Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes. On appelle série de terme général u_n, et on note $\sum\limits_n u_n$ ou $\sum u_n$ la suite des sommes partielles, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

$S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2, ...$

• *On dit que la série $\sum\limits_n u_n$ converge vers S si et seulement si la suite des sommes partielles, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, dans se cas $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = S$ est appelée somme de la série $\sum\limits_n u_n$, et désignée par $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

• *Une série est dite divergente si elle est n'est pas convergente.*

Exemple 1.1.2 1. ***Série géométrique :***

Le terme général d'une série géométrique est $u_n = r^n$. Les sommes partielles ont une expression explicite :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \begin{cases} n+1 & si\ r = 1, \\ \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & si\ r \neq 1, \end{cases}$$

et sa somme

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & si\ |r| < 1 \\ pas\ de\ limite & si\ r \leq -1 \\ +\infty & si\ r \geq 1 \end{cases}$$

2. Voici un exemple de série dont les sommes partielles sont explicitement calculables :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1.$$

En effet :

$$u_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},$$

donc

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=1-\frac{1}{n+2},$$

et

$$S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)=1.$$

3. Série de terme général : $u_n=\varphi_{n+1}-\varphi_n$ $(n\geq 0)$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique, alors :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=0}^{n}\left(\varphi_{k+1}-\varphi_k\right)=\varphi_{n+1}-\varphi_0,$$

donc la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ sont de même nature. De plus, si $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n=l$, la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ est convergente et

$$S=\lim_{n\to+\infty}S_n=l-\varphi_0.$$

Reste d'une série convergente

Si la série de terme général u_n est convergente, et de somme $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$, la différence $S-S_n$ s'appelle reste d'ordre n de la série. On le note :

$$R_n=S-S_n=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k-\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k.$$

Proposition 1.1.3 *Si la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n=0$.*

En effet : $R_n=S-S_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(S-S_n)=S-S=0$
(car la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ converge et $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$).

Remarque 1.1.4 *Les sommes partielles d'une série sont toujours définies, mais les restes ne le sont que lorsque la série converge.*

Théorème 1.1.5 *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers zéro, i.e.*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

La contraposée de ce résultat est souvent utilisée : une série dont le terme général ne tend pas vers zéro ne peut pas converger.

Preuve. On a

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = S_{n-1} + u_n \Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Si la série converge, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

Remarque 1.1.6 *Cette condition est une condition nécessaire qui n'est pas suffisante, car il existe des séries divergentes et dont les termes généraux tendent vers zéro à l'infini.*

Contre exemples

1. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ est une série divergente, car

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty,$$

   bien que la limite de son terme général est nulle : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0.$

2. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, dite **série harmonique**, est une série divergente, bien que son terme général $\frac{1}{n}$ tend vesr 0 à l'infini.

   En effet : on a

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k} \geq \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t} dt \Rightarrow \forall k \geq 1, \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$$

   i.e.

$$\left\{\begin{array}{c} 1 \geq \ln 2 - \ln 1 \\ \frac{1}{2} \geq \ln 3 - \ln 2 \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln n \end{array}\right. .$$

D'où

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n \geq \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty,$$

ce qui montre que la série harmonique diverge. On peut aussi montrer sa divergence en montrant que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy.

Proposition 1.1.7 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)$ converge, i.e.*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite convergente} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} (a_{n+1} - a_n) \text{ une série convergente.}$$

Preuve. La suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geq 0} (a_{n+1} - a_n)$ est

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

• Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on note sa limite $l = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l - a_0$, ce qui prouve que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (a_{n+1} - a_n)$ converge.

• Si on suppose que la série $\sum\limits_{n\geq 0} (a_{n+1} - a_n)$ converge vers S, on a

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n + a_0 = S + a_0.$$

Ce qui montre que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. ■

Exemple 1.1.8 *1. Soit la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$.*

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $a_n = \frac{1}{n}$ converge, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, en plus :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

d'où

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$

2. Soit la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = \arctan \frac{1}{1+n+n^2}$

$$\arctan \frac{1}{1+n+n^2} = \arctan \left(\frac{(n+1) - n}{1 + n(n+1)} \right) = \arctan(n+1) - \arctan(n),$$

la suite $(\arctan n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = \arctan \frac{1}{1+n+n^2}$ converge, et sa somme

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (\arctan(k+1) - \arctan k) = \lim_{n\to+\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}.$$

1.1.1 Propriétés et opérations sur les séries

Proposition 1.1.9 *Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques, on suppose qu'elles ne diffèrent que par un nombre fini de termes (i.e il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$ on a $u_n = v_n$), alors les deux séries sont de même nature.*

Preuve. Soit $n \geq p$, posons :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k = S_p + \sum_{k=p+1}^{n} u_k, \\ T_n &= \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{p} v_k + \sum_{k=p+1}^{n} v_k = T_p + \sum_{k=p+1}^{n} v_k. \end{aligned}$$

La différence $S_n - T_n = S_p - T_p$ est une constante, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge. ■

Remarque 1.1.10
1. *Cette proposition permet de dire que les séries sont de même nature (on parle de nature d'une série pour désigner sa convergence ou sa divergence) mais en cas de convergence, elle n'ont pas necéssairement la même somme.*
2. *On ne change pas la nature d'une série si on lui rajoute ou on lui retranche un nombre fini de termes.*

Proposition 1.1.11 *Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques et α un scalaire non nul :*

1. *Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge vers S, et la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge vers T, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ converge vers $(S + T)$.*
2. *Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge vers S, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha u_n$ converge vers αS.*
3. *Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, et la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ diverge.*

Remarque 1.1.12 *Si les deux séries sont divergentes, on ne peut rien dire sur la nature de leur somme.*

Exemple 1.1.13
1. *La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)}$ divergent, et pourtant on a montré que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge (voir l'exemple 1.1.8).*

2. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *telles que :* $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = -1 \end{cases}$,
   les deux séries divergent, mais la série $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ *converge.*

3. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *telles que :* $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 \end{cases}$,
   les deux séries divergent, et la série $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ *diverge aussi.*

Pour les séries à termes complexes la convergence équivaut à celle des parties réelles et imaginaires.

Proposition 1.1.14 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de complexes. Pour tout* n*, notons* a_n *et* b_n *la partie réelle et la partie imaginaire de* u_n*.*

La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge si et seulement si les deux séries* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n$ *convergent. Si c'est le cas, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Preuve. Rappelons qu'une suite de complexes converge si et seulement si la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires convergent. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} A_n = A \text{ et } \lim_{n\to+\infty} B_n = B\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (A_n + iB_n) = A + iB.$$

Il suffit d'appliquer ce résultat à :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

car la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles, et la partie imaginaire d'une somme est la somme des parties imaginaires. ∎

Exemple 1.1.15 *Considérons par exemple la série géométrique* $\sum_{n\geq 0} r^n$*, où* r *est un complexe de module* $\rho < 1$ *et d'argument* θ *:* $r = \rho e^{i\theta}$*.*

Pour tout n*,* $r^n = \rho^n e^{in\theta}$*. Les parties réelles et imaginaires de* r^n *sont :*

$$a_n = \rho^n \cos n\theta \text{ et } b_n = \rho^n \sin n\theta.$$

On déduit de la proposition précédente que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-r}\right) \ \ et \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Le calcul donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \cos n\theta = \frac{1-\rho\cos\theta}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta} \ \ et \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sin n\theta = \frac{\rho\sin\theta}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}.$$

1.2 Séries à termes positifs

Définition 1.2.1 *On appelle* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes réels positifs toute série vérifiant :* $u_n \geq 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

• *Les séries vérifiants :* $u_n \geq 0$, *pour tout* $n \geq n_0$ *sont aussi appelées séries à termes positifs car la nature d'une série ne change pas si on lui retranche un nombre fini de termes (voir la Proposition 1.1.9).*

• *Si on note* $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, *alors* $S_n - S_{n-1} = u_n$. *Donc la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, ce qui entraîne que : si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée alors elle converge (i.e. la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge), et si* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ *et la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*

Proposition 1.2.2 *Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*

1.2.1 Comparaison d'une série et d'une intégrale

Théorème 1.2.3 *(de comparaison avec son intégrale)*

Une série dont le terme général est de la forme $u_n = f(n)$ *; où* $f : [1.+\infty[\to \mathbb{R}$ *est une fonction continue, positive et décroissante vers* 0 *est de même nature que la suite* $\left(\int\limits_1^n f(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *i.e.*

$$\sum_{n\geq 0} u_n \ converge \Leftrightarrow \int_1^n f(x)\,dx \ \ converge.$$

Preuve. Supposons que $u_n = f(n)$; où f est une fonction continue, positive sur $[1.+\infty[$ et décroissante vers 0.

Sur chaque segment $[n, n+1]$ on a : $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$,

d'où

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx,$$

ce qui donne

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n).$$

Comme

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)\,dx,$$

on aura

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

or $u_n = f(n), \forall n \geq 1$ i.e.

$$S_{n+1} - u_1 = u_2 + u_3 + \cdots + u_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_n$$

• Si la suite $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)_n$ converge, elle est alors majorée, ce qui implique grâce à l'inégalité

$$S_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx + u_1,$$

que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, d'où convergente d'après la Proposition 1.2.2.

• Et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,dx = +\infty$ (car f est positive), on a $\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n$, ce qui implique que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \geq \lim_{n\to+\infty} \left(\int_1^{n+1} f(x)\,dx\right) = +\infty,$$

et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Inversement si la série converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,dx$ existe, et si la série diverge, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,dx = +\infty$. ■

Remarque 1.2.4 • *La condition f est une fonction continue, positive et décroissante vers 0 n'a pas besoin d'être vraie à partir de $n = 1$, il suffit qu'elle soit vérifiée à partir d'un certain rang (voir Remarque 1.1.10).*

• *La fonction f positive peut être remplacée par une fonction de signe constant.*

Exemple 1.2.5 ***‹Série de Riemann›***

*Une série de la forme $\sum\limits_{n\succ 0} \frac{1}{n^\alpha}$ est dite série de **Riemann**.*

1. *Si $\alpha \leq 0$: La série de Riemann $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ (pour $\alpha = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1$).*

2. *Si $\alpha > 0$: $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = f(n), \forall n \geq 1$, où $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, x > 0$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 0$. D'après le théorème de comparaison avec une intégrale, la série $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx$ est finie.*

Or

• *Si $\alpha \neq 1$:*

$$\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$$

• *Si $\alpha = 1$:*

$$\int_1^n f(x)\,dx = \ln n,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Résultat : *La série de Riemann $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha \leq 1$.*

1.2.2 Critères de comparaison

Théorème 1.2.6 *(de comparaison de deux séries à termes positifs)*

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$, tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.

• *Si $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.*

• *Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ diverge.*

Preuve. Comme nous l'avons observé, la convergence ne dépend pas des premiers termes. On peut donc étudier les sommes partielles à partir de n_0. Pour tout $n \geq n_0$, notons :

$$S_n = u_{n_0} + \cdots + u_n \text{ et } T_n = v_{n_0} + \cdots + v_n.$$

Les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes, et de plus pour tout $n \geq N$.

$$S_n \leq T_n.$$

• Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ converge, alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit l sa limite, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et majorée par l, donc elle converge, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge aussi.

• Inversement, si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et il en est de même pour la siute $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Exemple 1.2.7 *Soit la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{|\cos n|}{n^2}$, *son terme général* $u_n = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Or $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est une série de Riemann convergente, donc* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{|\cos n|}{n^2}$ *converge aussi.*

Corollaire 1.2.8 *Soient* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs, s'il existe deux nombres réels strictement positifs* a, b *telle que :* $av_n \leq u_n \leq bv_n$, *alors les séries* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *sont de même nature.*

Corollaire 1.2.9 *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *converge, alors* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

Corollaire 1.2.10 *Soient* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs. Pour* n *assez grand satisfait :* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, *on a*

• *Si* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *converge,* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

• *Si* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *diverge,* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *diverge*

Preuve. On suppose que l'inégalité est satisfaite à partir d'un certain rang p :

$$\forall n \geq p : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \frac{u_{n-2}}{v_{n-2}} \leq \cdots \leq \frac{u_p}{v_p} = \alpha \ \left(\alpha \in \mathbb{R}^+\right),$$

donc

$$\forall n \geq p : \frac{u_n}{v_n} \leq \alpha \Rightarrow u_n \leq \alpha v_n,$$

et après en appliquant le théorème de comparaison. ■

Corollaire 1.2.11 *Soient r et r' deux réels tels que $0 < r < r' < 1$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\left(\frac{r}{r'}\right)^n a_n$ soit bornée. Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} r^n |a_n|$ converge.*

Corollaire 1.2.12 *Soient α et α' deux réels tels que $1 < \alpha' < \alpha$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $n^{-(\alpha-\alpha')}a_n$ soit bornée. Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} n^{-\alpha} |a_n|$ converge.*

Théorème 1.2.13 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs, équivalentes au voisinage de $+\infty$.*

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Preuve. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow (1-\varepsilon)\, v_n < u_n < (1+\varepsilon)\, v_n.$$

- Fixons $\varepsilon < 1$, si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, alors par le théorème de comparaison $\sum\limits_{n\geq 0} (1-\varepsilon)\, v_n$ converge, donc $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ également.
- Réciproquement, si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\geq 0} (1+\varepsilon)\, v_n$ diverge aussi. ■

Exemple 1.2.14 *$\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^2+3n+1}{n^4+2n^3+4}$ converge, $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n+\ln n}{n^3}$ converge.*

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$, et nous avons vu que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Par contre les séries $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^2+3n+1}{n^3+2n^2+4}$ et $\sum\limits_{n>0} \frac{n+\ln n}{n^2}$ divergent.

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{n}$, et nous avons vu que la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Corollaire 1.2.15 *(Règle de Riemann)*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l.$$

- Si $l \neq +\infty$ et $\alpha > 1$, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

• Si $l \neq 0$ et $\alpha \leq 1$, alors $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Preuve. • Si $l \neq +\infty$ et $\alpha > 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = l$ signifie que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$, or $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente donc $\sum\limits_{n>0} u_n$ converge.

• Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, alors $\exists N$ entier tel que $n \geq N$ tel que $n^\alpha u_n \geq 1$, alors $u_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$. Comme $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge alors $\sum\limits_{n>0} u_n$ diverge.

• Si $l \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \leq 1$: on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ et comme $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge alors $\sum\limits_{n>0} u_n$ diverge. ■

Exemple 1.2.16 *Etudions la nature de la série* $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$. *On a*

$$\lim_{n \to +\infty} n \frac{1}{(\ln n)^2} = +\infty.$$

Donc $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$ *diverge.*

Exemple 1.2.17 ***(Série de Bertrand)***

La série de Bertrand $\sum\limits_{n>1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *est :*

1. *Si* $\alpha > 1$, *convergente pour tout* $\beta \in \mathbb{R}$.
2. *Si* $\alpha < 1$, *divergente pour tout* $\beta \in \mathbb{R}$.
3. *Si* $\alpha = 1$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n>1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge} & \text{si } \beta > 1, \\ \sum\limits_{n>1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ diverge} & \text{si } \beta < 1. \end{cases}$$

Preuve. 1) Si $\alpha > 1$: $\exists \alpha'$ tel que $1 < \alpha' < \alpha$, d'où

$$n^{\alpha'} u_n = \frac{1}{n^{\alpha - \alpha'} (\ln n)^\beta} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} n^{\alpha'} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha - \alpha'} (\ln n)^\beta} = 0;$$

d'après la règle de Riemann $\sum\limits_{n \succ 1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.

2) Si $\alpha < 1$: $\exists \alpha'$ tel que $\alpha < \alpha' < 1$, d'où

$$n^{\alpha'} u_n = \frac{1}{n^{\alpha - \alpha'} (\ln n)^\beta} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\alpha - \alpha'} (\ln n)^\beta} = +\infty,$$

d'après la règle de Riemann $\sum\limits_{n>1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.

3) Si $\alpha = 1$: On pose $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

f est une fonction positive, décroissante sur $]1,+\infty[$, donc $\sum\limits_{n>1}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ et $\int\limits_{2}^{n}\frac{1}{t(\ln t)^{\beta}}dt$ sont de même nature d'après le Théorème 1.2.3.

$$\int\limits_{2}^{n}\frac{1}{t(\ln t)^{\beta}}dt=\begin{cases}\frac{-1}{\beta-1}\left[(\ln n)^{1-\beta}-(\ln 2)^{1-\beta}\right] & \text{si } \beta\neq 1\\ \ln(\ln n)-\ln(\ln 2) & \text{si } \beta=1\end{cases},$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{2}^{n}\frac{1}{t(\ln t)^{\beta}}dt=\begin{cases}\frac{1}{\beta-1}(\ln 2)^{1-\beta} & \text{si } \beta>1\\ +\infty & \text{si } \beta<1\\ +\infty & \text{si } \beta=1\end{cases}$$

d'où $\sum\limits_{n>1}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ converge si $\beta>1$ et diverge si $\beta\leq 1$. ■

1.2.3 Critères de Cauchy et de d'Alembert

Rappelons tout d'abord que la série géométrique converge si $|r|<1$, diverge sinon. les critères de Cauchy et d'Alembert permettent de comparer une série à termes positifs avec les séries géométriques

Théorème 1.2.18 *(Critère de Cauchy)*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ une série à termes positifs ou nuls. Notons $k=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}$ tel que $k\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$.

- *Si $k<1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ converge.*
- *Si $k>1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ diverge.*
- *Si $k=1$, cas de doute, on ne peut pas conclure.*

Preuve. 1) Par définition de la limite lorsque $k\in\mathbb{R}^+$

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0 \text{ on ait } (k-\varepsilon)<(u_n)^{\frac{1}{n}}<(k+\varepsilon)$$

• Si $k<1$, il existe ε tel que $k'=k+\varepsilon<1$ et $u_n<(k')^n=v_n$ où $\sum\limits_{n\geq 0}v_n$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ converge.

• Si $k>1$, il existe ε tel que $(k-\varepsilon)>1$ donc $u_n>(k-\varepsilon)^n>1$ et u_n ne tend pas vers 0, donc la série $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ diverge.

2) Lorsque $k=+\infty$, par définition de la limite.

$$\exists n_0\in\mathbb{N},n\geq n_0 \Rightarrow (u_n)^{\frac{1}{n}}>1.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, et la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge. ■

Exemple 1.2.19 *La série* $\sum\limits_{n>0} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n^2}$ *converge si* $a>0$ *et diverge si* $a<0$ *car*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n} = e^{-a}$$

- *Si* $a>0$, *la série* $\sum\limits_{n>0} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n^2}$ *converge.*
- *Si* $a<0$, *la série* $\sum\limits_{n>0} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n^2}$ *diverge.*
- *Si* $a=0$, $u_n=1$, *la série* $\sum\limits_{n>0} 1$ *diverge.*

Remarque 1.2.20 *Le critère de Cauchy ne s'applique ni aux séries de Riemann, ni aux séries de Bertrand car :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{-\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^{-\alpha}\left(\ln\right)^{-\beta}} = 1.$$

Théorème 1.2.21 *(Critère de d'Alembert)*

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs pour tout entier* n_0, *telle que* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *est de limte* k *quand* $n\to+\infty$.

- *Si* $k<1$, *la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
- *Si* $k>1$, *la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*
- *Si* $k=1$, *cas de doute, on ne peut pas conclure.*

Preuve. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$:

$$(k-\varepsilon) < \frac{u_{n+1}}{u_n} < (k+\varepsilon).$$

• Si $k<1$, il existe ε tel que $k' = k+\varepsilon < 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k' = \frac{(k')^{n+1}}{(k')^n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}/v_n = (k')^n$$

$\sum\limits_{n\geq 0} (k')^n$ converge $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge (d'après le Corollaire 1.2.10).

• Si $k>1$, alors il existe ε tel que $(k-\varepsilon)>1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k' = \frac{(k')^{n+1}}{(k')^n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}/v_n = (k')^n$$

$\sum\limits_{n\geq 0} (k')^n$ diverge $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge (d'après le Corollaire 1.2.10). ■

Exemple 1.2.22 *1. Pour tout réel positif r, la série exponentielle $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{r^n}{n!}$ converge.*

En effet :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n+1} \text{ tend vers } 0 < 1.$$

2. La série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ diverge car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \text{ tend vers } 4 > 1.$$

Proposition 1.2.23 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.*
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$.

Preuve. Pour tout $\varepsilon > 0.$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$k - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < k + \varepsilon,$$

par recurrence, on en déduit :

$$(k-\varepsilon)^{n-n_0} < u_n < (k+\varepsilon)^{n-n_0}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(k-\varepsilon)^{n-n_0}} = k - \varepsilon$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(k+\varepsilon)^{n-n_0}} = k + \varepsilon.$$

Donc il existe $n_1 > n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$,

$$k - 2\varepsilon < u_n < k + 2\varepsilon,$$

d'où le résultat. ■

Règle de Raabe-Duhamel :

Soit $u_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ pour un certain entier naturel n_0. Notons $k = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ où $k \in \mathbb{R}$. Alors

- Si $k > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $k < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.
- Si $k = 1$, cas de doute, on ne peut pas conclure.

Exemple 1.2.24 *Considérons une nouvelle fois la série* $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n^2}$.

La limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, *le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure sa nature, appliquons donc la règle de Raabe-Duhamel :*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1+2n}{n^2}\right) = 2 > 1,$$

ce qui prouve la convergence de la série.

Règle de Gauss :

Soit $u_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ pour un certain entier naturel n_0. On suppose que $\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\,]1,+\infty[$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + 0\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Alors : $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$ losque n tend vers l'infini c'est-à-dire :

- Si $\alpha > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.
- Si $\alpha \leq 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exemple 1.2.25 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *avec* $u_n = \sqrt{n!}\sin 1 \times \sin\frac{1}{\sqrt{2}} \times \cdots \times \sin\frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{6n} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui prouve que la série diverge par application de la règle de Gauss avec $\alpha = \frac{1}{6} < 1$ *et* $\beta = 2 > 1$.

1.3 Séries à termes quelconques

1.3.1 Séries absolument convergentes

Quand une série n'est pas à termes positifs, la première chose à faire est d'examiner la série des valeurs absolue, ou des modules s'il s'agit des nombres complexes.

Définition 1.3.1 *On dit que la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *est absolument convergente si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ *converge.*

Exemple 1.3.2 *La série* $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n e^{in}}{n^2+n}$ *converge absolument car le module du terme général est égal à* $\frac{1}{n^2+n}$ *qu'on peut majorer par* $\frac{1}{n^2}$.

La série $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ *ne converge pas absolument car :*

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{1}{n+1},$$

et $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}$ *diverge.*

Théorème 1.3.3 *Une série absolument convergente est convergente.*

Preuve. Supposons pour commencer que les u_n sont réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0, \\ 0 & \text{si } u_n < 0. \end{cases} \text{ et } u_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u_n \geq 0, \\ -u_n & \text{si } u_n < 0. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \text{ et } 0 \leq u_n^- \leq |u_n|,$$

par le Théorème de comparaison, si $\sum\limits_{n\geq 0}|u_n|$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0}u_n^+$ et $\sum\limits_{n\geq 0}u_n^-$ convergent. Par linéarité, $\sum\limits_{n\geq 0}u_n^+ - \sum\limits_{n\geq 0}u_n^-$ converge, or

$$u_n^+ - u_n^- = u_n.$$

D'où le résultat. Passons maintenant au cas où les u_n sont des complexes.

Notons a_n la partie réelle de u_n et b_n la partie imaginaire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < |a_n| < |u_n| \text{ et } 0 \leq |b_n| < |u_n|.$$

Par le théorème de comparaison, si $\sum\limits_{n\geq 0}|u_n|$ converge, alors $\sum\limits_{n\geq 0}|a_n|$ et $\sum\limits_{n\geq 0}|b_n|$ convergent aussi. Donc $\sum\limits_{n\geq 0}a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0}b_n$ convergent, en appliquant le cas des séries à termes réels, donc $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ converge. ■

Exemple 1.3.4 *Pour tout réel* θ, *la série* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n^2}$ *est absolument convergente.*

En effet,

$$\left|\frac{e^{in\theta}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2},$$

et $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ *converge.*

Définition 1.3.5 *On dit que la série* $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ *est semi convergente lorsque* $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ *converge mais* $\sum\limits_{n\geq 0}|u_n|$ *diverge.*

1.3.2 Critère d'Abel

Théorème 1.3.6 *Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que*

1. *La suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante de réels positifs, et tend vers zéro.*
2. *Les sommes partielles de la suite* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont bornées :*

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |b_0 + b_1 + \cdots + b_n| < M. \tag{*}$$

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n$ *converge.*

Preuve. $\sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n$ converge$\Leftrightarrow$ $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge tel que : $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k \Leftrightarrow (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon \succ 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, p \in \mathbb{N} : |T_{n+p} - T_n| < \varepsilon.$

$$\begin{aligned}
|T_{n+p} - T_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n+p} a_k b_k - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k (S_k - S_{k-1})\right| \\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k S_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k S_{k-1}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k S_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1} S_k\right| \\
&= \left|-a_{n+1} S_n + a_{n+p} S_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) S_k\right| \\
&= \left|\begin{array}{c} -a_{n+1} S_n + a_{n+p} S_{n+p} + (a_{n+1} - a_{n+2}) S_{n+1} + (a_{n+2} - a_{n+3}) S_{n+2} + \cdots + \\ (a_{n+p-1} - a_{n+p}) S_{n+p-1} \end{array}\right|,
\end{aligned}$$

où

$$S_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n, n \in \mathbb{N}.$$

Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné par $(*)$, on en déduit de linégalité triangulaire et en tenant compte de l'hypothèse de positivité et de décroissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que :

$$\begin{aligned}
|T_{n+p} - T_n| &\leq M\left(a_{n+1} + a_{n+p} + (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})\right) \\
&= 2M a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} |T_{n+p} - T_n| \leq 2M, \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0,$$

d'où $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n$ converge. ■

Exemple 1.3.7 *Etudier la nature des séries de la forme :* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$ *ou* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$ *où*

$$x\in\mathbb{R}-\{2m\pi; m\in\mathbb{Z}\}\,,\ \ et\ \alpha>0.$$

On a

$$\cos nx = \operatorname{Re} e^{inx}\ \ et\ \ \sin nx = \operatorname{Im} e^{inx}.$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= 1+e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{inx}=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\\ &= \frac{e^{i(n+1)\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\left[\frac{e^{-i(n+1)\frac{x}{2}}-e^{i(n+1)\frac{x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}\right]=e^{i\frac{nx}{2}}\frac{-2i\sin(n+1)\frac{x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}}\\ &= e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},\end{aligned}$$

ce qui donne

$$1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\cos\frac{nx}{2}\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

et

$$1+\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin x=\sin\frac{nx}{2}\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

d'où

$$|1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\ \ et\ \ |1+\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Ces majorations sont indépendantes de n, donc on peut appliquer le critère d'Abel pour démontrer la convergence des séries $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$ *et* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$ *sachant que la suite* $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n>0}$ *est positive, décroissante vers* 0 *pour tout* $\alpha>0$*.*

En plus, pour $\alpha>1$ *les séries converges absolument.*

1.3.3 Séries alternées

Définition 1.3.8 *On appelle* $\sum\limits_{n\geq 0}u_n$ *série alternée une série dont le terme général est alternativement positif puis négatif i.e.* $u_n=(-1)^n v_n$ *tel que* $v_n\geq 0, \forall n\geq 0$*.*

Corollaire 1.3.9 *(Critère de Leibniz)*

Toute série alternée $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n v_n$ *dont la valeur absolue du terme général (i.e.*v_n*) décroit vers* 0 *est convergente.*

Preuve. Conséquence directe du Théorème 1.3.6 appliqué avec $a_n = v_n$ et $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ ■

Exemple 1.3.10 *La série* $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *est une série alternée convergente pour* $\alpha > 0$, *car*

$$u_n = (-1)^n v_n / v_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

- $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n>0}$ *est une suite positive, décroissante pour* $\alpha > 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ *pour* $\alpha > 0$.

1.3.4 Utilisation du développement asympotique

C'est une technique très utilisée pour les séries à termes quelconques pour lesquelles les critères précédents ne s'appliquent pas. Dans de nombreuses situations, on conclut sur la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple, pour les séries à termes positifs par exemple, il suffit de se ramener à un équivalent, ceci n'est plus le cas avec les séries à termes quelconques. Par ailleurs, un équivalent correspond à une approximation au premier ordre, laquelle ne permet pas forcément de conclure. Dans ces cas, il suffit de donner un développement asymptotique du terme général.

Exemple 1.3.11 *Soit la série* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

La suite $(|u_n|)_{n\geq 2}$ *n'est pas décroissante, donc on ne peut pas appliquer le critère des séries alternées.*

On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}}\right) \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0,$$

dans ce cas on peut utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+u}$ *au voisinage de* 0. *on obtient*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\left[1 - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

d'où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et on a

$$\begin{cases} \sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ est une série alternée convergente,} \\ \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente,} \\ \sum\limits_{n\geq 11} \frac{(-1)^n}{n^3} \text{ est une série alternée convergente,} \end{cases}$$

d'où $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ *converge.*

1.4 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 1.4.1 *Soient* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ *la série* $\sum\limits_{n\geq 0} C_n$ *où pour tout* n *entier :*

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \text{ ou } C_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

Théorème 1.4.2 *Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergent.*

Théorème 1.4.3 *Le produit de Cauchy d'une série absolument convergente et une série convergente est convergent.*

Exemple 1.4.4

1. *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *est une série alternée convergente. On va calculer le produit de Cauchy de cette série par elle- même :*

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \times \left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n\geq 1} C_n,$$

où

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-(k-1)} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k+1} + \cdots + a_n b_1 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

or : $\forall k = \overline{1,n}$, $\sqrt{k(n-k+1)} \leq n$ *ce qui implique que* $\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \frac{1}{n}$.
D'où $|C_n| \geq n \times \frac{1}{n} = 1$, *ainsi* $\lim\limits_{n\to+\infty} |C_n| \neq 0$, *ce qui signifie* $\sum\limits_{n\geq 0} C_n$ *diverge.*

2. *On considère la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *qui est une série alternée convergente. Le produit de Cauchy de cette série par elle- même converge aussi, en effet :*

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\right) \times \left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{n\geq 1} C_n,$$