

←⁹)

Exercice 6) Montrer que si il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x\|_2 = \|x\|_1^\alpha, \forall x \in F$, alors $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ (i.e. équivalents).

Exercice 7 Soit $\mathbb{Q}$ le corps des rationnels et $|\cdot|$ la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$. Montrer que la relation $\|x\| = |x|^\alpha, \forall x \in \mathbb{Q}$, définit une norme sur $\mathbb{Q}$ si $0 < \alpha \leq 1$. Dédurre les normes équivalentes à $|\cdot|$ sur $\mathbb{Q}$.

Indications pour les exercices

Exo 1 Il suffit de vérifier la Condition d'un espace vectoriel E qui est toujours défini sur un corps K (dans notre cas, on prend $E = K = F$)

Exo 2: En vertu de la deuxième Condition de la définit d'une norme sur Corps, i.e. $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$

Exo 3: De la même façon pour i)

Exo 4: On applique la définition d'une norme (triviale) grossière, i.e. $\|x\| = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$

Exo 5: Si $\|x\| > 1$, On applique le résultat du premier cas à $x' = 1/x$ pour obtenir le même résultat.

Exo 6 Application immédiate de la définition de l'équivalence des normes sur un corps.

Exo 7 $\Rightarrow$) On vérifie la condition de la norme si $\alpha < 1$.

$\Leftarrow$) On montre, par contre exemple, que si $\alpha > 1$, alors $\|\cdot\| = |\cdot|^\alpha$ n'est pas une norme (Vérifier l'inégalité triangulaire)

• On applique le th. 1 à $F = \mathbb{Q}$ pour déduire les normes équivalentes à $|\cdot| = |\cdot|_0$ sur $\mathbb{Q}$.

Exo 1 Soit $\|\cdot\|$ une norme sur le corps F . Montrer
sp² l'équivalence
 $\|\cdot\|$ est non archimédienne $\Leftrightarrow \|\eta\| \leq 1, \forall \eta \in \mathcal{O}$

Exo 2 I) Donner un exemple d'un corps
sp² archimédienne et un exemple d'un
corps non archimédien.

II) Montrer qu'une norme non archimédienne
 $\|\cdot\|$ sur un corps F n'est jamais équivalente
à une norme archimédienne $\|\cdot\|_2$ définie
sur le même corps F .

Exo 3 Soit $F = \mathbb{Q}$ le corps des rationnels et
sp² $A(x) = |x|^\alpha, \forall x \in \mathbb{Q} (x \in \mathbb{R}_+^*)$

- i) Montrer que si $\alpha > 1$, alors l'inégalité
triangulaire n'est pas vérifiée
- ii) Montrer que si $0 < \alpha \leq 1$, alors A définit
une norme sur $\mathbb{Q}$

EXERCICE Soit (a_n) une suite dans le corps $\mathbb{R}$ non archimédien et complet F tel que $a_n \rightarrow a \in F$ et $a \neq 0$

i) Montrer que $(\|a_n\|)$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Deduire que $(\|a_n\|)$ converge.

ii) On pose $l = \|a\| > 0$

iii) Montrer qu'il existe N_2 / $\|a_n\| \geq \frac{l}{2}$, $\forall n \geq N_2$

iv) Montrer qu'il existe N_1 / $\|a_n - a_m\| \leq \frac{l}{2}$, $\forall n, m \geq N_1$

Montrer que pour $n \geq N_0 = \max(N_1, N_2)$, on a

$$\|a_m\| \leq \|a_{N_0}\|, \quad \forall m \geq N_0$$

et que $\|a_{N_0}\| \leq \|a_m\|, \quad \forall m \geq N_0$