à s'amplifier de lui-même grâce au travail des mathématiciens, des physiciens et de tous les acteurs de la science par corroboration avec l'expérimental. Leurs études qualitatives sont souvent complexes et les outils simples d'analyse ne permettent pas toujours d'avoir une méthode unifiée ; chaque nouvelle équation différentielle sera en quelque sorte un cas particulier.

Les équations différentielles revêtent une grande importance en mathématiques en raison de leurs domaines d'application. Elles sont au coeur de chaque modèle que nous développons pour expliquer tout scénario ou évenement du monde, que ce soit en physique, en chimie, en ingénieurie, en statistique, en analyse financière ou en biologie, la liste est interminable. En fait, jusqu'à ce que le calcul devienne une théorie établie, aucun outil mathématique approprié n'était disponible pour analyser les problèmes intéressants de la nature.

4.2 Généralités

Définition 4.2.1. *Une équation différentielle est une relation entre une variable x, une fonction de cette variable y (inconnue) et certaines de ses dérivées* $(y', y'', ...)$.

Par exemple, $xy' + x^2 = e^y$, $\frac{\partial U}{\partial t} + U(t,x)\frac{\partial U}{\partial x} = 0$.

• les inconnues, pour la première par exemple, sont une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dont I EST son intervalle de définition.

• On parle d'équation différentielle **ordinaire** (**EDO**) si l'inconnue y est une fonction d'une seule variable x.

• On parle d'équation différentielle aux dérivées **partielles** (**EDP**) lorsque l'inconnue est une fonction de plusieurs variables.

• On dit que l'équation est d'ordre **n** si elle contient des dérivées de y jusqu'à l'ordre **n**.

• On dit que l'équation est de degré **m** si la plus haute dérivée de y figurant dans l'équation est de degré **m**.

• On note généralement la variable de la fonction y par x mais si la variable désigne le temps par exemple on préfère la noter par t.

Exemples.

• $xy' + x^2 = e^y \longrightarrow$ EDO du $1 \stackrel{er}{=}$ ordre,

• $y'' = 3y + y' + 1 \longrightarrow$ EDO du 2^{nd} ordre,

• $y'' = 3y + 1 \longrightarrow$ EDO du 2^{nd} ordre.

• $y''^2 + xy'^3 = 5 \longrightarrow$ EDO du 2^{nd} ordre.

• $\dot{y} - ty = y^2 \longrightarrow$ du 2^{nd}, l'inconnu est la fonction $y(t) =?$

• $y''' + 2xy'' + y'^2 = \cos x \longrightarrow$ EDO du d'ordre 3, de degrés 1.

• $y'' = (5 - 2y')^{\frac{3}{2}} \longrightarrow$ EDO d'ordre 2, de degré 2, car c'est équivaut à $(y'')^2 = (5 - 2y')^3$.

• $(1 + x)y^2 + \ln xy = e^x$ **n'est pas une équation différentielle** car elle ne contient pas des dérivées de la fonction y.

• $\frac{\partial U}{\partial t} + U(t, x)\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \longrightarrow$ EDP, du 2^{nd} ordre, l'inconnu est la fonction U aux deux variables t et x.

Dans ce cours nous nous intéressons uniquement aux EDO.

La forme générale d'une **EDO** d'ordre **n** est

$$\mathcal{R}\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}(x)\right) = 0,$$

où la relation $\mathcal{R}$ est une fonction connue dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$ et $x \in I \subset \mathbb{R}$.

On dit que l'équation est résoluble par rapport à la dérivée si on peut l'écrire sous la forme

$$y^{(n)}(x) = \mathcal{F}\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right),$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction connue dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et $x \in I \subset \mathbb{R}$. • Résoudre (on dit aussi intégrer) cette équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions y ($y(x) =?$), définies et **n** fois dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, qui satisfont l'équation. Par exemple, résoudre l'équation différentielle $\dot{y}(t) = -y(t)$ signifie chercher toutes les fonctions

$$\begin{aligned} y : \ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto y(t) = ? \end{aligned}$$

telles que $\dot{y}(t) = -y(t)$ pour tout $t \in I$.

• Une EDO admet généralement une infinité de solutions. Pour choisir, entre les dif-

férentes solutions, celle qui décrit le problème physique par exemple, il faut considérer d'autres données qui dépendent de la nature du problème, par exemple la valeur prise par la solution (et/ou éventuellement ses dérivées) en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration.
Dans ce cas, en général, on cherche un intervalle I, contenant t_0, sur lequel une solution existe, et qui soit "le plus grand possible" : il n'existe pas d'intervalle plus grand sur lequel l'équation différentielle ait une solution. Cet intervalle s'appelle intervalle de vie de la solution. Une solution définie sur cet intervalle le plus grand possible s'appelle solution maximale.

• Pour faciliter l'identification, les équations différentielles sont classées par leur comportement mathématique. Linéaire et non linéaire est l'une de ces catégories.

• On dit que l'équation différentielle est **linéaire** si elle vérifie :

1) la fonction inconnue, ainsi que toutes ses dérivée sont de degrés 1,

2) l'équation ne contient pas un produit de la fonction inconnue avec l'un de ses dérivées, ni entre les dérivées.

Par exemple,

$xy' + x^2 = e^y;\qquad y'' = 3y + 1$

sont des EDO linaires, par contre

$yy'' + y' = x;\qquad y' + x\sqrt{y} = \cos x$

sont des EDO **non** linéaires.

La forme générale d'une **EDO linéaire** d'ordre **n** est

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_n(x)y^{(n)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = R(x),$$

où $a_0, a_1, ..., a_n, R$ sont des fonction connues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
On distingue deux types de solutions pour une équation différentielles : solution implicite et solution explicite.

4.3 Equations différentielles ordinaires du 1^{er} ordre

La forme générale d'une **EDO** du premier ordre est

$$\mathcal{R}\Big(x, y(x), y'(x)\Big) = 0,$$

mais nous allons nous restreindre dans ce cours aux **EDO** du premier ordre qui peuvent s'écrire sous la forme

$$y'(x) = h\Big(x, y(x)\Big) \qquad ...(I)$$

Si le second membre h ne dépend pas explicitement de x, alors on dit que l'EDO est autonome.

Une condition initiale est une relation de la forme $y(x_0) = y_0$ telle que y_0 est une valeur donnée.

Lorsqu'on se donne une telle équation et une condition initiale, c'est à dire

$$\begin{cases} y'(x) = h\Big(x, y(x)\Big) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

on appelle ça un problème de Cauchy.

Proposition 4.3.1. *Le problème de Cauchy est équivalent à l'équation intégrale*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} h(u, y(u))du.$$

Cette équivalence sera utile pour les méthodes numériques.

Le suivant est un théorème d'existence et d'unicité globale, connu sous le nom de "Cauchy-Lipschitz"

Théorème 4.3.1. *Considérons une fonction $h : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto h(x, y)$. On suppose que h est*

- continue par rapport à ses deux variables,

- uniformément Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, i.e. il existe une constante $L > 0$ telle que

$$\mid h(x, y_1) - h(x, y_2) \mid \leq L \mid y_1 - y_2 \mid, \quad \forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Alors, pour toute condition initiale $y(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$, il existe une unique solution maximale $y(x)$ de l'EDO $y'(x) = h(x, y(x))$ et cette solution est de classe $C^1(I)$.

Nous allons voir principalement quatre types d'EDO du premier ordre :

1) à variables séparables

2) Linéaires

3) De Bernoulli

4) Celles de Riccati .

4.3.1 À variables séparables

C'est le cas où le second membre $h(x, y(x))$ est de la forme $h(x, y) = h_1(x).h_2(y(x))$, c'est à dire

$$y'(x) = h_1(x).h_2(y(x)),$$

ou brièvement

$$y' = h_1(x).h_2(y).$$

Par exemple,

$$y' = x^2.e^y$$

$$\left(y'(x) = x^2.e^{y(x)}\right)$$

et

$$\dot{y} = 3(y - 10)$$

$$\Big(\dot{y}(t) = 3\big(y(t) - 10\big)\Big).$$

Comment résoudre ?

Nous séparons,

$$\frac{y'(x)}{h_2(y(x))} = h_1(x),$$

puis nous intégrons

$$\int \frac{y'(x)}{h_2(y(x))} dx = \int h_1(x) dx.$$

Ou bien en pratique, l'équation (la forme abrégée) en général devient

$$\frac{dy}{dx} = h_1(x).h_2(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{h_2(y)} = h_1(x)dx,$$

en intégrant formellement les deux membres

$$\int \frac{1}{h_2(y)} dy = \int h_1(x)dx,$$

nous obtenons

$$G(y) = F(x) + \textit{une constante},$$

F et G étant les primitives, puis nous essayons d'exprimer y en fonction de x ou bien on garde une solution implicite.

Par **exemple**,

$$y' + \frac{y}{x} = 0, \quad x \in]0, 1[$$

nous réordonnons l'équation

$$y' = \frac{-1}{x}.y \qquad ...(1)$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{-1}{x},$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{-1}{x} dx,$$

$$\Rightarrow \ln \mid y(x) \mid = -\ln \mid x \mid + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ln \mid y(x) \mid = -\ln x + c, \quad car\ x > 0$$

$$= \ln \frac{1}{x} + c,$$

$$\Rightarrow e^{\ln |y(x)|} = e^{\ln \frac{1}{x} + c}$$

$$\Rightarrow \mid y(x) \mid = \frac{1}{x}.e^c$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm e^c.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{C}{x}, \quad tel\ que\ C = \pm e^c.$$

Ou bien, en pratique

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{-1}{x} y \\
\Rightarrow \frac{dy}{y} &= \frac{-1}{x} dx \\
\Rightarrow \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{-1}{x}\, dx \\
\Rightarrow \ln \mid y \mid &= -\ln \mid x \mid + c \\
&= -\ln x + c, \quad car\ x > 0 \\
&= \ln \frac{1}{x} + c,
\end{aligned}$$

telle que c est une constante réelle quelconque ($c \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow e^{\ln |y|} &= e^{\ln \frac{1}{x} + c} \\
\Rightarrow \mid y \mid &= \frac{1}{x}.e^c \\
\Rightarrow y &= \pm e^c.\frac{1}{x} \\
\Rightarrow y &= \frac{C}{x}, \quad C = \pm e^c.
\end{aligned}$$

Donc les solutions de l'équation (1) sont (la solution générale est) toutes les fonctions définies par

$$y(x) = \frac{C}{x}, \quad x \in]0, 1[,$$

avec $C \in \mathbb{R}$ (ce qui donne une infinité de solutions).

$$\dot{y} = 3(y - 20) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{dy}{dt} &= 3(y-20)\\
\Rightarrow \frac{dy}{y-20} &= 3\ dt\\
\Rightarrow \int \frac{1}{y-20} dy &= \int 3\ dt\\
\Rightarrow \ln \mid y-20 \mid &= 3t + c; \quad c \in \mathbb{R}.\\
\Rightarrow e^{\ln|y-20|} &= e^{3t+c}\\
\Rightarrow \mid y-20 \mid &= e^{3t}e^{c} = e^{c}e^{3t}\\
\Rightarrow y - 20 &= \pm e^{c}e^{3t},\\
\Rightarrow y &= Ce^{3t} + 20; \quad C = \pm e^{c}.
\end{aligned}$$

Donc la solution générale (**les** solutions) de l'équation (2) est

$$y(t) = C\ e^{3t} + 20,\ C \in \mathbb{R}^*.$$

Si on ajoute une condition intiale, par exemple, $y(0) = 100$, alors

$$y(0) = 100 \Leftrightarrow Ce^{3.0} + 20 = 100 \Leftrightarrow C.1 + 20 = 100 \Leftrightarrow C = 100 - 20 = 80.$$

Parmis toutes les solutions de l'équation différentielle (2), une seule vérifie la condition initiale, c'est la fonction définie par

$$y(t) = 80e^{3t} + 20.$$

Exemples d'application

De la cinétique chimique ([4]). Considérons l'équation

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1\ [A],$$

On rencontre ce genre d'équations lors de la cinétique chimique. Il s'agit bien d'une EDO du premier ordre. Généralement le symbôle $[A]$ désigne la concentration de l'espèce A. Il est clair qu'ici la concentration n'est pas constante, elle change en fonction du temps t : $[A]$ est une "fonction" de la variable temps notée t, on peut la noter, par les symbôles mathématiques ordinaires habituels, par $y(t)$ par exemple, alors l'équation devient

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k_1\ y(t),$$

qui s'écrit en éliminant le t (juste pour simplifier)

$$\frac{dy}{dt} = -k_1\ y,$$

et la condition initiale $[A]_0 = \alpha$ devient $y(0) = \alpha$.

On peut résoudre l'équation directement en gardant sa notation chimique-mathématique, on voit bien qu'elle est à variables séparable d'où

$$\begin{aligned}\frac{d[A]}{[A]} = -k_1\ dt \Rightarrow \int \frac{d[A]}{[A]} = \int -k_1\ dt \quad &\Rightarrow \quad \ln \mid [A] \mid = -k_1 t + c \\ &\Rightarrow \quad \ln[A] = -k_1 t + c \ \ (car\ [A]_t \geq 0,\ \forall t) \\ &\Rightarrow \quad [A] = e^c e^{-k_1 t} \\ &\Rightarrow \quad [A] = C e^{-k_1 t},\end{aligned}$$

la constante réelle C peut être exprimée en fonction de la concentration initiale $[A]_0$, en effet, de la dernière expression pour $t = 0$

$$[A]_0 = C e^{-k_1(0)} = C,$$

d'où

$$[A]_{\mathbf{t}} = [A]_0 e^{-k_1 \mathbf{t}}.$$

Nous pourrons donc prédir la valeur de concentration à chaque instant t.

Loi de refroidissement de Newton.

• Nous avons trouvé que l'équation différentielle qui décrit le phénomène est

$$\dot{y} = k\ (y - 20\text{é}),$$

c'est une EDO du premier ordre. Il est clair qu'elle est à variables séparables. (c'est l'équa. (2) au lieu de la valeur 3 nous avons une constante k en général, on suit les mêmes étapes de démonstration).

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= k(y-20) \\ \Rightarrow \frac{dy}{y-20} &= k\ dt \\ \Rightarrow \int \frac{1}{y-20} dy &= \int k\ dt \\ \Rightarrow \ln \mid y - 20 \mid &= kt + c \\ \Rightarrow \mid y - 20 \mid &= e^c e^{kt} \\ \Rightarrow y - 20 &= \pm e^c e^{kt},\end{aligned}$$

donc la solution générale de l'équation est

$$y(t) = C\ e^{kt} + 20,\ C \in \mathbb{R}.$$

Interprétation des données :

• L'instant $t = 0$ corespond à l'heure $16^h : 00$, cela signifie que l'instant $t = 10$ (en minutes) correspond à l'heure $16^h : 10$.

Donc, d'après les données nous avons $y(0) = 100°$ et $y(10) = 80°$.

• La condition intiale $y(0) = 100°$ nous permet de trouver la valeur de la constante réelle C. En effet,

$$y(0) = 100° \ \Leftrightarrow\ C\ e^{k.0} + 20 = 100° \ \Leftrightarrow C + 20 = 100 \Leftrightarrow C = 80.$$

Donc finalement,

$$y(\mathbf{t}) = 80\ e^{k\mathbf{t}} + 20.$$

• Maintenant, l'autre condition nous permet de trouver la valeur de la constante k. En effet,

$$\begin{aligned} y(10) = 80 \quad &\Leftrightarrow \quad 80\ e^{k.10} + 20 = 80 \\ &\Leftrightarrow \quad 80\ e^{10k} = 60 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{10k} = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln e^{10k} = \ln \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad 10k = \ln \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{10} \ln \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

la constante k est négative.

• La relation finale qui exprime la température du gâteaux é chaque instant t est donc

$$y(t) = 80\ e^{(\frac{1}{10} \ln \frac{3}{4})\ t} + 20.$$

• Trouver "l'heure" revient é trouver d'abord l'instant t^* qui correspond é $y(t^*) = 60$é,

$$\begin{aligned} t^* =? \quad &\Longleftrightarrow \quad y(t^*) = 60° \\ &\Leftrightarrow \quad 80\ e^{(\frac{1}{10} \ln \frac{3}{4})\ t^*} + 20 = 60° \\ &\Leftrightarrow \quad e^{(\frac{1}{10} \ln \frac{3}{4})\ t^*} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

l'heure demandée ce n'est que

$$16^h : 00 + t^* minutes.$$

Bonne appétit.

Décroissance radioactive, datation au carbone 14.

Un noyau radioactif est un noyau instable dont la désintégration (destruction) aléatoire s'accompagne de :

• l'apparition d'un nouveau noyau

• l'émission d'une particule notée α, β^- ou β^+

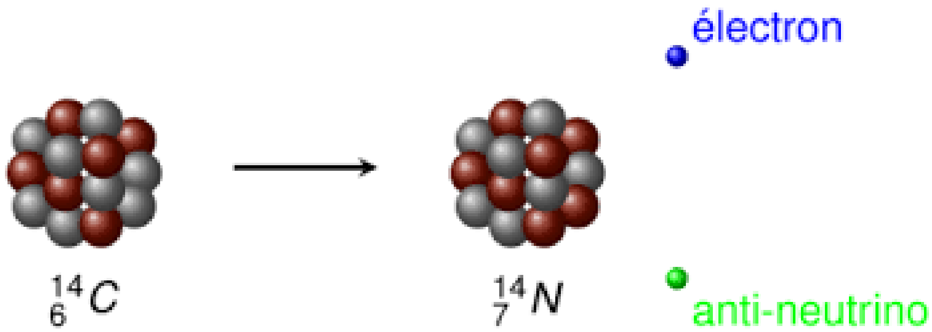
• l'émission d'un rayonnement électromagnétique noté γ.

La radioactivité est une réaction dite nucléaire car elle concerne le noyau de l'atome alors que les réactions chimiques ne concernent que le cortége électronique sans modifier le noyau.

Les isotopes stables du carbone sont le carbone 12 et le carbone 13 (avec une abondance naturelle de $98,9$ pour cent de carbone 12). Le carbone 14 présente un excés de neutrons par rapport é ces isotopes stables, il est radioactif. Il se désintégre donc par radioactivité β^- :

$$^{14}_{7}C \quad \longrightarrow \quad ^{14}_{7}N \quad + \quad ^{0}_{-1}\beta^- \quad + \quad ^{0}_{0}\bar{v}$$

Le noyau fils formé posséde 7 protons, il s'agit donc d'un isotope de l'azote. De plus il posséde 14 nucléons, on obtient donc de l'azote 14. L'azote 14 est un isotope stable.



Le carbone 14 est un isotope présent dans tout organisme vivant.

En 1940, le chimiste W. Libby montre que les étres vivants fixent des atomes de carbone stables et radioactifs (respectivement le carbone 12 et 14) dans un rapport constant $14C/12C = 1,2.10^{-12}$.

Suite au décés de l'étre vivant (é la mort de l'organisme), le carbone 14 se désintégre et le précédent rapport diminue. En fait, le nombre d'atomes décroît avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes.

• Notons par $\mathbf{N(t)}$ le nombre d'atomes au temps $\mathbf{t}$ (exprimé en années). La vitesse de décroissance, V, est donc le taux de variation du nombre d'atomes en une unité de temps (ici en une année).

$$V = \frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

Comme elle n'est pas constante, elle change en fonction du temps t, on obtient

$$\textit{la vitesse instantannée } V(t) = N'(t).$$

Le mécanisme de décroissance aprés la mort de l'organisme, se traduit donc par l'équation

$$N'(t) = -\mathbf{K}N(t),$$

oé $\mathbf{K}$ est une constante réelle positive. Il s'agit bien d'une EDO du premier ordre, é variable séparables.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{N'(t)}{N(t)} &= -\mathbf{K} \\
\Rightarrow \int \frac{N'(t)}{N(t)} dt &= \int -\mathbf{K}\, dt \\
\Rightarrow \ln(N(t)) &= -\mathbf{K}t + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow N(t) &= Ce^{-\mathbf{K}t}, \quad \textit{avec } C = e^c
\end{aligned}$$

et comme $N(0) = Ce^{-\mathbf{K}.(0)} = C$, nous obtenons

$$\boxed{N(\mathbf{t}) = \mathbf{N(0)}.e^{-\mathbf{Kt}}}$$

Via cette équa. diff., en connaissant la valeur de $\mathbf{K}$, de $\mathbf{N(0)}$ ou d'autres, il devient possible de déterminer la datation du décés, d'un squelette ...etc.

Par **exemple**, savoir qu'il faut environ **5700** ans pour que la quantité de carbone 14 diminue de **moitié** dans un organisme mort, nous permet de trouver la valeur de $\mathbf{K}$, car cela veut dire

$$N(5700) = \frac{N(0)}{2},$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbf{N(0)}.e^{-\mathbf{5700\,K}} &= \frac{N(0)}{2}\\
\Rightarrow e^{-\mathbf{5700\,K}} &= \frac{1}{2}\\
\Rightarrow \ln e^{-\mathbf{K.5700}} &= \ln\frac{1}{2}\\
-\mathbf{K}.5700 &= -\ln 2\\
\mathbf{K} &= \frac{\ln 2}{5700},
\end{aligned}
$$

d'oé

$$
\boxed{N(\mathbf{t}) = \mathbf{N(0)}.e^{-\frac{\ln \mathbf{2}}{\mathbf{5700}}\mathbf{t}}.}
$$

Sachant de plus que des ossements anciens recemment exhumés contiennent $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$ la quantité du carbone 14 présente dans des ossements similaires d'aujourd'hui, nous pouvons déterminer *l'âge* des ossements exhumés. Il faut trouver le temps $\mathbf{t}^*$ qui s'est écoulé aprés la mort, qui elle correspont é $t = 0$. Les données s'expriment en terme d'équation par

$$
N(\mathbf{t}^*) = \frac{1}{9}N(0),
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow N(0).e^{-\frac{\ln \mathbf{2}}{\mathbf{5700}}\mathbf{t}^*} &= \frac{1}{9}N(0)\\
\Rightarrow e^{-\frac{\ln \mathbf{2}}{\mathbf{5700}}\mathbf{t}^*} &= \frac{1}{9}\\
\Rightarrow \ln e^{-\frac{\ln \mathbf{2}}{\mathbf{5700}}\mathbf{t}^*} &= \ln\frac{1}{9}\\
-\frac{\ln \mathbf{2}}{\mathbf{5700}}\mathbf{t}^* &= -\ln 9\\
\mathbf{t}^* &= 5700\frac{\ln 9}{\ln 2},
\end{aligned}
$$

Ces ossements exhumés datent d'environ $5700\frac{\ln 9}{\ln 2}$ ans.

"Il est plus facile de désintégrer un atôme qu'un préjugé." A. Einstein.

4.3.2 Linéaires

C'est le cas oé le second membre h est de la forme $h(x, y) = a(x)y + b(x)$, c'est é dire elles sont de la forme $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$, ou biriévement

$$
y' = a(x)y + b(x), \qquad (L)
$$

où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues (elles peuvent être des constantes), I un intervalle de $\mathbb{R}$. Par exemple, l'EDO $\quad x^2y' + 2xy - x + 1 = 0, \quad$ que nous pouvons écrire sous la forme

$$y' = \underbrace{\frac{-2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{\frac{x-1}{x^2}}_{b(x)}.$$

• L'équation

$$y' = a(x)y \tag{h}$$

est appelée " l'équation homogène associée à l'équation (L) ", et $b(x)$ est appelé "le second membre".

Comment résoudre ?

La solution générale de (L) est de la forme

$$\boxed{y(x) = y_{\mathbf{h}}(x) + y_{\mathbf{p}}(x)},$$

telles que y_h est la solution de (h), et y_p est une solution (particilière) pour (L).

Alors,

Etape I. On résoud d'abord l'équation (h), **qui est à variables séparables**, on obtient une solution de la forme $y_{\mathbf{h}}(x) = Ce^{A(x)}$ tel que $C \in \mathbb{R}$, A est une primitive de la fonction a. Puis,

Etape II. nous avons deux possibilités :

• Soit on cherche une solution (particulière) $y_{\mathbf{p}}$ pour l'équation avec second membre (l'équation (L)) (on peut même remarquer une solution évidente), et dans ce cas, la solution générale de "l'équation avec second membre", (L), est

$$y(x) = Ce^{A(x)} + y_{\mathbf{p}}(x), \quad C \in \mathbb{R},$$

• sinon, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante C. Dans ce cas, la solution générale de (L) est de la forme

$$\boxed{y(x) = C(x).e^{A(x)}.}$$

Il suffit de calculer $y'(x)$, puis remplacer y, y' dans (L) pour trouver $C'(x)$, et par intégration $C(x)$.

Exemples.

$$y' + y = 3e^{2x}$$

elle se réécrit,

$$y' = (-1).y + 3e^{2x} \qquad (L_1)$$

on voit bien qu'elle est linéaire, avec $a(x) = 1$ et $b(x) = 3e^{2x}$.

I) L'équation homogène associée est

$$y' = (-1).y \qquad (\mathbf{h_1})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -y \\
\Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= \int -\ dx \\
\Rightarrow \ln \mid y \mid &= -x + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \mid y \mid &= e^c e^{-x} \\
\Rightarrow y &= \overset{+}{-} e^c e^{-x},
\end{aligned}$$

la solution générale de l'équation (h_1) est

$$y_{\mathbf{h}}(x) = C\ e^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

II)

• Nous remarquons facilement que la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est une solution particulière pour l'équation globale (L_1), d'où

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_{\mathbf{h}}(x) + y_{\mathbf{p}}(x) \\
&= Ce^{-x} + e^{2x},\ \ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

• Sinon, on utilise la méthode de la variation de la constante. D'aprés cette derniére, la solution générale de l'équation globale (L_1) sera de la forme

$$\boxed{y(x) = C(x).e^{-x},}$$

d'où

$$y'(x) = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x},$$

en remplaçant dans l'équation (l_1), on obtient

$$\mathbf{C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}} = -\mathbf{C(x)e^{-x}} + 3e^{2x},$$

d'où

$$C'(x)e^{-x} = 3e^{2x},$$

alors

$$C'(x) = 3e^{3x},$$

en intégrant, on trouve

$$\int C'(x)dx = \int 3e^{3x}dx$$

et par suite,

$$C(x) = e^{3x} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Donc la solution générale de l'équation (L_1) est

$$y(x) = \left(e^{3x} + k\right)e^{-x}$$

$$y(x) = \underbrace{e^{2x}}_{y_{\mathbf{p}}(x)} + \underbrace{ke^{-x}}_{y_{\mathbf{h}}(x)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Un autre exemple,

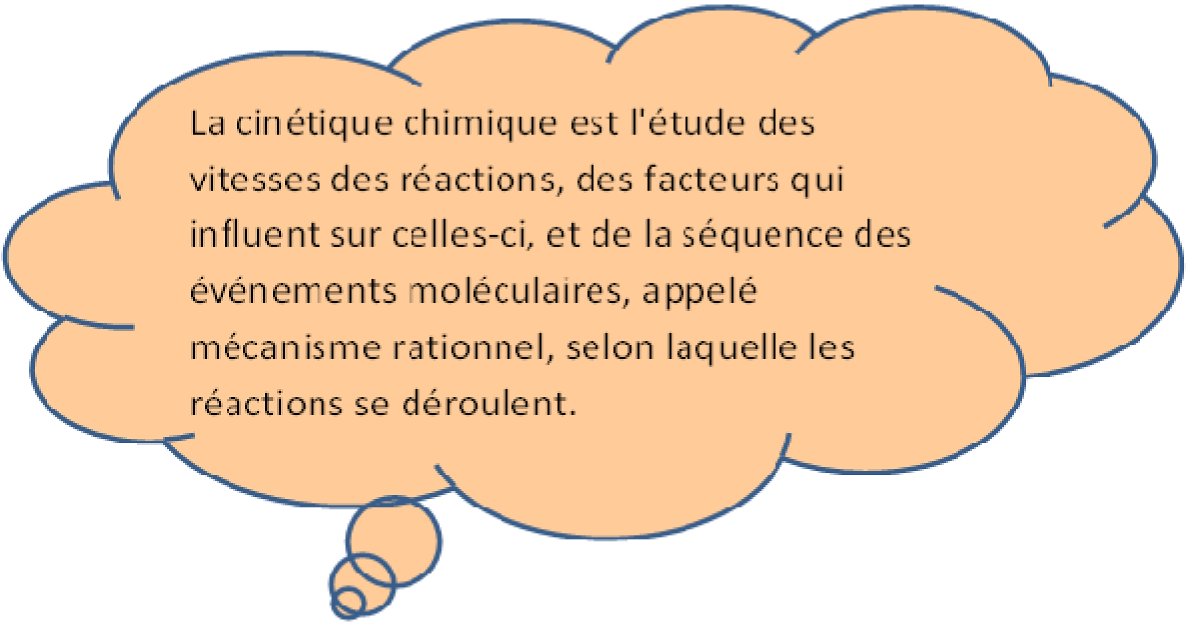
$$y' = \frac{-1}{40}y + 0.75 \qquad ...(L_2)$$

la solution générale est

$$y(t) = 30 + k\, e^{\frac{-1}{40}t},$$

telle que k est une constante réelle, que, dans la pratique, nous pouvons préciser en utilisant la donnée initiale du phénomène.

Cinétyque chimique.



Considérons la réaction chimique

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} D$$

qui se traduit par les EDOs du premier ordre suivantes

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1\,[A] \tag{$E1$}$$

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1\,[A] - \ k_2\,[B], \tag{$E2$}$$

$$\frac{d[D]}{dt} = -k_2\,[B], \tag{$E3$}$$

avec $[B]_0 = [D]_0 = 0$.

la résolution de $(E1)$ nous donne $[A]_t = C.e^{-k_1 t} = [A]_0 e^{-k_1 t}$. En remplaçant la valeur de $[A]$ dans $(E2)$ on obtient

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1\,([A]_0 e^{-k_1 t}) - k_2\,[B]$$

i.e.

$$\begin{aligned}\frac{d[B]_t}{dt} &= -k_2\ [B]_t + k_1\ [A]_0 e^{-k_1 t} \\ &= a(t)[B]_t + b(t),\end{aligned}$$

il s'agit d'une EDO linéaire. L'équation homogène associée est

$$\frac{d[B]_t}{dt} = -k_2\ [B]_t$$

sa solution est

$$[B]_{h_t} = C.e^{-k_2 t}; \qquad C \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de $(E2)$ est de la forme

$$[B]_t = C(t).e^{-k_2 t}.$$

D'où

$$\frac{d[B]_t}{dt} = C'(t).e^{-k_2 t} - k_2 C(t).e^{-k_2 t},$$

en remplaçant dans $(E2)$, on obtient

$$C'(t).e^{-k_2 t} - k_2 C(t).e^{-k_2 t} = -k_2\ C(t).e^{-k_2 t} + k_1\ [A]_0 e^{-k_1 t},$$

d'où

$$C'(t) = k_1\ [A]_0 e^{-k_1 t} e^{+k_2 t},$$

par intégration

$$\int C'(t)dt = \int k_1\ [A]_0 e^{(k_2 - k_1)t} dt,$$

alors

$$C(t) = \frac{k_1\ [A]_0}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + k; \quad k \in \mathbb{R},$$

donc

$$[B]_t = \left(\frac{k_1\ ([A]_0}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + k\right).e^{-k_2 t} = \frac{k_1\ [A]_0}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + k.e^{-k_2 t}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Pour $t = 0$,

$$[B]_0 = \frac{k_1\ [A]_0}{k_2 - k_1} e^{-k_1 .0} + k.e^{-k_2 .0} = \frac{k_1\ [A]_0}{k_2 - k_1} + k,$$

d'où d'après la condition initiale,

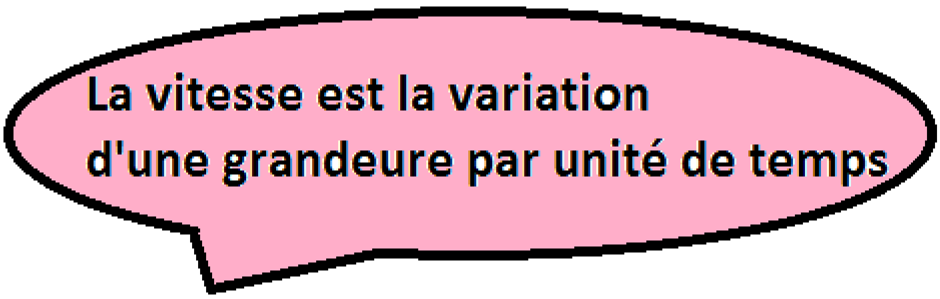
$$\frac{k_1\ [A]_0}{k_2 - k_1} + k = 0,$$

donc

$$k = -\frac{k_1\,[A]_0}{k_2 - k_1},$$

et par conséquent

$$[B]_{\mathbf{t}} = \frac{k_1\,[A]_0}{k_2 - k_1}\Big(e^{-k_1\mathbf{t}} - e^{-k_2\mathbf{t}}\Big).$$



La vitesse d'une réaction chimique est définie soit par rapport à la disparition d'un réactif R, soit par rapport à l'apparition d'un produit P. Elle s'exprime généralement en unités de concentration par unité de temps, elle se mesure généralement en Moles par litre par second $(mol.l^{-1}.s^{-1})$.

Elle est toujours positive.

Vitesse générale : elle est basée sur la prise de deux temps précis, elle n'est pas valable é chaque instant t.

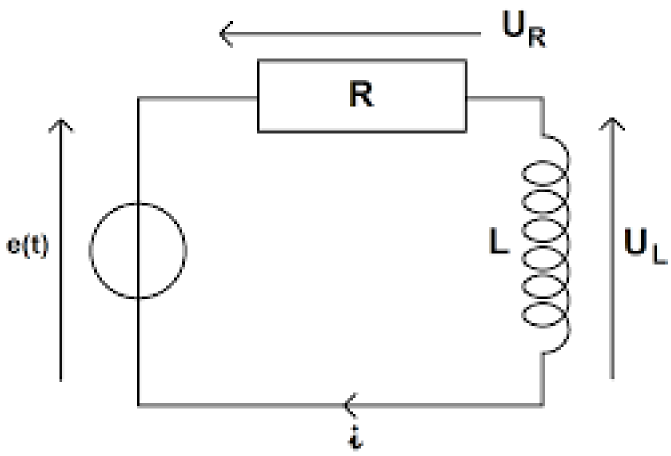
Vitesse instantanée : elle correspond é la limite de la variation du réactif dans un intervalle de temps court : c'est donc **la dérivée** au point t

$$Vitesse\ instantanée = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[Réactif]}{\Delta t} = \frac{d[Réactif]}{dt},$$

d'où l'apprition d'équations différentielles en cynétique.

La vitesse peut être obtenue par la tangente à la courbe en un point donné.

Un circuit électrique comprend un générateur G, une bobine d'inductance L et une résistance R.



L'intensité du courant électrique **i**, exprimée en Ampères, est une fonction du temps **t**, exprimé en secondes, et est solution de l'équation différentielle :

$$L\,\mathbf{i}'(t) + R\,\mathbf{i}(t) = \varepsilon,$$

L est exprimée en Henrys, R en Ohms, et ε en Volts

Il s'agit bien d'une EDO du 1^{er} ordre, et comme $L \neq 0$, notre équation est équivalente à

$$\mathbf{i}'(t) = \frac{-R}{L}\,\mathbf{i}(t) + \frac{\varepsilon}{L}, \qquad (L_3)$$

qui est linéaire.

I) L'équation différentielle homogène associée à (L_3) est

$$\mathbf{i}'(t) = \frac{-R}{L}\,\mathbf{i}(t), \qquad (h_3)$$

sa solution est

$$i_h(t) = C.e^{\frac{-R}{L}.t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

II) La solution générale de l'équation globale (L_3) sera de la forme

$$\boxed{i(t) = C(t).e^{\frac{-R}{L}.t},}$$

d'où

$$i'(t) = C'(t)e^{\frac{-R}{L}.t} - \frac{R}{L}.C(t)e^{\frac{-R}{L}},$$

en remplaçant dans l'équation (L_3), nous obtenons

$$C'(t)e^{\frac{-R}{L}.t} - \frac{R}{L}.C(t)e^{\frac{-R}{L}.t} = \frac{-R}{L}\,C(\mathbf{t}).e^{\frac{-R}{L}.t} + \frac{\varepsilon}{L}$$

$$C'(t)e^{\frac{-R}{L}.t} = \frac{\varepsilon}{L}$$

$$\begin{aligned} \int C'(t) &= \int \frac{\varepsilon}{L}e^{\frac{+R}{L}.t} \\ \Rightarrow C(t) &= \frac{\varepsilon}{R}e^{\frac{+R}{L}.t} + k, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc la solution générale de l'équation (L_3) est

$$i(t) = \left(\frac{\varepsilon}{R}e^{\frac{+R}{L}.t} + k\right)e^{\frac{-R}{L}.t}.$$

L'intensité du courant électrique en chaque instant t est

$$i(\mathbf{t}) = \frac{\varepsilon}{R} + ke^{\frac{-R}{L}.\mathbf{t}},$$

avec $k \in \mathbb{R}$.

4.3.3 De Bernoulli

Elles sont de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x), \qquad ...(B)$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{b} : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions **continues** (elles peuvent être des constantes), I un intervalle de $\mathbb{R}$. Par **exemple,** $xy^3 - y' = y$, de la forme

$$y' = \underbrace{-}\,y + \underbrace{x}\,y^{\overbrace{\mathbf{3}}}.$$

• si $\alpha = 0$ on retrouve une équation linéaire.

• si $\alpha > 0$, il suffit de diviser les deux membres de l'équation par y^{α}, puis utiliser le changement $z(x) = \frac{1}{y^{\alpha-1}} = y^{1-\alpha}$. Donc,

$$z'(x) = (1-\alpha)(y(x))^{-\alpha}y'(x).$$

En remplaçant dans l'équation (B), on obtient une équation différentielle linéaire par rapport à z. Par exemple pour l'équation en haut

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y^3} &= (-1)\frac{y}{y^3} + x \\ &= (-1)\frac{1}{y^2} + x.\end{aligned}$$

En posant $z = \frac{1}{y^2}$, on obtient $z'(x) = \frac{-2y(x)y'(x)}{y^4(x)} = \frac{-2y'(x)}{y^3(x)}$, d'où $z' = \frac{-2y'}{y^3}$,

$$\frac{-z'}{2} = (-1).z + x$$

$$z' = 2z - 2x. \qquad ...(l_z)$$

On a obtenu ainsi une équation linéaire par rapport à z, dont l'équation homogène associée est

$$z' = 2z, \qquad ...(h_z)$$

sa solution est $z_h(x) = C.e^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$. La solution générale de (l_z) est de la forme $z(x) = C(x).e^{2x}$, ce qui donne $C(x) = \int -2xe^{-2.x}dx$, on intègre par parties, on obtient

$$z(x) = \left((x + \frac{1}{2})e^{-2x} + k\right)e^{2x}.$$

Alors, la solution de (B) satisfait

$$y^2(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{x + \frac{1}{2} + ke^{2x}}, \ k \in \mathbb{R}, \quad (c'est\ une\ solution\ implicite\ )$$

d'où

$$y(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + ke^{2x}}}.$$

4.3.4 de Riccati

Elles sont de la forme

$$y'(x) = \mathbf{a(x)}y + \mathbf{b(x)}y^{\mathbf{2}} + \mathbf{d(x)}$$

où $\mathbf{a}(\cdot), \mathbf{b}(\cdot), \mathbf{d}(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions **continues**, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Par exemple,

$$y' + 2xy = x^2 + y^2 + 1,$$

qui est de la forme

$$y' = \underbrace{\mathbf{-2x}}_{\mathbf{a(x)}}\, y + \underbrace{\mathbf{1}}_{\mathbf{b(x)}}\, y^{\mathbf{2}} + \underbrace{\mathbf{x^2 + 1}}_{\mathbf{d(x)}}.$$

Comment résoudre ?

Pour ce type d'équations, une fois on connait une solution (particulière y_p), la solution générale serait de la forme

$$\boxed{y(x) = y_{\mathbf{p}}(x) + \frac{1}{\mathbf{z}(x)}}$$

telle que **z** est une fonction à trouver facilement. Par exemple, pour l'Ã©quation donnÃ©e, comme $y_p(x) = x$, la solution générale serait de la forme

$$\boxed{y(x) = x + \frac{1}{\mathbf{z}(x)}},$$

et nous obtenons

$$y(x) = x + \frac{1}{c-x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple.

$y' + xy^2 - x^3y - 2x = 0$ *avec* $y_p(x) = x^2$, $(z' - x^3z = x)$.

4.4 Equations différentielles ordinaires du 2^{nd} ordre

La forme générale d'une **EDO** du second ordre est

$$\mathcal{R}\Big(x, y(x), y'(x), y''(x)\Big) = 0,$$

qu'on note par abus

$$\mathcal{R}\Big(x, y, y', y''\Big) = 0.$$

On dit qu'elle est **normale** si elle peut s'écrire sous la forme

$$y''(x) = h\Big(x, y(x), y'(x)\Big).$$

Nous nous intéressons particulièrement, dans ce cours, aux EDO du second ordre dites "**linéaires**", c'est à dire celles de la forme

$$\mathbf{a}(x)y''(x) + \mathbf{b}(x)y'(x) + \mathbf{c}(x)y(x) = \mathbf{R}(x).$$

(Les y, y', y'' sont de degré 1, et tous les coefficients dépendent au plus de x).

Par exemple $3y'' = y - 2y'$, et aussi $m\ddot{y}(t) = -ky(t) - \lambda\dot{y}(t)$, où les coefficients sont m, λ et k respectivement.

• On appelle solution (ou intégrale) d'une EDO du second ordre sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction y définie sur cet intervalle I, deux fois dérivable en tout point de I

et qui vérifie cette équation différentielle sur I. On note en général cette solution (y, I).

• La solution générale d'une telle équation contient deux constantes réelles C_1, C_2.

4.4.1 EDOs du 2^{nd} ordre linéaires à coefficients constants

C'est les EDO de la forme

$$\mathbf{a}y''(x) + \mathbf{b}y'(x) + \mathbf{c}y(x) = R(x), \qquad ...(II)$$

ou brièvement

$$\mathbf{a}y'' + \mathbf{b}y' + \mathbf{c}y = R(x),$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (les coefficients) sont des constantes réelles (généralement connues) telle que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, et R une fonction continue (dérivable) sur un intervalle ouvert, R est appelée le second membre de l'EDO.

La solution générale d'une telle équation est de la forme

$$\boxed{y(x) = y_{\mathbf{H}}(x) + y_{\mathbf{p}}(x)},$$

où $y_{\mathbf{H}}$ est la solution générale de l'équation homogène associée, et $y_{\mathbf{p}}$ est une solution (particulière) pour l'équation globale. Donc, pour résoudre ce type d'équations, deux étapes à faire :

Etape I. Nous considérons d'abord l'équation homogène associée, dite aussi "sans second membre"

$$\mathbf{a}y'' + \mathbf{b}y' + \mathbf{c}y = 0, \qquad ...(\mathbf{H})$$

• Si y_1 et y_2 sont deux solutions pour l'équation (H) **linéairement indépendantes**, alors la solution générale de (H) est de la forme

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

telles que C_1, C_2 sont des constantes réelles, i.e., toute solution est de cette forme.

• Donc pour résoudre (H), il suffit de trouver deux solutions y_1, y_2 linérairement indépendantes. Comment ?

• Il suffit de résoudre l'équation algébrique

$$\mathbf{a}r^2 + \mathbf{b}r + \mathbf{c} = 0 \qquad ...(*)$$

appelée "équation **caractéristique** de l'équation différentielle (H)". Donc on calcule le déterminant Δ, puis

Théorème.

- Si $\Delta > 0$, $(*)$ admet deux racines réelles r_1, r_2, alors

$$y_H(x) = C_1 e^{\mathbf{r_1}.x} + C_2 e^{\mathbf{r_2}.x},$$

telles que C_1, C_2 sont des constantes réelles.

- Si $\Delta = 0$, $(*)$ admet une racine réelle double r, alors

$$y_H(x) = C_1 e^{\mathbf{r}.x} + C_2 \mathbf{x} e^{\mathbf{r}.x} = \Big(C_1 + C_2 \mathbf{x}\Big) e^{\mathbf{r}.x},$$

avec C_1, C_2 des constantes réelles.

- Si $\Delta < 0$, $(*)$ admet deux racines complexes conjugées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, alors

$$y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

ces solutions peuvent s'écrire aussi sous la forme

$$y_H(x) = \Big[C_1 \cos(\beta.x) + C_2 \sin(\beta.x)\Big] e^{\alpha.x},$$

telles que C_1, C_2 sont des constantes réelles.

Exemples.

$$3y'' = y - 2y' \qquad ...(II_1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \ \ avec \ \ y(0) = 1 \ y'(0) = 3 \qquad ...(II_2)$$

$$y'' + y = 0 \qquad ...(II_3)$$

Résolution.

$$3y'' + 2y' - y = 0 \qquad ...(II_1)$$

c'est une EDO du 2^{nd} ordre,

$$\mathbf{3}.y'' + \mathbf{2}.y' - \mathbf{1}.y = 0$$

elle est à coefficients constants, sans second membre, son équation caractéristique est

$$\mathbf{3}.r^2 + \mathbf{2}.r - \mathbf{1} = 0. \qquad ...(*_1)$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 > 0$, donc la solution générale de (II_1) est de la forme

$$y(x) = y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1, \;\; r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{3},$

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$1.y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 \qquad ...(II_2)$$

c'est une EDO du 2^{nd} ordre bien ordonnée, à coefficients constants et sans second membre, son équation caractéristique est

$$1.r^2 + 4r + 4 = 0 \qquad ...(*_2)$$

$\Longleftrightarrow (r+2)^2 = 0 \Longleftrightarrow r = -2$ (racine double), donc la solution générale de (II_2) est de la forme

$$y(x) = y_H(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Donc $y(0) = (C_1 + C_2.0)e^{-2.0} = C_1.e^0 = C_1$, d'où d'après la première condition initiale, $C_1 = 1$. La solution devient

$$y(x) = (1 + C_2 x)e^{-2x}; \quad , C_2 \in \mathbb{R}.$$

d'autre part,

$$y'(x) = C_2 e^{-2x} - 2(1 + C_2 x)e^{-2x}$$

d'où

$$y'(0) = C_2 e^{-2.0} - 2(1 + C_2.0)e^{-2.0} = C_2 - 2,$$

donc d'après la deuxième condition initiale, $C_2 - 2 = 3$, d'où $C_2 = 5$. Donc

$$y(x) = (1 + 5x)e^{-2x}, \;\; x \in I$$

est la solution unique.

$$1.y''(x) + 0.y'(x) + 1.y(x) = 0 \qquad ...(II_3)$$

$$1.r^2 + 0.r + 1 = 0 \qquad ...(*_3)$$

$r^2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 = -1 = (i)^2 \;\Leftrightarrow\; r = \overset{+}{-}i \;\Leftrightarrow\; r_1 = 0 + i \; et \; r_2 = 0 - i \;\Leftrightarrow\; (\alpha = 0 \; et \; \beta = 1).$

La solution générale de est définie par

$$\begin{aligned} y_H(x) &= \Big[C_1\cos(1.x) + C_2\sin(1.x)\Big]e^{0.x}, \\ y_H(x) &= C_1\cos x + C_2\sin x; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'oscillateur harmonique amorti. C'est une modélisation pour les comportements oscillants tels que le mouvement d'une masse reliée à un ressort, ou bien le cas d'une liaison moléculaire (liaisons covalentes par exemple). Supposons par exemple que le mouvement d'un objet en fonction du temps t est décrit par l'équation différentielle

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) - \lambda\dot{y}(t),$$

où m est la masse de l'objet, $k > 0$ la constante élastique du ressort et $\lambda > 0$ le coefficient de frottement. Ils sont tous **constants**. Ici la variable indépendante (d'habitude notée x) est le temps, désigné par t. Trouvons la (les) solution de cette EDO sachant que $\lambda > 2\sqrt{K.m}$. La solution veut dire la fonction y qui

" $t \overset{associe}{\longmapsto} y(t) =$ la position du corps" l'instant t.

Nous réordonons l'EDO

$$\mathbf{m}\ddot{y}(t) + \lambda\dot{y}(t) + \mathbf{k}y(t) = 0,$$

l'équation algébrique caractéristique est

$$mr^2 + \lambda r + k = 0,$$

d'où

$$\Delta = b^2 - 4ac = \lambda^2 - 4mk.$$

Mais

$$\lambda > 2\sqrt{K.m}$$

ce qui donne

$$\lambda^2 > 4K.m$$

donc

$$\Delta > 0,$$

alors

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\lambda-\sqrt{\Delta}}{2m}, \quad r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\lambda+\sqrt{\Delta}}{2m}.$$

Donc

$$y(t) = C_1 e^{\frac{-\lambda-\sqrt{\Delta}}{2m}\,t} + C_2 e^{\frac{-\lambda+\sqrt{\Delta}}{2m}\,t}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice. Reprendre la même question sachant que $\lambda \leq 2\sqrt{K.m}$.

Etape II. Pour trouver la solution générale de l'équation avec second membre, il y'on a deux méthodes :

. une méthode générale : variation des constantes.

. méthode 2 : solution particulière.

La méthode de variation de la constante : Dans la solution de (H)

$$y_{\mathbf{H}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

nous considérons les constantes C_1 et C_2 comme des fonctions inconnues de x et cherchons la solution **générale** de l'équation avec second membre sous la forme

$$\boxed{y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).}$$

Pour trouver les fonctions inconnues, on résout le système

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = \frac{R(x)}{a}. \end{cases}$$

Ce qui permet de déterminer d'abord les fonctions dérivées C_1' et C_2' puis, par intégration, les fonctions C_1 et C_2.

Exemple. Résoudre l'EDO

$$y'' + 4y = \tan x, \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[\qquad (EII).$$

$$1\ddot{y}(x) + 0.\dot{y}(x) + k y(x) = \tan x, \quad x \in I =]0, \frac{\pi}{2}[$$

Etape I.

$$1\ddot{y}(x) + 0.\dot{y}(x) + k y(x) = 0 \qquad (H_E)$$

$$1r^2 + 0.r + 4 = 0 \qquad (*_E)$$

$$r^2 + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 = -4 = (2i)^2 \;\Leftrightarrow\; r = \overset{+}{-} 2i \;\Leftrightarrow\; (\alpha = 0 \; et \; \beta = 2).$$

$$\begin{aligned} y_H(x) &= \Big[K_1 \cos(2.x) + K_2 \sin(2.x)\Big] e^{0.x} \\ &= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x); \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Etape II. Puisque nous possédons pas d'une solution particulière, nous appliquons la méthode de variation des constantes, et d'après cette dernière, la solution générale de (EII) est de la forme

$$y(x) = C_1(x)\cos(2x) + C_2(x)\sin(2x).$$

Pour trouver les fonctions inconnues C_1, C_2, on résout le système

$$(S)\ \begin{cases} C_1'(x)\cos(2x) + C_2'(x)\sin(2x) = 0, \\ -2C_1'(x)\sin(2x) + 2C_2'(x)\cos(2x) = \tan x. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $\cos(2x)$, et la deuxième par $\sin(2x)$, on obtient

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos^2(2x) + C_2'(x)\sin(2x)\cos(2x) = 0, \\ C_1'(x)\sin^2(2x) - C_2'(x)\cos(2x)\sin(2x) = -\frac{1}{2}(\tan x).\sin(2x) \end{cases}$$

en aditionnant, on trouve que

$$C_1'(x)(\cos^2(2x) + \sin^2(2x)) = -\frac{1}{2}(\tan x).\sin(2x),$$

d'où

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}(\frac{\sin x}{\cos x}).2\sin x.\cos x = -\sin^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) - 1),$$

en intégrant les deux membres de l'équation,

$$\int C_1'(x)dx = \int \frac{1}{2}(\cos(2x) - 1)dx,$$

on obtient

$$\boxed{C_1(x) = \frac{1}{2}[(\frac{1}{2}\sin(2x) - x + k_1)] = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2} + k_1; \quad k_1 \in \mathbb{R}.}$$

Pour trouver $C_2(x)$, de même, en multipliant la première équation du système (S) par $\sin(2x)$, et la deuxième par $\cos(2x)$, on obtient

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos(2x)\sin(2x) + C_2'(x)\sin(2x)\sin^2(2x) = 0, \\ C_1'(x)\sin(2x)\cos(2x) - C_2'(x)\cos(2x)\cos^2(2x) = \frac{1}{2}(\tan x).\cos(2x) \end{cases}$$

en aditionnant, on trouve que

$$C_2'(x) = \frac{1}{2}(\tan x).\cos(2x) = \frac{1}{2}(\frac{\sin x}{\cos x}).(\cos^2 x - \sin^2 x),$$

d'où

$$C_2'(x) = \frac{1}{2}(\frac{\sin x}{\cos x}).(2\cos^2 x - 1) = \sin x.\cos x - \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x},$$

en intégrant,

$$\int C_2'(x)dx = \frac{1}{2}\int 2\sin x.\cos x dx + \frac{1}{2}\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx + \frac{1}{2}\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx,$$

alors

$$\boxed{C_2(x) = \frac{-1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\ln|\cos x| + k_2; \quad k_2 \in \mathbb{R}.}$$

La solution générale est définie par

$$y(x) = \left[\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2} + k_1\right].\cos(2x) + \left[\frac{-1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\ln|\cos x| + k_2\right].\sin(2x); \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

En fait,

$$\begin{aligned} y(x) &= \left[\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2}\right].\cos(2x) + \left[\frac{-1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\ln|\cos x|\right].\sin(2x) + \left[k_1.\cos(2x) + k_2.\sin(2x)\right] \\ &= \left[\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2}\right].\cos(2x) + \left[\frac{-1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\ln|\cos x|\right].\sin(2x) + y_{\mathbf{H}}(x), \end{aligned}$$

et nous pouvons vérifier que la quantité $\left[\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2}\right].\cos(2x) + \left[\frac{-1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{2}\ln(\cos x)\right].\sin(2x)$ ce n'est qu'une solution particulière pour l'équation globale.

La méthode 2 : Nous cherchons une solution (particulière) pour l'équation avec second membre (II). Comment ? Nous pouvons le faire dans certains cas, lorsque le second membre prend certaines formes. Par exemple,

- le cas où $R(x) = P(x).e^{\mathbf{m}.x}$, où P est un polynôme d'un certain degrès, et m un réel.

Dans ce cas, il existe une solution particulière pour (II) de la forme

$$y_p(x) = Q(x)e^{\mathbf{m}.x},$$

où Q est un polynôme de degrès $d°Q$ tel que

- Si m n'est pas racine de $(*)$, $\quad d°Q = d°P.$
- Si m est une racine simple de $(*)$, $\quad d°Q = d°P + 1.$
- Si m est une racine double de $(*)$, $\quad d°Q = d°P + 2.$

Exemple. Considérons l'équation différentielle

$$y'' = 2y + xe^{-3x} + y'.$$

Nous la réécrivons soius la forme

$$1y''(x) - 1.y'(x) - 2y(x) = xe^{-3x},$$

I) Nous écrivons l'équation homogène associée, puis son équation caractéristique

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0,$$

$$r^2 - r - 2 = 0,$$

avec le discrèminant $\Delta = 9 > 0$, ce qui donne les racines $r_1 = -1$ *et* $r_2 = 2$.
Ainsi, la solution homogène associée est

$$y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

II) La solution générale de (II) est de la forme

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x).$$

Nous avons $R(x) = xe^{-3x} = P(x).e^{m.x}$ avec $m = -3$ et $P(x) = x,\ d^\circ P = 1$, alors il existe une solution particulière pour (II) de la forme

$$y_P(x) = Q(x).e^{mx} = Q(x).e^{-3x}.$$

Nous déterminons Q à travers son degrés. Comme $m = -3$ n'est pas racine pour $(*)$ alors dans ce cas $d^\circ Q = d^\circ P = 1$, d'où $Q(x) = \alpha x + \beta$, et donc $y_P(x) = (\alpha x + \beta).e^{-3x}$. Reste à trouver les valeurs de α et β.
y_p est une solution pour (II) donc elle la vérifie

$$\ddot{y}_p(x) - \dot{y}_p(x) - 2y_p(x) = xe^{-3x}, \quad \forall x \in I.$$

$\dot{y}_p(x) = \alpha e^{-3x} - 3(\alpha x + \beta)e^{-3x} = [(-3\alpha)x + \alpha - 3\beta]e^{-3x}$
$\ddot{y}_p(x) = (-3\alpha)e^{-3x} - 3[(-3\alpha)x + \alpha - 3\beta)]e^{-3x} = [(-9\alpha)x - 6\alpha + 9\beta]e^{-3x}$
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
[(-9\alpha)x - 6\alpha + 9\beta]e^{-3x} - [(-3\alpha)x + \alpha - 3\beta]e^{-3x} - 2(\alpha x + \beta)e^{-3x} &= xe^{-3x}, \quad \forall x \in I \\
[(10\alpha)x - 7\alpha + 10\beta]e^{-3x} &= xe^{-3x}, \quad \forall x \in I \\
[(10\alpha)x - 7\alpha + 10\beta]e^{-3x} - xe^{-3x} &= 0, \quad \forall x \in I \\
[(10\alpha - 1)x - 7\alpha + 10\beta]e^{-3x} &= 0, \quad \forall x \in I
\end{aligned}$$

$$\xRightarrow{e^{-3x} \neq 0,\ \forall x} (10\alpha - 1)x - 7\alpha + 10\beta = 0, \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\alpha - 1 = 0, \\ -7\alpha + 10\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{10} \\ \beta = \frac{7}{100} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = (\frac{1}{10}x + \frac{7}{100})e^{-3x}.$$

La solution générale est définie par

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + (\frac{1}{10}x + \frac{7}{100})e^{-3x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

D'autres exemples, $y'' - y' - 2y = 2e^{-3x}$, $2y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$ (td).

Exemple.

$$y'' + 4y = \sin 3x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

• le cas où $R(x) = \mathbf{A}\cos(\lambda x) + \mathbf{B}\sin(\lambda x)$, où A, B sont deux constantes. On peut penser à une solution particulière pour (II) de la forme

$$y_p(x) = \mathbf{d}\cos(\lambda x) + \mathbf{e}\sin(\lambda x),$$

ou bien

$$y_p(x) = x(\mathbf{d}\cos(\lambda x) + \mathbf{e}\sin(\lambda x))$$

si $\cos(\lambda x)$ est solution de l'équation homogène.

Exemple.

$$y'' - y' - 2y = \sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Comme $y'' - y' - 2y = 0.\cos(2x) + 1.\sin(2x)$, nous cherchons une solution de la forme $y_p(x) = \mathbf{d}\cos(2x) + \mathbf{e}\sin(2x)$.

$y_p'(x) = -2\mathbf{d}\sin(2x) + 2\mathbf{e}\cos(2x), \quad y_p''(x) = 4\mathbf{d}\cos(2x) - 4\mathbf{e}\sin(2x).$

Notez bien, si on avait appliqué la méthode de variation des constantes, on aurait trouvé la même solution (TD).

Plus exactement,

• le cas où $R(x) = \mathbf{P_n}(x)\cos(\lambda x) + \mathbf{Q_{n'}}(x)\sin(\lambda x)$,

où $P_n, Q_{n'}$ sont deux polynômes de degrés n, n' respectivement.

Si $\Delta \geq 0$, ou bien $\Delta < 0$ mais $\alpha \neq 0$, ou bien $\Delta < 0$, $\alpha = 0$ mais $\beta \neq \lambda$, alors on cherche une solution particulière pour (II) de la forme

$$y_p(x) = \mathbf{U_{n''}}(x)\cos(\lambda x) + \mathbf{V_{n''}}(x)\sin(\lambda x).$$

Si $\Delta < 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = \lambda$, alors on cherche une solution particulière pour (II) de la forme

$$y_p(x) = x\Big[\mathbf{U_{n''}}(x)\cos(\lambda x) + \mathbf{V_{n''}}(x)\sin(\lambda x)\Big],$$

tels que dans les deux cas $U_{n''}, V_{n''}$ sont deux polynômes de degré $\mathbf{n''} = \max(\mathbf{n}, \mathbf{n'})$.

Exemple. L'oscillateur harmonique forcé.

Par exemple, le mouvement d'un corp qui se déplace, en fonction du temps t, horizontalement assujetti à une force générée par un ressort et **une force externe** d'intensité $f(t) = A\cos(\Omega t)$, est décrit par l'équa. diff.

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = A\cos(\Omega t)$$

où m est la masse de l'objet, $k > 0$ la constante élastique du ressort.

$$m\ddot{x}(t)+0.\dot{x}(t)+kx(t) = A\cos(\Omega t).$$

La solution générale est de la forme

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t).$$

EtapeI

$$m\ddot{x}(t) + 0.\dot{x}(t) + kx(t) = 0,$$

$$mr^2 + 0.r + k = 0,$$

$$mr^2 = -k \Leftrightarrow r^2 = -\frac{k}{m} = (i\sqrt{\frac{k}{m}})^2 \Leftrightarrow r = \overset{+}{-}i\sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \; et \; \beta = \sqrt{\frac{k}{m}}).$$

$$\begin{aligned} x_H(t) &= \left[K_1\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}.t) + K_2\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}.t)\right]e^{0.t} \\ &= K_1\cos(\eta.t) + K_2\sin(\eta.t), \end{aligned}$$

avec $\eta = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

EtapeII Cherchons une solution particulière. Ici, le second membre est de la forme $\mathbf{P_n}(t)\cos(\lambda t)+\mathbf{Q_{n'}}(t)\sin(\lambda t)$, où $P_n(t) = A$, $Q_{n'}(t) = 0$, $n = n' = 0$ et $\lambda = \Omega$.

Comme $\Delta < 0$ et $\alpha = 0$, il faut comparer entre λ et β, c'est à dire entre Ω et $\sqrt{\frac{K}{m}}$.

1^{er} cas : si $\sqrt{\frac{K}{m}} \neq \Omega$, alors il existe une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = U_{n''}(t)\cos(\Omega.t) + V_{n''}(t)\sin(\Omega.t),$$

tels que $U_{n''}, V_{n"}$ sont deux polynômes de degré $\mathbf{n''} = \max(\mathbf{n}, \mathbf{n'}) = \mathbf{0}$, c'est à dire deux constantes réelles. La solution particulière est donc de la forme

$$x_p(t) = B\cos(\Omega.t) + C\sin(\Omega.t),$$

avec B, C deux constantes réelles que nous allons déterminer.

$$\dot{x}_P(t) = -\Omega B \cos(\Omega.t) + \Omega C \sin(\Omega.t),$$

et

$$\ddot{x}_P(t) = -\Omega^2 B \cos(\Omega.t) - \Omega^2 C \sin(\Omega.t),$$

on obtient alors

$$-m\Omega^2 B \cos(\Omega.t) - m\Omega^2 C \sin(\Omega.t) + kB \cos(\Omega.t) + kC \sin(\Omega.t) = A \cos(\Omega t),$$

d'où

$$(k - m\Omega^2) B \cos(\Omega.t) + (k - m\Omega^2) C \sin(\Omega.t) = A \cos(\Omega t),$$

donc

$$((k - m\Omega^2) B - A) \cos(\Omega.t) + (k - m\Omega^2) C \sin(\Omega.t) = 0$$

ce qui donne

$$\begin{cases} B(K - m\Omega^2) = A \\ (k - m\Omega^2) C = 0 \end{cases}$$

comme $k - m\Omega^2 \neq 0$ alors

$$\begin{cases} B = \frac{A}{k - m\Omega^2} \\ C = 0 \end{cases}$$

d'où

$$x_p(t) = \frac{A}{k - m\Omega^2} \cos(\Omega.t).$$

Donc si $\sqrt{\frac{K}{m}} \neq \Omega$, la solution générale est

$$x(t) = K_1 \cos(\eta.t) + K_2 \sin(\eta.t) + \frac{A}{k - m\Omega^2} \cos(\Omega.t); \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

$2^{ème}$ cas : si $\sqrt{\frac{k}{m}} = \Omega$, alors la solution particulière est de la forme

$$x_p(t) = t.\Big[B \cos(\Omega.t) + C \sin(\Omega.t)\Big].$$

• le cas où $R(x) = R_1(x) + R_2(x) + ... + R_n(x)$ telle que chaque $R_i(x)$ est d'un des types précédents. On cherche pour chacune des équations

$$ay'' + by' + cy = R_i(x)$$

une solution particulière $S_i(x)$, puis la fonction $y_p(x) = S_1(x) + S_2(x) + ... + S_n(x)$ sera solution pour l'équation

$$ay'' + by' + cy = R(x).$$

Exemple.

$$y'' - y' + y = 2x + e^{2x}.$$

4.4.2 EDOs du 2^{nd} ordre linéaires à coefficients non constants

Elles sont de la forme

$$a(\mathbf{x})y''(x) + b(\mathbf{x})y'(x) + c(\mathbf{x})y(x) = R(x) \quad x \in I,$$

ou brièvement

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = R(x) \quad x \in I,$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ et R sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant un point x_0.

L'équation en haut peut s'écrire

$$y'' + \mathbf{B}(\mathbf{x})y' + \mathbf{C}(\mathbf{x})y = \frac{R(x)}{a(x)}, \quad x \in I \backslash \{x;\ a(x) = 0.\}$$

• L'équation homogène associée est

$$y'' + \mathbf{B}(\mathbf{x})y' + \mathbf{C}(\mathbf{x})y = 0. \qquad ...(H)$$

Nous nous intéressons ici à l'équation (H) seulement.

La fonction nulle satisfait toujours l'équation (H), elle est appelée la solution triviale.

La solution générale de (H) est de la forme

$$y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

telles que y_1 et y_2 sont deux solutions **linéairement indépendantes**. Malheureusement, il n'y a pas de méthode pour trouver des formules explicites pour y_1 et y_2. Il y a cependant, certains cas particuliers.

Si nous sommes en quelque sorte assez chanceux pour trouver une solution y_1 **non triviale**, alors dans ce cas on peut trouver y_2, grâce à la formule

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x). \int \frac{e^{\left(-\int \mathbf{B(x)}dx\right)}}{(y_1(x))^2}\, dx.}$$

Exemple.

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = 0;$$

nous vérifions facilement que $y_1(x) = \frac{1}{x}$ définit une solution pour notre équa. diff. . Alors, réécrivons d'abord l'équation

$$y'' - \frac{2}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0,$$

puis calculons

$$\int -B(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln \mid x \mid +c = \ln x^2 + c; \quad c \in \mathbb{R},$$

il suffit de prendre l'une des primitives, puis

$$y_2(x) = \frac{1}{x}. \int \frac{e^{\ln x^2}}{(\frac{1}{x})^2}\, dx = \frac{1}{x}. \int \frac{x^2}{(\frac{1}{x^2})}\, dx = \frac{1}{x}. \int x^4\, dx = \frac{1}{5}x^4.$$

Alors, la solution générale est définie par

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{5}x^4; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Un autre exemple,

$$y'' - \frac{1+x}{x}y' + \frac{1}{x}y = 0$$

$y_1(x) = e^x$, ce qui donne $y_2(x) = |x+1|$.

Encore un exemple, en physique dans de nombreux contextes, notament en **électrostatique et la conduction thermique**, il apparait souvent des EDO de la forme

$$x^2y'' + Axy' + By = 0,$$

telles que $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont deux constantes réelles. Il s'agit d'un cas particulier d'une EDO du second ordre linéaire, à coefficients non constant, et sans second membre. On l'appelle **l'équation de Cauchy-Euler.**

$$x^2y'' + \mathbf{A}xy' + \mathbf{B}y = 0.$$

La fonction y définie par $y(x) = x^{\alpha}$, est-elle une solution ?

Le signe de Δ, et alors les racines α, et donc la forme de la solution de l'équa. diff. dépendent des valeurs de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Nous distinguons trois cas.

Discution au TD.

$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$,

$$x^2(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}) + Ax(\alpha x^{\alpha-1}) + B(x^{\alpha}) = 0, \ \ \forall x \in I,$$

$$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha} + A\alpha x^{\alpha} + B(x^{\alpha}) = 0, \ \ \forall x \in I,$$
$$\Big(\alpha(\alpha-1) + A\alpha + B\Big)x^{\alpha} = 0, \ \ \forall x \in I,$$

d'où

$$\alpha(\alpha-1) + A\alpha + B = 0$$

$$\alpha^{\mathbf{2}} + (\mathbf{A}-1)\alpha + \mathbf{B} = 0.$$

• Si $\triangle > 0$, alors $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $P(\alpha_1) = 0 = P(\alpha_2)$, d'où $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}$ sont solutions pour (E), et comme elles sont linéairement indépendantes, la solution générale de (E) prend la forme

$$y(x) = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} \ , \ \ C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

• Si $\triangle = 0$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$ ($\alpha = \frac{1-\mathbf{A}}{2}$), d'où x^{α} est solution pour (E). On prend $y_1(x) = x^{\alpha} = x^{\frac{1-\mathbf{A}}{2}}$, puis il suffit de calculer, on trouve $y_2(x) = x^{\frac{1-\mathbf{A}}{2}}.\ln x$. La solution générale de (E) prend la forme

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x^{\frac{1-\mathbf{A}}{2}}; \ \ C_1, C_1 \in \mathbb{R}.$$

• Si $\triangle < 0$, alors $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tels que $P(\alpha_1) = 0 = P(\alpha_2)$, avec $\alpha_1 = \lambda + i\mu$, $\alpha_2 = \lambda - i\mu$. Les fonctions $x^{\lambda+i\mu}$, $x^{\lambda-i\mu}$ sont solutions pour (E), et comme elles sont linéairement indépendantes, la solution générale de (E) prend la forme

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1 x^{\lambda+i\mu} + C_2 x^{\lambda-i\mu} \\
&= C_1 e^{\ln x^{\lambda+i\mu}} + C_2 e^{\ln x^{\lambda-i\mu}} \\
&= C_1 e^{(\lambda+i\mu).\ln x} + C_2 e^{(\lambda-i\mu).\ln x} \\
&= C_1 e^{\lambda \ln x + i\mu \ln x} + C_2 e^{\lambda \ln x - i\mu \ln x} \\
&= C_1 e^{\lambda \ln x}.e^{+i\mu \ln x} + C_2 e^{\lambda \ln x}.e^{-i\mu \ln x} \\
&= e^{\ln x^{\lambda}}.\Big[C_1 e^{+i\mu \ln x} + C_2 e^{-i\mu \ln x}\Big],
\end{aligned}$$

tels que $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

En posant $\theta := \mu \ln x$, on obtient

$$\begin{aligned}
y(x) &= x^{\lambda}.\Big[C_1 e^{+i\theta} + C_2 e^{-i\theta}\Big] \\
&= x^{\lambda}.\Big[C_1\Big(\cos\theta + i\sin\theta\Big) + C_2\Big(\cos\theta - i\sin\theta\Big)\Big] \\
&= x^{\lambda}.\Big[\Big(C_1 + C_2\Big)\cos\theta + \Big(C_1 - C_2\Big)i\sin\theta\Big] \\
&= x^{\lambda}.\Big[c_1\cos(\mu\ln x) + c_2 i\sin(\mu\ln x)\Big],
\end{aligned}$$

tels que $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Par exemple, l'EDO $x^2y'' + \mathbf{3}xy' + \mathbf{17}y = 0$ est une équation de Cauchy-Euler avec $\mathbf{A} = 3$ et $\mathbf{B} = 17$. Ici $\delta < 0$, $\alpha_1 = \mathbf{-1} - \mathbf{4}i$, $\alpha_2 = \mathbf{-1} + \mathbf{4}i$ La solution générale est définie par

$$y(x) = \frac{1}{x}\Big[c_1\cos(\mathbf{4}\ln x) + c_2 i\sin(\mathbf{4}\ln x)\Big], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Séries solutions**

Reconsidérons l'équation

$$y'' + \mathbf{B}(\mathbf{x})y' + \mathbf{C}(\mathbf{x})y = 0. \qquad ...(H)$$

Supposons que la solution de (H) est analytique. On suppose que la solution y admet un développement en **série** de Taylor convergente sur un certain intervalle.

$$y(x) = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1}x + \mathbf{a_2}x^2 + \mathbf{a_3}x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{a_n}.x^n$$

Il suffit donc de trouver les coefficients $\mathbf{a_n}$. On suppose que $B(x)$ et $C(x)$ sont analytiques aussi.

Remarque. La notion de "série" est traitée dans le chapitre 3.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1).a_{n+1}.x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2).(n+1).a_{n+2}.x^n$$

Il suffit de remplacer ces formules dans l'équation.

Exemple 1.

$$-y'' = y$$

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

(elle est à coefficients constants, qui ce n'est en fait qu'un cas particulier) en terme de séries, elle devient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(n+2).(n+1).a_{n+2}.x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n &= 0, \quad \forall x \in I \\
\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2).(n+1).a_{n+2}+a_n\Big).x^n &= 0, \quad \forall x \in I \\
\Longrightarrow (n+2).(n+1).a_{n+2} + a_n &= 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow a_{n+2} &= -\frac{1}{(n+2).(n+1)}.a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

nous avons obtenu ainsi une relation récurrente. Il suffit de connaitre a_0 et a_1. En efffet,

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{2.1}a_0, \\
a_4 &= -\frac{1}{3.4}a_2 = +\frac{1}{4.3.2.1}a_0, \\
a_6 &= -\frac{1}{6.5}a_4 = -\frac{1}{6.5.4.3.2.1}a_0,
\end{aligned}$$

donc

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(2k)!}a_0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{1}{3.2}a_1, \\
a_5 &= -\frac{1}{5.4}a_3 = +\frac{1}{5.4.3.2}a_1, \\
a_7 &= -\frac{1}{7.6}a_5 = -\frac{1}{7.6.5.4.3.2}a_1,
\end{aligned}$$

donc

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}a_1.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}.x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}.x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}a_0.x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}a_1.x^{2k+1} \\
&= a_0\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}.x^{2k}\right) + a_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}.x^{2k+1}\right).
\end{aligned}$$

La solution générale est donc

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \cos x + a_1 \sin x, \quad \forall x \in I \\ &= c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Exemple 2.

$$y'' + xy' + y = 0 \ \ avec \ \ y(0) = 1 \ y'(0) = 0$$

En terme de séries, elle devient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(n+2).(n+1).a_{n+2}.x^n + x\sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n &= 0 \quad \forall x \in I \\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+2).(n+1).a_{n+2}.x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n.a_n.x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n &= 0 \quad \forall x \in I \\ 0\sum^{\infty}(n+2).(n+1).a_{n+2}.x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n.a_n.x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n &= 0 \quad \forall x \in I \\ \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n+2).(n+1).a_{n+2}+n.a_n+a_n\Big).x^n &= 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

d'où

$$(n+2).(n+1).a_{n+2} + (n+1).a_n = 0 \quad \forall n \geq 0,$$

on conclut la relation récurrente

$$a_{n+2} = \frac{-1}{n+2}a_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1}{2}a_0, \\ a_4 &= \frac{-1}{4}a_n = \frac{+1}{2.4}a_0, \\ a_6 &= \frac{-1}{6}a_4 = \frac{-1}{2.4.6}a_0, \end{aligned}$$

alors

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0.$$

De même

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-1}{3}a_1, \\ a_5 &= \frac{-1}{5}a_3 = \frac{+1}{3.5}a_1, \\ a_7 &= \frac{-1}{7}a_5 = \frac{-1}{3.5.7}a_1, \end{aligned}$$

alors

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}.x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}.x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0.x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1.x^{2k+1} \\
&= a_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right) + a_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right).
\end{aligned}$$

Or

$y(0) = 1 \Longrightarrow a_0 = 1,$

$y'(0) = 0 \Longrightarrow a_1 = 0.$

Donc

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Pour les fonctions les plus familières

$$\mathbf{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\mathbf{n!}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}}{(\mathbf{2n+1})!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}}{(\mathbf{2n})!} x^{2n}.$$

4.5 Changements de variables dans les équations différentielles

Lorsque nous cherchons à résoudre une équation différentielle de la forme $y' = h(x, y)$, mais qui n'est pas d'un des types dont on a appris à calculer les solutions, on peut essayer de **se ramener** à une équation connue en effectuant un **changement de fonction inconnue**.

En posant $\boxed{y(x) = \mathrm{g}(\mathbf{z}(x)) = \mathrm{g} \circ \mathbf{z}(x)}$, où g est une fonction dérivable, nous obtenons par dérivation des fonctions composées

$$y'(x) = \mathrm{g}'(\mathbf{z}(x)).\mathbf{z}'(x),$$

puis, en remplaçant dans l'équation initiale,

$$\mathbf{z}'.g'(z) = h(x, g(\mathbf{z})),$$

on a obtenu ainsi une équation différentielle **en** la fonction inconnue $\mathbf{z}(x)$. D'où

$$\mathbf{z}' = \frac{h(x, g(\mathbf{z}))}{g'(\mathbf{z})},$$

(si $g'(\mathbf{z})$ ne s'annule pas).

En faisant le bon choix pour la fonction $\mathbf{g}$, nous pouvons parfois obtenir une équation en $\mathbf{z}$ qu'on sait résoudre. Dans ce cas, si $\mathbf{z}_p$ est une solution de cette dernière équation, alors la fonction $\boxed{y_p = \mathbf{g} \circ \mathbf{z}_p}$ est solution de l'équation initiale. Cependant, il n'y a pas de méthode générale pour trouver une telle fonction $\mathbf{g}$.

Exemple.

$$y' = y.\ln(y), \qquad (y(x) > 0).$$

Comme les fonctions cherchées doivent être à valeurs positives, on peut poser le changement d'inconnu

$$y(x) = \mathbf{e}^{z(x)},$$

d'où

$$y'(x) = z'(x).e^{z(x)} \qquad et \qquad \ln(y(x)) = z(x),$$

l'équation devient

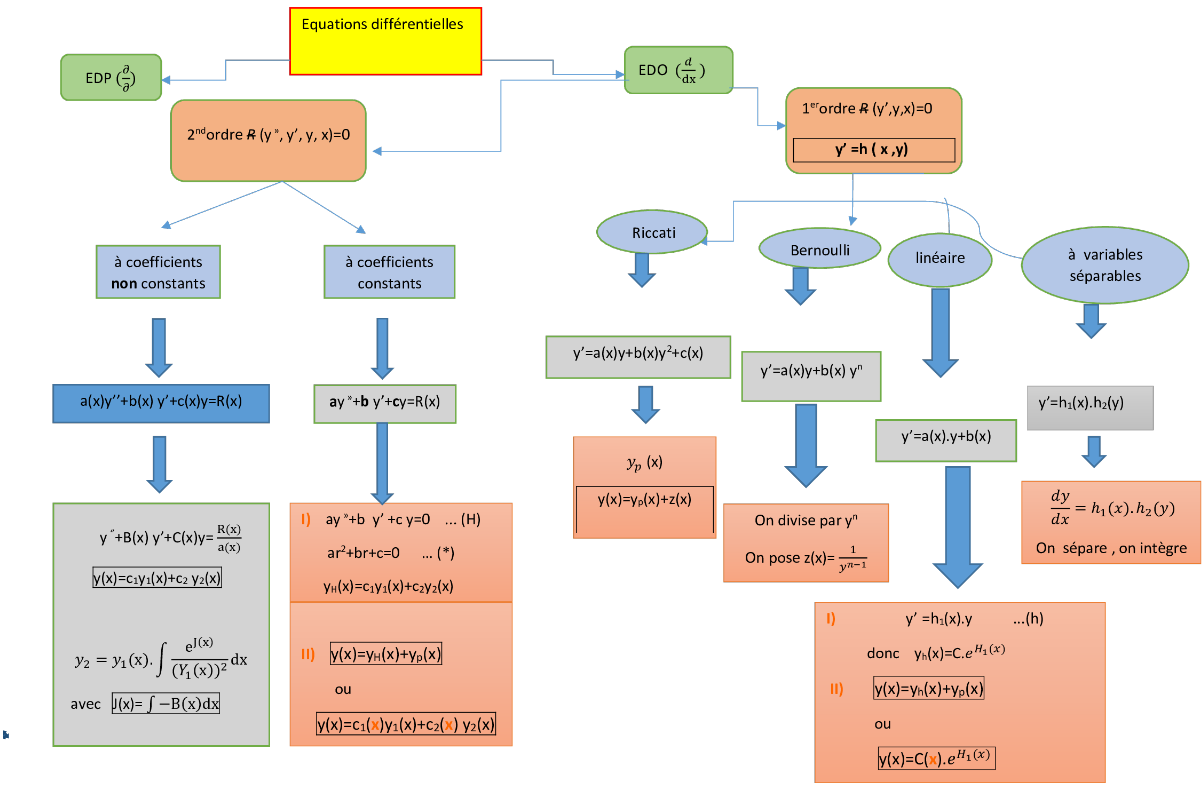
$$z'.e^z = e^z.z,$$

donc

$$z' = z,$$

qui est une EDO en z, très simple à résoudre, sa solution générale est $z(x) = C.e^x; \quad C \in \mathbb{R}$. Alors, la solution générale de l'EDO initiale est $y(x) = e^{C.e^x} = e^C.e^{e^x}$, il est clair que la solution est à valeurs positives,

$$y(x) = k.e^{e^x}, \qquad avec\ k \in \mathbb{R}_+^*.$$



Par: ***Wafiya Boukrouk***

Conclusion

Jusqu'à maintenant (nous comptant sur vous) y a pas une méthode générale pour résoudre toutes les équations différentielles, même plus pire que ça, en réalité, rares sont les équa. diff. dont on peut calculer analytiquement les solutions (même lorsque on est sure qu'elles existent). En revanche, par contre on a recourt à d'autres méthodes dites numériques (et l'outil Informatique facilite bien la t$\hat{a}$che). Mais ces méthodes exigent qu'on soit sure de l'existence de solution d'abord, ce qui est mené par l'étude analytique.

Les scientifiques s'efforcent de décrire le monde qui nous entoure par des équations mathématiques. On aimerait pouvoir prédire le comportement d'un phénomène et non pas seulement l'observer.

4.6 Exercices

Exercice 4.1. *Résoudre les EDO suivantes*

- $y' = -e^{x+y}$ • $y' = \frac{xy}{x^2-y^2}$
- $y' + \frac{y}{x} = 0$ • $y' = \frac{xy-y^2}{2x^2}$
- $(1+e^x)yy' = e^x$ *avec* $y(0) = 1$ • $(2x+y)dx - (4x-y)dy = 0$
- $(x^2+1)dy = \cos^2 y dx$ • $y' = a^{x+y},\ a > 0, a \neq 1$
- $y' + 2xy = 2x.$

Exercice 4.2. *Soit $Q(t)$ la quantité, en grammes, d'un élément* ***radioactif****. La probabilité que se produise une désintégration est constante pour tous les atomes d'un même isotope. Il s'ensuit que le nombre de désintégrations par unité de temps (c.à.d. la vitesse du phénomène $Q'(t)$) est essentiellement proportionnel à la quantité d'atomes dematière présente. Le phénomène est modélisé par l'équation différentielle générale*

$$Q'(t) = KQ(t) \qquad \text{où} \quad K \text{ est une constante négative.}$$

Le **radium − 226** *se désintègre pour donner du* **radon − 222**. *La demi-vie du radium est de* 1600 *ans. Combien de grammes de radium-226 seront encore présents après* 200 *ans si initialement il y en a* 5000 *grammes ?*

Exercice 4.3. *Une substance se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute (de rapport K). A l'instant $t = 0$ (t en minutes), on place* 20 *grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Notons par $y(t)$ la quantité de la substance dissoute à l'instant t.*

1. Donner l'équa. diff. qui décrit cette situation.

2. Vérifier que $y(t) =$ est une solution.

3. Sachant que les 10 *premiers grammes se dissolvent en* 5 *minutes, trouver la valeur de la constante K*

4. Après combien de temps la substance sera dissoute complétement ?

Exercice 4.4. *Résoudre*

- $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$, • $y' = \frac{-1}{40}y + 0.75$, • $xy' - xy = e^x$
- $y' + y = 2shx$, • $(x+y^2)dy = ydx$
- $y' + y = 3e^{2x}$ *avec* $y(0) = 2$. • $x^2y' + 2xy - x + 1 = 0$ *avec* $y(1) = 0$.
- $y' + 2xy = 2x.$

• $y' + y = xy^3$, • $y - \frac{x}{2}y' = \sqrt{y}$, $x \in]0,1[$ • $xy' - y = xy^2$, $x \in]0,+\infty[$

• $y' + xy = x^2y^2$

• $y' + 2xy = x^2 + y^2 + 1$ *avec* $y_P = x$.

Exercice 4.5. *Deux produits chimiques présents dans une cuve avec une concentration de* $1g/l$ *à l'instant* $t = 0$ *interagissent et produisent une substance dont la concentration est notée* $y(t)$ *à l'instant* t. *On suppose que* $y(t)$ *est régie par l'équation différentielle*

$$y'(t) = (1 - y(t))^2 \quad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

Calculons la solution lorsque $y(0) = 0$.

$y(t) = \frac{t}{1+t}, \ \forall \geq 0.$

Exercice 4.6. *Résoudre les EDO du second ordre suivantes*

$$y'' - 2y - y' = xe^{-3x}; \qquad ...(1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \ \textit{ avec } \ y(0) = 1 \ y'(0) = 3 \qquad ...(2)$$

$$y'' + 4y = 0 \qquad ...(3)$$

$y'' - y' - 2y = 2e^{2x}$; $\quad 2y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$; $\quad y'' + 4y = \frac{1}{\sin x}$, $x \in]0,\pi[$,

$$y'' + 4y = \sin 3x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$y'' - 2y' + 5y = 2\sin x \cos x,$$

$$y'' - 2y' + 5y = 3x + 2 + 4e^x + 5e^{-x},$$

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0, \ \ y_1(x) = e^x; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 3yx^2 + 2 \ \textit{ avec } \ u(0, y) = \sin y$$

Exercice 4.7. *Considérons l'équation différentielle*

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad ...(2)$$

Sachant que l'éqution (2) *admet une solution* y_1 *définie par* $y_1(x) = x^\alpha$ $\quad$ *(*$\alpha \in \mathbb{Z}$*),*

• *trouver* α.

• *Sachant que la fonction définie par* $\mathbf{\frac{1}{x}}$ *est une solution pour* (2), *quelle est la solution générale ?*

Exercice 4.8. *l'oscillateur harmonique amorti", c'est une modélisation pour les comportements oscillants tels que le mouvement d'une masse reliée à un ressort, ...˙;. le mouvement d'un objet en fonction du temps t est décrit par l'équa. diff.*

$$\mathbf{m}\ddot{y}(t) = -\mathbf{k}y(t) - \lambda\dot{y}(t)$$

où m est la masse de l'objet, $k > 0$ la constante élastique du ressort et $\lambda > 0$ le coefficient de frottement. Trouver l'expression décrivant la position de l'objet, sachant que $\lambda = 2\sqrt{K.m}$.

Exercice 4.9. *Le mouvement d'un corp qui se déplace (en fonction du temps t) horizontalement assujetti à une force générée par un ressort et* ***une force externe*** *d'intensité* $f(t) = A\cos(\Omega t)$, $\Omega \neq 0$, *est décrit par l'équa. diff.*

$$\mathbf{m}\ddot{x}(t) + \mathbf{k}x(t) = \mathbf{A}\cos(\mathbf{\Omega t})$$

où m est la masse de l'objet, $k > 0$ la constante élastique du ressort.
Si $\Omega = \frac{k}{m}$, *cette équation admet* $x_p(t) = \mathbf{B}t\cos(\Omega.t) + \mathbf{C}t\sin(\Omega.t)$ *comme solution particulière. Trouver la solution générale.*

Exercice 4.10. *Trouver la solution en série entières pour les équa. diff. suivantes :*

$$(c'est\ à\ dire\ y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n)$$

$$-y'' = y$$

$$y'' + xy' + y = 0 \;\; avec \;\; y(0) = 1 \; y'(0) = 0$$

Exercice 4.11. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3yx^2 + 2 \;\; avec \;\; u(0, y) = \sin y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 5xy^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \;\; avec \;\; u(x, 1) = x^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \;\; avec \;\; u(0, y) = \sin y;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t).$$

Exercice 4.12. *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + y = 9e^{2t}.$$

En posant $t = \ln x$ *résoudre l'équation différentielle*

$$x^2y'' - 3xy' + y = 9x^2.$$

Exercice 4.13. *Considérez l'équation différentielle suivante qui provient de la cinétique chimique*

$$\dot{x} = (k_1 + K_2)(a - x)(b - x),$$

telles que a, b *sont deux constantes, avec* $a \neq b$*. Montrer que*

$$(k_1 + K_2)t = \frac{1}{b-a}\ \ln\Big[\frac{a(b-x)}{b(a-x)}\Big].$$

Solution. *Il sagit d'une équation différentielle à variables séparables*

$$\dot{x}(t) = (k_1 + K_2)(a - x(t))(b - x(t)).;$$

On rappelle que $\log y = \frac{\ln y}{\ln 10}$ *et* $\ln 10 \simeq 2,303$*. Nous avons*

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= (k_1 + K_2)(a - x)(b - x) \\
\Rightarrow \frac{dx}{(a-x)(b-x)} &= (k_1 + K_2)\ dt \\
\Rightarrow \int \frac{1}{(a-x)(b-x)}dx &= \int\ (k_1 + K_2)\ dt \\
\Rightarrow I &= \ (k_1 + K_2)\ t + c
\end{aligned}$$

Factorisation des fonctions rationnelles :

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{(a-x)} + \frac{B}{(b-x)}$$

Nous trouvons que

$$A = \frac{1}{b-a}, \quad B = -A$$

Donc

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{A}{(a-x)}dx + \int \frac{-A}{(b-x)}dx \\
&= (-A)\int \frac{-1}{(a-x)}dx\ +\ A\int \frac{-1}{(b-x)}dx \\
&= -A\ln|a-x|\ +\ A\ln|b-x| \\
&= -A\ln(a-x)\,|\ +A\ln(b-x) \\
&= A\Big(\ln(b-x) - \ln(a-x)\Big) \\
&= A\ln\frac{b-x}{a-x} + c.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} A\ln\dfrac{b-x(t)}{a-x(t)}+c &=& (k_1+K_2)\,t \\ \overset{t=0}{\Longrightarrow}\ A\ln\dfrac{b-x(0)}{a-x(0)}+c &=& (k_1+K_2).\,0 \\ \Rightarrow A\ln\dfrac{b-0}{a-0}+c &=& 0 \\ \Rightarrow c &=& -A\ln\dfrac{b}{a} \\ \Rightarrow\ A\ln\dfrac{b-x(t)}{a-x(t)}-A\ln\dfrac{b}{a} &=& (k_1+K_2)\,t \\ \Rightarrow\ A\Big(\ln\dfrac{b-x(t)}{a-x(t)}-\ln\dfrac{b}{a}\Big) &=& (k_1+K_2)\,t \\ \Rightarrow\ A\ln\Big[\dfrac{(b-x(t))}{(a-x(t))}.\dfrac{a}{b}\Big] &=& (k_1+K_2)\,t \\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{b-a}\ln\Big[\dfrac{a(b-x)}{b(a-x)}\Big] &=& (k_1+K_2)\,t. \end{array}$$

Exercice 4.14. *Trouver la solution en sé rie de l'équation*

$$y''-xy=0 \ \text{ avec } \ y(0)=1\ y'(0)=1.$$

Solution. *En terme de séries, l'équation devient*

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2).(n+1).a_{n+2}.x^n - x\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n.x^n &=& 0, \quad \forall x\in I \\ \Longrightarrow\ 0\sum^{\infty}(n+2).(n+1).a_{n+2}.x^n \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n.x^{n+1} &=& 0, \quad \forall x\in I \\ \Longrightarrow\ 0\sum^{\infty}(n+2).(n+1).a_{n+2}.x^n - \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n-1}.x^n &=& 0, \quad \forall x\in I \\ \Longrightarrow\ 2a_2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big((n+2).(n+1).a_{n+2}+a_{n-1}\Big).x^n &=& 0, \quad \forall x\in I. \end{array}$$

Or $y(0)=1$ *donne* $a_2=0$, *donc*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+2).(n+1).a_{n+2}+a_{n-1}\Big).x^n=0, \quad \forall x\in I,$$

d'où

$$(n+2).(n+1).a_{n+2}+a_{n-1}=0, \quad \forall n \geq 1.$$

.

" La mathématique fournit l'exemple le plus éclatant d'une raison pure qui réussit à s'étendre elle même et sans le secour de l'expérience ", E. Kant.

Chapitre 5

Transformées de Fourier (2 semaines)

(2 semaines : 3h cours+3h td)

Les phénomènes physiques ne se restreignent évidemment pas aux phénomènes périodiques, et il est très naturel de se poser la question de la représentation des phénomènes physiques "non périodiques" par un analogue des "séries de Fourier". Justement, la notion de transformation de Fourier correspond, physiquement, à la notion de sŕie de Fourier d'une fonction non périodique. En effet, supposons une fonction $f(t)$ *de période* T*. Lorsque* T *tend vers l'infini, la fonction* $f(t)$ *perd son caractère périodique. Dans ces conditions, la série de Fourier est remplacée par l'intégrale de Fourier.*

La transformation de Fourier, continue ou discrète, est également l'outil de base pour le traitement de l'information numérique. Le traitement du signal analogique repose essentiellement sur l'utilisation de circuits électroniques qui fonctionnent mathématiquement comme des opérateurs linéaires diagonalisables

par transformation de Fourier.

5.1 Définitions

Définition 5.1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction intégrable (au sens de Lebesgue, $f \in L^1(\mathbb{R})$). On appelle transformée de* ***Fourier*** *de f, et on note $\widehat{f}$ ou F, la fonction*

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto \widehat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x).e^{i.2\pi x w}}_{h_w(x)} dx, \end{aligned}$$

autrement dit,

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto \widehat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} h_w(x) dx, \end{aligned}$$

telle que la fonction $h_w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie par $h_w(x) = f(x).e^{i.(2\pi x w)}$.

En physique, x représente soit une variable d'espace, soit le temps. La variable conjuguée w s'identifiera alors à un vecteur d'onde ou à une pulsation. En électronique (traitement de signal)par exemple, dans la plupart des exemples, la variable concernée x est un temps t. Dans ce cas, la variable w a les dimensions de l'inverse du temps. Elle est appelée la fréquence.

Remarque. *On rappelle que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.*
Et donc à vrai dire,

$$\begin{aligned} h_w(x) &= f(x).\Big(\cos(2\pi x w) + i.\sin(2\pi x w) \Big) \\ &= f(x).\cos(2\pi x w) + i.(f(x).\sin(2\pi x w)). \end{aligned}$$

• *Tous les mathématiciens et physiciens ne s'accordent pas sur la définition de la transformée de Fourier, la normalisation peut changer. On peut par exemple rencontrer les conventions de définitions :*
$\widehat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x).e^{-i.2\pi x w}\, dx$,
$\widehat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x).e^{-i.\pi x w}\, dx$,
$\widehat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x).e^{i.\pi x w}\, dx$.
ou encore $\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x).e^{-iwx}\, dx$.
Par exemples, *par la dernière définition, pour la fonction f définie par*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & si\ |t| \leq 1 \\ 0, & si\ |t| > 1, \end{cases}$$

la transformée de Fourier $\widehat{f} = F$ est définie pour tout $w \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t).e^{-i.wt} dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-1} 0.e^{-i.wt} dt + \int_{-1}^{1} 1.e^{-i.wt} dt + \int_{1}^{+\infty} 0.e^{-i.wt} dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i.wt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-1}{iw} e^{-i.wt} \right]_{-1}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w}{w}. \end{aligned}$$

Un autre exemple. *La Transformée de Fourier d'une fonction exponentielle : pour $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, on trouve que $\widehat{f}(w) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi w^2}$.*

On vient de présenter la transformation de Fourier, comme une représentation intégrale exprimée sur une base de fonctions sinusoïdales. Le contenu physique d'une telle décomposition est clair, et l'on peut facilement imaginer que la transformation de Fourier jouera un rôle déterminant dans tous les phénomènes physiques mettant en jeu des périodicités spatiales ou temporelles, et plus généralement des longueurs ou temps caractéristiques. Ainsi, pour donner quelques exemples, tous les phénomènes de diffusion de rayonnement (lumière, rayons X, mais aussi électrons ou neutrons via la dualité onde corpuscule) sont susceptibles d'une analyse reposant sur la transformation de Fourier.

Remarque. *L'espace $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas forcément le meilleur cadre pour définir la transformée de Fourier, car il n'est pas stable par la transformée de Fourier. On préfère souvent l'étudier sur $L^2(\mathbb{R})$ (définition via le théorème de Plancherel), sur l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide, ou encore sur l'espace des distributions tempérées. Par définition, il vient que :*

- *Si f est paire, alors $\widehat{f}(w) = 2\int_{\mathbb{R}} f(x).\cos(2\pi x w)dx \quad \forall w \in \mathbb{R}$.*
- *Si f est impaire, alors $\widehat{f}(w) = 2i.\int_{\mathbb{R}} f(x).\sin(2\pi x w)dx \quad \forall w \in \mathbb{R}$.*
- *$\widehat{f}$ est une fonction bornée, continue et $\lim\limits_{w\to\infty} \widehat{f}(w) = 0$.*

- ***Inversion de la transformée de Fourier***

Sous certaines conditions, il est possible d'inverser la transformée de Fourier, c'est-à-dire de retrouver f en connaissant $\widehat{f}$.

Théorème 5.1.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\widehat{f}(w).e^{i.xw}}_{H_x(w)} dw.$$

Alors, g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et $g = f$ presque partout.

On en déduit que deux fonctions intégrables qui ont même la transformée de Fourier sont égales presque partout.

On appelle g la transformée inverse de $\widehat{f}$, et on note $g = TF^{-1}(\widehat{f})$.
Par exemple, pour $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, comme $\widehat{f}(w) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f(w)^2}$, alors la transformée inverse $TF^{-1}(\widehat{f})(t) = e^{-\alpha|t|}$.

Dans la suite, nous allons parfois, utiliser la notation $TF[f(x)](w)$ au lieu de $\widehat{f}(w)$.

5.2 Propriétés

Citons les propriétés les plus utiles dans les situations pratiques.

1) ***Linéarité***. *La transformation de Fourier est linéaire, i.e. pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$$\boxed{TF[\lambda f + \mu g](w) = \lambda TF[f](w) + TF[g](w), \quad \forall w \in \mathbb{R}.}$$

*Ceci découle de la définition de la transformée de Fourier et des propriétés élémentaires de l'intégration. Dans la loi de **Beer** en chimie, par exemple, cette caractéristique se manifeste par le fait qu'un mélange de composants produit un spectre qui est la somme des composants, comme cela est le cas avec la loi de Beer.*

- *Notons que la transformée inverse aussi est linéaire.*

2) ***Translation.*** *Pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$TF[f(x-a)](w) = e^{-i2\pi wa}.\,TF[f(x)](w).$$

3) ***Modulation.*** *Pour tout $w_0 \in \mathbb{R}$,*

$$TF[e^{i2\pi w_0 x}](w) = TF[f()](w)$$

4) ***Changement d'échelle.*** *Pour tout réel $\lambda \neq 0$,*

$$TF[\lambda x](w) = \frac{1}{\mid \lambda \mid}.\,TF[\frac{f(x)}{\lambda}](w).$$

5) ***Transformée du produit de convolution.***

$$\boxed{\widehat{(f * g)}(w) = \widehat{f}(w).\widehat{g}(w)},$$

telle que $f * g$ est le produit de convolution défini par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(x-\tau)d\tau.$$

6) ***Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction***

Par définition, puis par intégration par partie, puis simplification, on trouve que la transformée de Fourier de la dérivée f' d'une fonction f est donnée par

$$\boxed{TF[f'(x)](w) = i2\pi f(w).\, TF[f(x)](w),\ \forall w \in \mathbb{R}.}$$

A la dérivation de $f(x)$ par rapport à x correspond donc la multiplication de $\widehat{f}(w)$ par $(i2\pi f(w))$. Plus généralement, pour la dérivée d'ordre n, on a

$$\boxed{TF[f^{(n)}(x)](w) = (i2\pi f(w))^n.\, TF[f(x)](w),\ \ \forall w \in \mathbb{R}.}$$

Cette propriété est fondamentale car elle permet de résoudre simplement certaines équations différentielles (voir la section suivante).

7) ***La dérivée de la Transformée de Fourier d'une fonction***

$$\frac{d}{dw} TF[f(x)]\,(w) = TF[-ixf(x)]\,(w)\ ,\ \forall w \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, pour la dérivée d'ordre n, on a

$$\frac{d^n}{dw^n} TF[f(x)]\,(w) = TF[(-ix)^n.f(x)]\,(w)\ ,\ \ \forall w \in \mathbb{R}.$$

8) ***Théorème de Parseval.***

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \mid \widehat{f}(w) \mid^2 dw}.$$

5.3 Application à la résolution d'équations différentielles

Les équations décrivant les phénomènes physiques s'expriment bien souvent par des équations différentielles. Dans le cas où les opérateurs associés sont linéaires et à coefficients constants, il est possible d'utiliser la transformation de Fourier pour diagonaliser ces opérateurs. Par transformée de Fourier, on se ramène à l'étude d'équations algébriques, ce qui est, bien sûr, considérablement plus simple. Considérons par exemple, l'équation différentielle

$$-y''(t) + y(t) = \underbrace{e^{-2|t|}}_{v(t)}\ ,\ \ t \in \mathbb{R}$$

Si f est une solution, alors elle vérifie

$$-f'' + f = v \ ,$$

En appliquant la transformation de Fourier, on obtient

$$(\widehat{-f' + f}) = \widehat{v},$$

et vue sa linéarité,

$$-\widehat{f}'(w) + \widehat{f}(w) = \widehat{v}(w), \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$-\Big((i2\pi f(w))^2 \widehat{f}(w)\Big) + \widehat{f}(w) = \frac{2.2}{2^2 + (2\pi f(w))^2} \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

donc

$$4\pi^2 f^2(w)\widehat{f}(w) + \widehat{f}(w) = \frac{4}{4 + 4\pi^2 f^2(w)} \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

alors,

$$(4\pi^2 f^2(w) + 1)\widehat{f}(w) = \frac{1}{1 + \pi^2 f^2(w)} \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

ce qui montre que

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{(1 + 4\pi^2 f^2(w))(1 + \pi^2 f^2(w))} \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

en simplifiant la fraction on obtient

$$\widehat{f}(w) = \frac{4}{3}\frac{1}{(1 + 4\pi^2 f^2(w))} - \frac{1}{3}\frac{1}{(1 + \pi^2 f^2(w))} \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

i.e.

$$\widehat{f}(w) = \frac{2}{3}\underbrace{\frac{2}{(1 + 4\pi^2 f^2(w))}}_{f_1(w)} - \frac{1}{3}\underbrace{\frac{4}{(4 + 4\pi^2 f^2(w))}}_{f_2(w)} \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

Maintenant en introduisant la transformée inverse, et grâce à sa linéarité

$$TF^{-1}\widehat{f}(t) = \frac{2}{3}TF^{-1}f_1(t) - \frac{1}{3}TF^{-1}f_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Or, $f_1(w) = \frac{2}{(1+4\pi^2 f^2(w))} = \frac{2.1}{(1^2+(2\pi f(w))^2)}$, *d'où* $TF^{-1}(\widehat{f_1})(t) = e^{-|t|}$,
et $f_2(w) = \frac{4}{(4+4\pi^2 f^2(w))} = \frac{2.2}{(2^2+(2\pi f(w))^2)}$, *d'où* $TF^{-1}(\widehat{f_2})(t) = e^{-2|t|}$,
on conclut que

$$f(t) = \frac{2}{3}e^{-|t|} - \frac{1}{3}e^{-2|t|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

5.4 Exercices

Exercice 5.1. *(Transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire) Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & si \; -\frac{\tau_0}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\tau_0}{4}, \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Exercice 5.2. *La fonction caractéristique de l'intervalle $[a, b]$, notée $\mathbf{1}_{[a,b]}$, c'est l'une des fonctions "porte", couramment utilisées en Physique. En particulier $\mathbf{1}_{[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]}$ est la fonction porte en théorie du signal. Calculer sa transformée de Fourier.*

Exercice 5.3. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & si \; -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \\ 1 - x, & si \; 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Exercice 5.4. *Pour $\alpha > 0$, on pose $f(x) = e^{-\alpha|x|}$.*

1. *Calculer la transformée de Fourier de f.*
2. *A l'aide de la formule de réciprocité, en déduire la transformée de Fourier de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.*
3. *Calculer $f * f$, calculer ainsi la transformée de Fourier de $x \longmapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$.*
4. *Déterminer la transformée de Fourier de $x \longmapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$.*

Exercice 5.5. *Soit la fonction rect ou porte $x(t) = rect(\frac{t}{T})$*

$$x(t) = \begin{cases} 1, & si \; x \in [\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}], \\ \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Calculer sa transformée de Fourier.

Exercice 5.6. *Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-a|x|}$.*

1. *On considère une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est intégrable et paire. Montrer que*

$$TF[g(x)] = G(f) = 2\int_0^{+\infty} g(x)cos(2\pi f x)dx.$$

2. *Se servir de la question précédente pour calculer la transformée de Fourier de f.*

3. *Avec une valeur de a particulière, en déduire la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos(2\pi f x)}{(2\pi f)^2+1} df.$$

Exercice 5.7. *Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-ax^2}$.*

1. *Montrer que f est une solution de l'équation différentille*

$$y'(x) + 2axy(x) = 0.$$

2. *En appliquant la transformation de Fourier à cette équation différentielle, en déduire une équation différentielle vérifiée par $TF[f(x)] = F(f)$.*

3. *Sachant que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, calculer $F(0)$.*

4. *Montrer que la fonction $f \longrightarrow F(0)e^{\frac{-(2\pi f)^2}{8\pi a}}$ est une solution de l'équation différentielle trouvée à la question 2. En déduire la valeur de $F(f)$.*

Exercice 5.8. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(t+a)$.*

Exercice 5.9. *(Equation de la chaleur) On considère une tige homogène très mince de longueur infinie. La température de la tige au temps $t = 0$ au point d'abscisse $x \in \mathbb{R}$ est notée $u(t,x)$. On suppose que cette fonction vérifie l'équation suivante, appelée équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

On suppose que $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, et on cherche une solution à l'équation précédente.
On suppose que l'équation précédente possède une solution $u : [0,+\infty[\times\mathbb{R}$ telle qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, tendant vers 0 en l'infini.
On note $F_x(u)(t,x)$ la transformée de Fourier de u par rapport à la variable d'espace x

$$F_x(u)(t,x) = \int_{\mathbb{R}} u(t,\xi)e^{-i\xi x}d\xi.$$

Résoudre l'équation.

Récemment, la théorie des séries et des transformées de Fourier a été appliquée à de nouvelles techniques comme la spectroscopie et l'imagerie.

Chapitre 6

Transformées de Laplace (1 semaine)

(1 semaine : 3h cours+1 :30h td)

La transformée de Laplace est beaucoup plus utilisée dans le cadre du traitement du signal, c'est pourquoi on considère uniquement des signaux dits causaux, c'est à dire nuls pour $t < 0$*. La fonction causal la plus largement utilisée est la fonction échelon unité, notée* u*, définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$u(t) = \begin{cases} 0, & si\ t < 0 \\ 1, & si\ t \geq 0, \end{cases}$$

En multipliant une fonction par la fonction échelon unité, on obtienr une fonction causale.

6.1 Définitions

Définition 6.1.1. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *une fonction causale. On appelle transformée de **Laplace** de* f*, et note* F *ou* $TL(f)$*, la fonction*

$$\begin{aligned} F: \ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ p &\mapsto F(p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(t).e^{-pt}}_{h_p(t)} dt. \end{aligned}$$

telle que $h_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$*,* p *est appelé variable de Laplace,* f *est appelée originale de* F*.*

• *Dans la pratique, p variable réelle est bien souvent suffisant.*

• *Notons que la valeur $F(p)$ s'agit d'une intégrale généralisée, dépendant du paramètre complexe p. En fait, $F(p)$ converge sous certaines conditions sur la partie réelle a de p.*

• ***Exemple.*** *Par définition, pour la fonction de l'échelon unitaire u définie plus haut, la transformée de Laplace U est définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ par*

$$U(p) = \int_0^{+\infty} u(t).e^{-pt}dt \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \lim_{y\to+\infty}\int_0^y e^{-pt}dt = \lim_{y\to+\infty}\left[\frac{-1}{p}e^{-pt}\right]_0^y = \frac{1}{p}.$$

Un autre exemple : la Transformée de Laplace d'une fonction exponentielle.
Pour $f(t) = e^{-\alpha t}$, on trouve que

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}.e^{-pt}dt = \lim_{y\to+\infty}\left[\frac{-e^{-(\alpha+p)t}}{p+\alpha}\right]_0^y = \frac{1}{p+\alpha}.$$

• ***Inversion de la transformée de Laplace***

Il est possible d'inverser la transformée de Laplace, c'est-à-dire de retrouver f en connaissant F. La transformée inverse de Laplace de la fonction $F(p)$, notée $f(t) = L^{-1}(F(p))$ est donnée par

$$f(t) = \frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{F(p).e^{tp}}_{H_t(p)}dp.$$

On utilise rarement cette définition mathématique pour le calcul. En pratique, souvent, on parvient à se ramener à des formes répertoriées dans des tables où sont consignées des fonctions usuelles et leurs transformées de Laplace.

Par exemple, pour $F(p) = \frac{p}{p^2+2p+5}$, la transformée inverse de Laplace est

$$f(t) = e^t.\Big[\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\Big].$$

Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

f(t)	F(p)	f(t)	F(p)
Dirac	1	échelon unitaire	1/p
t	$1/p^2$	$t^{n-1}/(n-1)!$	$1/p^n$
$e^{-a.t}$ avec $a > 0$	1/(p + a)	$t.e^{-a.t}$ avec $a > 0$	$1/(p + a)^2$
cos (w.t)	$p / (p^2 + w^2)$	sin (w.t)	$w / (p^2 + w^2)$
$e^{-\alpha.t}.\cos(\omega.t)$	$(p + a) / [(p + a)^2 + w^2]$	$e^{-\alpha.t}.\sin(\omega.t)$	$w / [(p + a)^2 + w^2]$

6.2 Propriétés

On suppose qu'on a les transformations de Laplace suivantes

$$f(t) \longrightarrow F(p)$$

$$g(t) \longrightarrow G(p).$$

Alors nous avons les prpriétés suivantes

1) ***Linéarité***. *La transformation de Laplace est linéaire, i.e. pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \longrightarrow \lambda F(p) + \mu G(p)$$

• *Notons que la transformée inverse aussi est linéaire.*

2) ***Translation.*** *Pour tout* $\tau \in \mathbb{R}$,

$$f(t-\tau) \longrightarrow e^{-p\tau}.\, F(p)$$

3) ***Modulation.*** *Pour tout* $\mathrm{w}_0 \in \mathbb{R}$,

$$e^{-\mathrm{w}_0 t} f(t) \longrightarrow F(p + w_0).$$

4) ***Dilatation ou contraction dans l'espace de départ.*** *Pour tout réel* $\lambda \neq 0$,

$$f(\lambda t) \longrightarrow \frac{1}{|\lambda|}.\, F(\frac{p}{\lambda})$$

5) ***Transformée du produit de convolution.***

$$\boxed{(f * g)(t) \longrightarrow F(p).G(p)}$$

telle que $f * g$ *est le produit de convolution défini par*

$$(f * g)(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

6) ***Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction***

La transformée de Laplace de la dérivée f' *d'une fonction* f *est donnée par*

$$\boxed{f'(t) \longrightarrow pF(p) - f(0)}$$

La transformée de Laplace de la dérivée second f'' *d'une fonction* f *est donnée par*

$$\boxed{f''(t) \longrightarrow p\Big(pF(p) - f(0)\Big) - f'(0)}$$

Plus généralement, pour la dérivée d'ordre n, on a

$$\boxed{f^{(n)}(t) \longrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)}$$

Cette propriété est fondamentale car elle permet de résoudre simplement certaines équations différentielles (voir la section suivante).

7) *La dérivée de la Transformée de Laplace d'une fonction*

$$\frac{d}{dp}F(p) = -pF(p), \ \forall p \in \mathbb{C}.$$

Plus généralement, pour la dérivée d'ordre n, on a

$$\frac{d^n}{dp^n}F(p) = (-p)^n F(p), \quad \forall p \in \mathbb{C}.$$

8) *Transformée de Laplace de la primitive d'une fonction*

La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction f est donnée par

$$\boxed{\int_0^t f(s)ds \longrightarrow \frac{1}{p}F(p)}.$$

9) *Théorème de la valeur initiale*.

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)}.$$

10) *Théorème de la valeur finale*.

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)}.$$

6.3 Application à la résolution d'équations différentielles

Par transformée de Laplace, on peut, par parfois, se ramener des équations différentielles à des équations algébriques, ce qui est considérablement plus simple. Considérons par exemple, l'équation différentielle

$$y'' - 2y' - 3y = \underbrace{e^{3t}}_{v(t)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

avec les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Si f est une solution, alors elle vérifie

$$f''(t) - 2f'(t) - 3f(t) = v(t)\ , \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

avec $f(0) = f'(0) = 0.$

En appliquant la transformation de Laplace, et sa linéarité on obtient

$$TL(f'') - 2TL(f') - 3TL(f) = TL(v),$$

d'où

$$p\Big(pF(p) - f(0)\Big) - f'(0) - 2\Big(pF(p) - f(0)\Big) - 3F(p) = \frac{1}{p-3}, \quad \forall p \in \mathbb{C},$$

et comme $f(0) = f'(0) = 0,$ *alors*

$$p^2F(p) - 2pF(p) - 3F(p)) = \frac{1}{p-3}, \quad \forall p \in \mathbb{C},$$

donc

$$\Big(p^2 - 2p - 3\Big)F(p) = \frac{1}{p-3}, \quad \forall p \in \mathbb{C}$$

et donc

$$F(p) = \frac{1}{\Big(p-3\Big)\Big(p^2-2p-3\Big)} = \frac{1}{\Big(p-3\Big)^2\Big(p+1\Big)}, \quad \forall p \in \mathbb{C}$$

en simplifiant la fraction on obtient

$$F(p) = \frac{\frac{1}{4}p}{\Big(p-3\Big)^2} - \frac{\frac{1}{16}}{\Big(p-3\Big)} + \frac{\frac{1}{16}}{\Big(p+1\Big)}, \quad \forall p \in \mathbb{C},$$

i.e,

$$F(p) = \frac{1}{4}F_1(p) - \frac{1}{16}F_2(p) + \frac{1}{16}F_3(p), \quad \forall p \in \mathbb{C}.$$

Maintenant, en introduisant la transformée inverse, et grâce à sa linéarité

$$f(t) = \frac{1}{4}f_1(t) - \frac{1}{16}f_2(t) + \frac{1}{16}f_3(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Or, d'après la transformation de Laplace d'une fonction exponentielle

$F_1(p) = \frac{p}{(p-3)^2}$, *d'où* $TL^{-1}(F_1)(t) = f_1(t) = te^{3t},$

et

$F_2(p) = \frac{1}{(p-3)}$, *d'où* $TL^{-1}(F_2)(t) = f_2(t) = e^{3t},$

et

$F_3(p) = \frac{1}{(p+1)}$, *d'où* $TL^{-1}(F_3)(t) = f_3(t) = e^{-t}.$

On conclut que

$$f(t) = \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{16}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

6.4 Exercices

Exercice 6.1. *(Transformée de Laplace de la fonction sinus) Montrer que la transformée de Laplace de la fonction*

$$\sin(wt) = \frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}$$

est

$$F(p) = \frac{w}{w^2 + p^2}.$$

Exercice 6.2. *Calculer la transformée de Laplace de la fonction*

$$\cos(wt) = \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}.$$

Exercice 6.3. *Calculer la transformée de Laplace des fonctions*

$$f(t) = \alpha^t \ \ (\alpha > 0), \quad f(t) = \cos^3 t, \quad f(t) = e^t \cos^2 t.$$

Exercice 6.4. *Trouver la fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace est*

$$F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}.$$

Exercice 6.5. *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + 4y' + y = 2e^{-2t},$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1$.

Exercice 6.6. *Résoudre le système d'équations différentielles*

$$\begin{cases} x'' + y = 1 \\ y'' + x = 0, \end{cases}$$

avec les conditions $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 6.7. *Résoudre l'équation intégrale*

$$\int_0^t y(x) \sin(t - x) dx = t - \cos t.$$

Exercice 6.8. *En utilisant la transformation de Laplace, calculer l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt.$$

Bibliographie

[1] C. ASLANGUL. **Des mathématiques pour les sciences, Concepts, méthodes et techniques pour la modélisation***, De Boeck, Bruxelles (2011).*

[2] C. ASLANGUL. **Des mathématiques pour les sciences 2, Corrigés détaillés et commentés des exercices et problémes***, De Boeck, Bruxelles (2013).*

[3] E. BELORIZKY. **Outils mathématiques é l'usage des scientifiques et des ingénieurs***, EDP Sciences, Paris, (2007).*

[4] M. BENAMIRA. **Cours de cinétique chimique***, Département de chimie, université de Jijel, (2007).*

[5] A. GIROUX. **Notes de cours pour MAT 1958, Mathématiques pour chimistes***, Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal Décembre 2009.*

[6] VH. NGUYEN, J. DELHALLE, J-M. ANDRE. **Méthodes mathématiques appliquées et la chimie.** *Université de Namur 2000.*