

calcul à la rupture
et analyse limite

Cours de calcul des structures anélastiques

CALCUL À LA RUPTURE ET ANALYSE LIMITE

Jean Salençon

Presses de l'école nationale des
Ponts et chaussées

Jean Salençon,

ingénieur en chef des Ponts et Chaussées et docteur ès sciences, est professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et à l'Ecole Polytechnique. Il est également Directeur scientifique au Laboratoire de Mécanique des Solides de Palaiseau.

Ses recherches sur le calcul des structures anélastiques et sur la théorie et l'application du calcul à la rupture en mécanique des sols, ont fait l'objet de nombreuses publications, thèse, livres, articles scientifiques...

Jean Salençon est membre correspondant de l'Académie des Sciences.

La présentation de ce texte est due à Mme Olivia Fievet et à Mme Marie-Claude Fabre. Les dessins ont été exécutés par M. Patrice Lemattre.

*à la mémoire
de Jean Mandel*

E S S A I

*Sur une application des règles de Maximis & Minimis
à quelques Problèmes de Statique, relatifs à
l'Architecture.*

Par M. COULOMB, Ingénieur du Roi.

I N T R O D U C T I O N.

CE Mémoire est destiné à déterminer, autant que le mélange du Calcul & de la Physique peuvent le permettre, l'influence du frottement & de la cohésion, dans quelques problèmes de Statique. Voici une légère analyse des différens objets qu'il contient.

Après quelques observations préliminaires sur la cohésion, & quelques expériences sur le même objet, l'on détermine la force d'un pilier de maçonnerie; le poids qu'il peut porter, pressé suivant sa longueur; l'angle sous lequel il doit se rompre. Comme ce problème n'exige que des considérations assez simples, qui servent à faire entendre toutes les autres parties de cet Essai, tâchons de développer les principes de la solution.

Si l'on suppose un pilier de maçonnerie coupé par un plan incliné à l'horizon, en sorte que les deux parties de ce pilier soient unies dans cette section, par une cohésion donnée, tandis que tout le reste de la masse est parfaitement solide, ou lié par une adhérence infinie; qu'ensuite on charge ce pilier d'un poids: ce poids tendra à faire couler la partie supérieure du pilier sur le plan incliné, par lequel il touche la partie inférieure. Ainsi, dans le cas d'équilibre, la portion de la pesanteur, qui agit parallèlement à la section, sera exactement égale à la cohésion. Si l'on remarque actuellement, dans le cas de l'homogénéité, que l'adhérence du pilier est réellement égale

1

Essai de Charles Augustin Coulomb

(Archives de l'Académie des Sciences de Paris).

Avant-propos

La formation des ingénieurs de génie civil fait, à maintes reprises, référence au terme de calcul à la rupture pour caractériser certaines méthodes de dimensionnement d'ouvrages : voûtes en maçonnerie, structures métalliques ou en béton, fondations, ouvrages de soutènement, remblais, sont ainsi étudiés par des raisonnements dont les traits communs ne sont pas toujours évidents, mais qui sont issus d'une longue tradition historique.

Il est classique de se référer à Galilée (Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Dialogo secondo, Leyden, 1638) pour donner un premier exemple de raisonnement de calcul à la rupture dans un problème de calcul de structure (poutre console). Le célèbre mémoire de Coulomb (Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques Problèmes de Statique relatifs à l'Architecture, mémoire à l'Académie des Sciences, 1773), apparaît véritablement comme le texte où sont jetées, de façon claire et précise du point de vue mécanique, les bases du calcul à la rupture pour les analyses de stabilité d'ouvrages ressortissant, selon les distinctions actuelles, tant au calcul des structures (résistance d'un pilier, stabilité des voûtes) qu'à la mécanique des sols (poussée des terres). Les références bibliographiques postérieures (mais aussi antérieures) à Coulomb sont nombreuses et montrent l'énergie déployée par les bâtisseurs dans l'emploi d'une méthode de raisonnement qui leur paraissait naturelle mais dont ils ressentaient plus ou moins les lacunes. On pourra, à ce propos, se reporter aux ouvrages très documentés de J. Heyman où l'on trouvera d'excellentes analyses critiques dans le domaine de "l'architecture". En mécanique des sols, les méthodes de calcul à la rupture ont longtemps été les seules employées pour l'analyse des problèmes fondamentaux de poussée et butée des terres, stabilité des pentes, capacité portante des fondations, et sont illustrées par des noms fameux : Berezancew, Caquot, Hill, Kötter, Mandel, Massau, Prandtl, Rankine, Résal, Sokolovski (pour n'en citer que quelques-uns).

L'idée directrice du calcul à la rupture, telle qu'on la trouve déjà dégagée dans l'essai de Coulomb, consiste à analyser la tenue d'un ouvrage en se fondant exclusivement sur des considérations de statique et de résistance (au sens

propre) des matériaux constitutifs : il convient, pour qu'un ouvrage soit stable, d'assurer la compatibilité entre les conditions imposées par son équilibre et les capacités de résistance des matériaux. Une telle démarche se révèle évidemment impuissante à déterminer les efforts intérieurs à l'ouvrage (nous savons maintenant que cette détermination nécessite la connaissance complète du comportement du matériau et, en règle générale, celle des contraintes initiales et de l'histoire du chargement) ; de plus, s'appuyant sur une condition nécessaire, elle ne peut conduire qu'à une présomption de stabilité. Aussi les ingénieurs, préoccupés par cette insuffisance, furent-ils séduits par les succès de la Théorie de l'élasticité au dix-neuvième siècle : c'est l'origine des avatars des méthodes de calcul à la rupture pour les structures, où l'on introduisit des conditions issues de l'élasticité sans que celles-ci fussent toujours cohérentes avec le reste du raisonnement.

La théorie de l'élasto-plasticité a permis, au cours des quarante dernières années d'apporter une réponse au problème non résolu par le calcul à la rupture. C'est l'analyse limite : dans l'hypothèse d'un ouvrage constitué de matériaux élastiques et parfaitement plastiques obéissant au principe du travail plastique maximal, la présomption de stabilité fournie par le calcul à la rupture est transformée en certitude. Ce résultat capital sur le plan théorique justifie donc, dans ce cas, l'emploi des méthodes de calcul à la rupture, particulièrement commodes par la simplicité des raisonnements auxquels elles font appel et des calculs qu'elles nécessitent. Mais il repose sur des hypothèses fortes sur le comportement, qui ne sauraient être que rarement vérifiées par les matériaux réels, et c'est l'expérience qui demeure évidemment le moyen ultime de validation : expérience accumulée au cours des siècles sur des ouvrages classiques, expériences à imaginer et à mettre en oeuvre chaque fois qu'un problème nouveau est abordé.

Le présent livre traite du calcul à la rupture avec le souci de faire apparaître l'unité de pensée existant entre les diverses méthodes d'analyse qui s'y rattachent explicitement ou tacitement, employées essentiellement en génie civil : outre un souci pédagogique, puisque l'ouvrage est issu d'un cours professé à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, il m'a paru qu'une telle présentation synthétique permettrait un enrichissement mutuel de ces méthodes. Cette présentation est rendue possible par la théorie du calcul à la rupture, mise en forme récemment en profitant des possibilités de clarification apportées par les mathématiques.

Il traite aussi de l'analyse limite, dont j'ai indiqué plus haut l'importance, en ayant soin de marquer clairement la valeur ajoutée ainsi au calcul à la rupture, et en évitant toute confusion entre l'un et l'autre. Il est en effet essentiel que le lecteur retienne que les méthodes de calcul à la rupture demeurent, même si les hypothèses nécessaires à l'établissement des théorèmes de l'analyse limite classique ne sont pas satisfaites, et que la validation des résultats obtenus par ces méthodes peut être toute autre. C'est ainsi que le calcul à la rupture conserve tout son intérêt pour peu que l'on soit pleinement conscient de ses limites d'applicabilité et que l'on y mette en œuvre des méthodes d'approche rigoureuses.

Ce texte est le fruit d'un long travail d'approfondissement et de recherche pédagogique, dont la première manifestation explicite fut le cours de D.E.A. que j'enseignai en 1976 à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. Je remercie tous ceux, amis, collègues, et collaborateurs qui m'ont apporté leur aide dans cette réalisation : l'équipe enseignante de calcul des structures anélastiques à l'E.N.P.C. constituée de P. de Buhon, O. Coussy, J. Crouzet, J.M. Delbecq, A. Ehrlacher, T. Foult, B. Halphen et Y. Lescouarc'h pour son grand dévouement ; les Professeurs L. Brun, M. Frémond, A. Friaà, P. Habib, D. Radenkovic, G. Sacchi et M. Save, pour leurs conseils, leurs suggestions et leurs critiques ; A. Carmasol, Z. Khosravi, M. Matar et A. Tristán-López pour leur agréable et fructueuse collaboration dans des recherches récentes ; P. Muller qui a bien voulu me faire bénéficier de ses impressions de lecteur.

La présentation matérielle est fondamentalement l'œuvre de Madame Olivia Fiévet ; Mesdames Marie-Claude Fabre et Brigitte Terrien ont eu la charge des dernières corrections, et Monsieur Patrice Lemattre a réalisé les dessins. Je les remercie à la fois pour leur patience et pour la qualité de leur travail.

Je dédie ce livre à la mémoire de Jean Mandel, en espérant avoir été fidèle à ses enseignements de clarté et de rigueur.

Jean Salençon

sommaire

	page
Présentation	15
Notations	19
CHAPITRE 1 : THÉORIE DU CALCUL À LA RUPTURE	
1 - Introduction.....	23
2 - Chargements « potentiellement supportables » par une structure dans une géométrie donnée	25
3 - Construction de K par l'intérieur.....	39
4 - Approche de K par l'extérieur	43
5 - Combinaison des approches par les contraintes et par les vitesses	61
6 - Tableau récapitulatif	68
7 - Application pratique du calcul à la rupture à l'étude de la tenue des ouvrages	70
8 - Généralisations	80
CHAPITRE II : CRITÈRES DE RÉSISTANCE USUELS ET FONCTIONS $\pi(,)$ CORRESPONDANTES	
1 - Introduction.....	85
2 - Milieu continu tridimensionnel	86
3 - Interfaces entre milieux continus tridimensionnels.....	100
4 - Milieux continus généralisés unidimensionnels	106
5 - Milieux continus généralisés bidimensionnels	116
CHAPITRE III : ANALYSE LIMITE	
1 - Introduction.....	123
2 - Chargement limite d'un système élasto-plastique en géométrie initiale	125
3 - Ruine plastique d'un système en géométrie initiale	133
4 - Chargement d'écoulement plastique libre ; système rigide parfaitement plastique associé à un système élasto-plastique	138
5 - Application à l'étude des problèmes de mise en forme des métaux	147
6 - Théorèmes de Drucker, Radenkovic, Palmer	151
7 - Problèmes relatifs aux sols de Coulomb ($\varphi \neq 0$)	163
8 - Tableau récapitulatif	165
9 - Conclusion	167

CHAPITRE IV : CALCUL À LA RUPTURE ET DIMENSIONNEMENT

1 - Les objectifs de l'étude	171
2 - Exemples simples : structures dont le dimensionnement dépend d'un paramètre	174
3 - Système dont le dimensionnement dépend d'un nombre fini de paramètres.....	180
4 - Théorie du calcul à la rupture pour les systèmes dont le dimensionnement dépend d'un nombre fini de paramètres : approche par l'intérieur	183
5 - Théorie du calcul à la rupture pour les systèmes dont le dimensionnement dépend d'un nombre fini de paramètres : approche par l'extérieur par les vitesses.....	196
6 - Application au dimensionnement des ouvrages.....	200
7 - Approche probabiliste	213

CHAPITRE V : PROBLÈMES PLANS DE CALCUL À LA RUPTURE

1 - Introduction.....	233
2 - Contrainte plane et capacités de résistance	235
3 - Contrainte plane en calcul à la rupture	239
4 - Déformation plane et capacités de résistance	252
5 - Déformation plane en calcul à la rupture	256
6 - Critères et fonctions $\pi(\dots)$ de matériaux usuels, en contrainte plane et en déformation plane.....	271

CHAPITRE VI : EXEMPLES D'APPLICATIONS POUR LE MILIEU CONTINU

1 - Introduction.....	277
2 - Expérience de compression : écrasement d'un bloc entre les plateaux d'une presse	278
3 - Poinçonnement d'un demi-espace	308
4 - Analyse de stabilité d'une fouille verticale.....	325

BIBLIOGRAPHIE

Chapitre I	349
Chapitre II	352
Chapitre III.....	353
Chapitre IV	355
Chapitre V.....	357
Chapitre VI	358
INDEX ALPHABÉTIQUE	363

Présentation

Le livre s'appuie sur la théorie du calcul à la rupture exposée dans le premier chapitre. Partant de l'exemple élémentaire d'une structure sur lequel on dégage les principes fondamentaux du raisonnement du calcul à la rupture, on présente ensuite la formulation générale telle qu'elle peut maintenant être donnée en mettant à profit certains concepts simples couramment utilisés par les mathématiques récentes : formulation synthétique exposée sur le modèle du milieu continu tridimensionnel, qui se révèle aisément transposable par la suite, pour les applications, aux milieux continus généralisés uni- ou bidimensionnels.

L'enseignement principal de cette théorie est que, pour un système soumis à un mode de chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres, la connaissance des capacités de résistance du matériau constitutif permet de borner les chargements supportables par le système : le domaine des chargements potentiellement supportables est défini par la compatibilité entre l'équilibre du système et les capacités de résistance des matériaux qui le constituent. Il peut être déterminé commodément "par l'intérieur" à partir de cette définition, par voie statique (construction de champs de contrainte en équilibre et respectant les capacités de résistance). Il peut aussi être déterminé "par l'extérieur", par voie cinématique : celle-ci, obtenue par dualisation au moyen du principe des puissances virtuelles, fait intervenir la construction de champs de vitesse cinématiquement admissibles, dans lesquels on calcule la puissance des forces extérieures que l'on compare à une puissance caractérisant les capacités de résistance du matériau. Cette puissance apparaît comme un outil mathématique, issu de la définition duale des capacités de résistance du matériau constitutif en chaque point du système, et il est essentiel de retenir, malgré les fortes et fréquentes tentations auxquelles conduiraient certains raisonnements "physiques", qu'elle permet seule d'aboutir à une méthode rigoureuse d'approche par l'extérieur cinématique.

Le reste du livre est consacré à l'application de cette théorie avec le double souci de

fournir au lecteur les moyens de mettre en oeuvre et d'interpréter convenablement les méthodes de calcul à la rupture utilisées dans divers domaines (mécanique des sols, calcul des structures, etc.), qui sont exposées dans de nombreux traités, livres, cours ou articles ;

lui permettre aussi, grâce à cette analyse fondamentale, de développer lui-même des méthodes et des applications nouvelles, souvent par transposition ou par analogie, dans des domaines qu'il se révèle maintenant utile d'étudier.

Aussi, dans le deuxième chapitre, donne-t-on un formulaire original des principaux critères et fonctions duales caractérisant les capacités de résistance des matériaux pour le milieu continu tridimensionnel, les milieux continus généralisés uni- et bidimensionnels, les interfaces.

Muni des éléments contenus dans ces deux premiers chapitres, le lecteur peut, s'il le désire, entreprendre directement la lecture du sixième chapitre où sont étudiés trois exemples typiques d'application dans le cas du milieu continu tridimensionnel ; ceux-ci ont été choisis pour l'intérêt qu'ils présentent par eux-mêmes (problèmes de compression, de poinçonnement, et de stabilité), et pour le caractère représentatif des méthodes employées pour les traiter : celles-ci sont examinées complètement, en en mettant en évidence les difficultés éventuelles, auxquelles on donne des réponses de portée générale.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse limite et fait le lien avec la théorie de l'élasto-plasticité. On y examine la portée supplémentaire donnée aux résultats de la théorie du calcul à la rupture, ainsi que la signification nouvelle des méthodes d'approches par l'intérieur et par l'extérieur, lorsque les capacités de résistance du matériau sont déterminées par un comportement parfaitement plastique standard : ce comportement "très bienveillant" de la part du matériau permet alors d'interpréter le domaine des chargements potentiellement supportables comme un domaine de sécurité pour le système, et la puissance caractérisant les capacités de résistance du matériau n'est autre que la puissance dissipée plastiquement. Ce modèle de comportement idéal, valable pour quelques matériaux, permet donc de justifier pour ceux-ci, par l'analyse théorique, l'utilisation du calcul à la rupture dans le dimensionnement des ouvrages. Hors de cette circonstance, soit que le comportement connu du matériau ne satisfasse pas toutes les conditions requises pour l'établissement des puissants théorèmes de l'analyse limite, soit même que l'on ne dispose pas d'une connaissance suffisamment précise de ce comportement, c'est à l'expérience que l'on aura recours pour la validation de cette approche du dimensionnement.

C'est de cet aspect du dimensionnement des ouvrages que traite le quatrième chapitre. On y introduit, d'abord sur l'exemple simple d'une structure, puis dans le cas général d'un système étudié dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel, le concept de paramètres de dimensionnement. Ceci permet alors de développer la théorie du calcul à la rupture en envisageant simultanément les points de vue du dimensionnement et du chargement du système, débouchant ainsi sur deux domaines d'application essentiels : l'optimisation du dimensionnement et l'approche probabiliste du calcul à la rupture.

Le cinquième chapitre, plus théorique, peut sembler rompre avec le parti pédagogique adopté dans le reste du livre : aucun exemple ne vient introduire cette analyse des problèmes plans de calcul à la rupture ; en fait le lecteur trouvera, pour ce qui concerne les problèmes de calcul à la rupture en déformation plane, ces exemples d'application dans le sixième chapitre où ils sont analysés à la fois des points de vue tri- et bidimensionnel. L'objet de ce cinquième chapitre est de poser rigoureusement, et de manière définitive pour le lecteur, les problèmes plans de calcul à la rupture : en effet, s'il est clair qu'il n'existe pas de problème purement bidimensionnel pour un système étudié dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel, il est également évident que, dans certains cas, la résolution des problèmes posés pour un tel système se ramène à celle de problèmes homologues posés pour un système bidimensionnel dans le formalisme du milieu continu bidimensionnel. On examine ainsi les problèmes de calcul à la rupture en contrainte plane et en déformation plane. C'est l'introduction nécessaire à l'étude et à l'utilisation de la théorie des équilibres limites plans à laquelle ont été consacrés de nombreux ouvrages.

Ainsi conçu ce livre s'adresse aux étudiants, aux élèves des écoles d'ingénieurs, aux ingénieurs et aux chercheurs, suivant la lecture qui en est faite. Il comporte en particulier une bibliographie importante, classée par chapitre, qui sans prétendre à l'exhaustivité vise à fournir aux uns les références d'excellents ouvrages où ils trouveront l'exposé des méthodes classiques qui n'ont volontairement pas été présentées ici, et aux autres les textes qui peuvent constituer le point de départ d'une recherche.

Notations

- Les vecteurs sont représentés par une lettre soulignée d'un trait ;
exemple : \underline{v} , \underline{T} , \underline{Q} , $\dot{\underline{q}}$
- Les tenseurs sont représentés par une lettre soulignée d'un nombre de traits égal à leur ordre. Il n'est pas fait de distinction de notation suivant la variance ; exemple : $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{d}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\Lambda}}$
- La dérivation par rapport au temps est représentée par un point sur la grandeur considérée ; exemple : $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$, $\dot{\underline{\underline{d}}}$
- Sauf mention explicite du contraire, on utilise la convention de sommation sur les indices muets
- Le produit simplement contracté de deux tenseurs est symbolisé par un point entre ceux-ci : $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{d}}$ représente le tenseur de composantes $\sigma_{ih}^d d_{hj}$
- Le symbole tr représente l'opération "trace" pour un tenseur du 2nd ordre : $\text{tr} \underline{\underline{d}}$ est le scalaire d_{ii}
- Le produit doublement contracté de deux tenseurs est représenté par le symbole : placé entre les lettres correspondantes. Exemple : $\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur du 2nd ordre de composantes $\Lambda_{ijkh} \sigma_{kh}$; $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$ est le scalaire $\sigma_{ij}^d d_{ji}$ également égal à $\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{d}})$, et on utilisera d'ailleurs indifféremment les deux notations pour représenter le produit doublement contracté de deux tenseurs du 2nd ordre
- Le tenseur, gradient d'une fonction scalaire f par rapport à un tenseur du 2nd ordre sera noté $\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$; il a pour composantes :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right)_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ji}}$$

Selon l'usage de la mécanique des milieux continus, les contraintes sont comptées positivement en traction ; cela signifie que la normale positive à une facette est la normale sortante. Les déformations sont positives en extensions c'est-à-dire que le tenseur vitesse de déformation $\underline{\underline{d}}$ est la partie symétrique du gradient de la vitesse.

chapitre I

*Théorie du
calcul à la rupture*

1 - INTRODUCTION

Sans méconnaître les difficultés et les problèmes de frontière que peut soulever une telle distinction, on peut dire que l'activité de l'ingénieur-construc-
teur comporte notamment deux aspects : la conception des ouvrages et leur dimension-
nement.

Certes l'aspect "dimensionnement" est présent à l'esprit du projeteur
dès qu'il imagine l'ouvrage, qu'il en dégage les grandes lignes, qu'il en fixe la
géométrie, mais il se manifeste de façon essentielle par la vérification qui doit
être faite pour s'assurer que l'ouvrage proposé supportera effectivement les condi-
tions qui lui sont imposées.

Bien souvent la vérification à effectuer demeure quasi-statique et
prend la forme suivante : dans la géométrie fixée pour l'ouvrage on doit s'assurer
que les charges appliquées, fixées de manière déterministe par les conditions natu-
relles et par des spécifications réglementaires seront supportées par l'ouvrage,
compte tenu des caractéristiques des matériaux qui le constituent. Ce type de pro-
blèmes se rencontre typiquement aussi bien pour des structures que pour des ouvra-
ges en terre.

Le *calcul à la rupture* est certainement le mode de raisonnement le
plus anciennement utilisé pour tenter d'y apporter une réponse et qui, de plus,
s'est toujours révélé un guide précieux dès le stade de la conception. C'est ce
mode de raisonnement que l'on trouve aussi bien chez Galilée (1638), que chez
Coulomb (1773), Culmann (1866), et qui est à la base de l'épure de Méry (1840),
des règles de descente de charges, etc.

Une formulation générale est maintenant possible qui met en évidence
les rapports entre toutes ces méthodes en en dégageant les hypothèses fondamentales
et en en précisant ainsi la portée.

Le calcul à la rupture s'appuie sur la connaissance de la géométrie
du système donné, du mode de chargement qui lui est appliqué, et des capacités de
résistance des matériaux constitutifs : ceci constitue en quelque sorte le "règle-
ment" du calcul, et on écrit qu'une condition *nécessaire* pour que la "stabilité"

ou la tenue de l'ouvrage soit assurée est qu'il y ait *compatibilité entre les équations, exprimant l'équilibre quasi-statique et les conditions imposées par les capacités de résistance*. De là on déduit une approche directe "statique" permettant de déterminer les chargements pour lesquels il y a "stabilité potentielle" de l'ouvrage dans les conditions imposées ; par dualisation mathématique au moyen du principe des puissances virtuelles on met en évidence une approche "cinématique" permettant de déterminer commodément des chargements pour lesquels "l'instabilité" de l'ouvrage dans les conditions indiquées est certaine. A la première de ces approches ressortissent les méthodes de descentes de charges, à la seconde les méthodes de mécanismes ou d'équilibres partiels, telles que la méthode dite du "prisme de Coulomb", etc.

Nous nous proposons dans ce chapitre de présenter d'abord sur l'exemple simple d'une structure réticulée puis dans le cas général, les concepts de chargement "potentiellement supportable" et de "stabilité potentielle". La condition même de compatibilité entre l'équilibre et les capacités de résistance constitue la propriété caractéristique de ces chargements et permet donc la construction point par point de l'ensemble des chargements potentiellement supportables. On montrera ensuite comment, par dualité, il est possible de prouver aisément l'incompatibilité "équilibre-capacités de résistance", approchant ainsi par l'extérieur l'ensemble des chargements potentiellement supportables. Ces propriétés sont indépendantes de la forme du critère définissant les capacités de résistance.

On étudiera plus particulièrement les cas où le domaine de résistance du matériau constitutif est étoilé ou convexe en tout point du système, mettant en évidence les propriétés supplémentaires obtenues alors.

Enfin, on exposera les applications pratiques de ces concepts, notamment par l'introduction de la notion de coefficient de rupture d'un ouvrage sous un chargement donné.

2 - CHARGEMENTS "POTENTIELLEMENT SUPPORTABLES" PAR UNE STRUCTURE
DANS UNE GÉOMETRIE DONNÉE

2.1 - EXEMPLE

A titre d'exemple nous étudions d'abord la structure réticulée représentée à la figure 1 : cadre carré ABCD avec ses deux diagonales, articulé aux quatre sommets. Cette structure est soumise au mode de chargement dépendant du paramètre Q, défini par deux forces égales et opposées d'intensité Q appliquées en A et C.

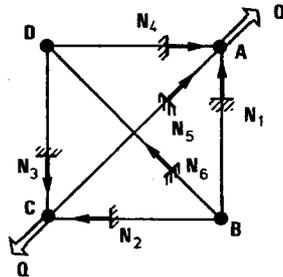


Figure 1 : Cadre à six barres ⁽¹⁾

Les capacités de résistance, identiques pour chacune des barres constituant ce système sont définies comme suit :

les efforts N_i dans chacune des barres doivent rester compris entre les valeurs $+L$ (traction) et $-L$ (compression) :

$$(2.1) \quad |N_i| \leq L, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 6;$$

la contrainte généralisée $\Sigma = N$ est astreinte à demeurer dans le domaine $(-L, +L)$, dans chacune des barres.

La question posée est alors de savoir, pour une valeur donnée du paramètre Q, si la structure sera "stable" sous le chargement compte tenu de la condition (2.1).

Pour qu'il en soit ainsi, il est clair qu'il faut que le système formé par les équations d'équilibre quasi-statique de la structure et les conditions (2.1) soit possible, c'est-à-dire ait au moins une solution :

⁽¹⁾ Nous reprenons ici ce petit système hyperstatique utilisé à maintes reprises par J. Mandel pour illustrer ses travaux.

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Structure "stable" sous } Q \\ \Downarrow \\ \text{Compatibilité } \left\{ \begin{array}{l} \text{équilibre quasi-statique sous } Q \\ \text{capacités de résistance} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

S'agissant seulement d'une condition nécessaire de "stabilité" nous dirons qu'une structure pour laquelle cette condition est satisfaite est *potentiellement stable* sous le chargement Q dans la géométrie donnée :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Structure "potentiellement stable" sous } Q \\ \Updownarrow \\ \text{Compatibilité } \left\{ \begin{array}{l} \text{équilibre quasi-statique sous } Q \\ \text{capacités de résistance} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On dira aussi que le chargement Q est *potentiellement supportable* par la structure dans la géométrie donnée sous les conditions indiquées.

Plus précisément ici :

les équations d'équilibre quasi-statique s'obtiennent en écrivant l'équilibre des noeuds A, B, C, D. Il vient sans difficulté :

$$(2.4) \quad N_1 = N_2 = N_3 = N_4 ;$$

on pose alors pour simplifier :

$$N_1 = T, \quad N_5 = U, \quad N_6 = V,$$

et il reste encore à écrire deux équations d'équilibre :

$$(2.5) \quad U + T \sqrt{2} = Q,$$

$$(2.6) \quad V + T \sqrt{2} = 0.$$

D'où l'expression mathématique de (2.3) :

$$(2.5) \quad \begin{array}{l} \text{Structure "potentiellement stable" sous } Q \\ \Updownarrow \\ U + T \sqrt{2} = Q \\ (2.6) \quad V + T \sqrt{2} = 0 \\ (2.7) \quad |T| \leq L, \quad |U| \leq L, \quad |V| \leq L \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} U + T \sqrt{2} = Q \\ V + T \sqrt{2} = 0 \\ |T| \leq L, \quad |U| \leq L, \quad |V| \leq L \end{array}} \right\} \text{ sont compatibles.}$$

Les équations (2.5) et (2.6) permettant d'exprimer U et V en fonction du paramètre de chargement Q et de T choisie comme inconnue hyperstatique, les conditions (2.7) délimitent dans le plan (T, Q) de la figure 2, un domaine H , intersection de trois bandes, dont la signification est la suivante : (2.5) à (2.7) sont compatibles pour une valeur Q s'il existe au moins une valeur de T telle que le point (T, Q) soit dans ce domaine H .

Ainsi les chargements "potentiellement supportables" pour la structure sont donc tous les chargements situés sur le segment K projection de H sur l'axe Q :

$$K = (-2L, +2L).$$

La structure est "potentiellement stable" si $Q \in (-2L, +2L)$; son "instabilité" est certaine pour tout chargement supérieur à $2L$ (ou inférieur à $-2L$), c'est-à-dire qu'il n'est pas possible alors d'assurer l'équilibre quasi-statique du système en respectant les conditions de résistance.

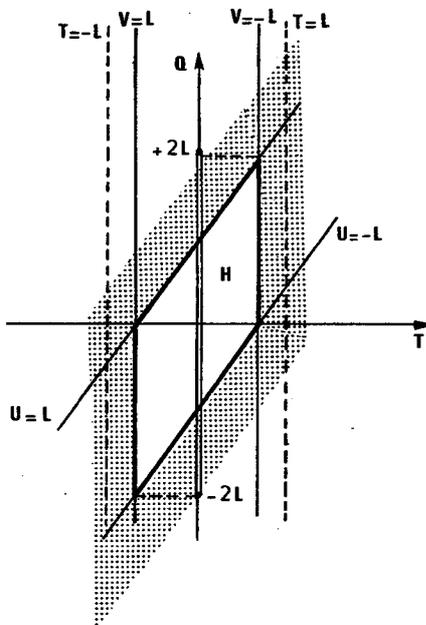


Figure 2 : Chargements "potentiellement supportables" par la structure de la figure 1.

On remarquera que, même si le domaine $(-L, +L)$ assigné à la contrainte généralisée représente le domaine de résistance de l'élément, ce qui signifie que tout effort N tel que $-L \leq N \leq L$ sera supporté sans dommage par les barres, il n'est pas possible d'affirmer que tout chargement Q tel que $-2L \leq Q \leq 2L$, sera lui-même supporté sans dommage par la structure.

2.2 - FORMULATION GÉNÉRALE

2.2.1 - INTRODUCTION

On se propose maintenant de présenter de façon générale le concept de chargement "potentiellement supportable" qui a été évoqué ci-dessus. Pour cela, on raisonne pour fixer les idées sur un système mécanique en se plaçant dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel :

$\underline{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes (de Cauchy),
 \underline{d} le tenseur des vitesses de déformation ;
 $(\underline{\sigma} : \underline{d})dV$ est donc la puissance de déformation pour l'élément dV du milieu continu.

La théorie qui sera présentée sera, en fait, valable quelle que soit la modélisation adoptée, à condition de remplacer $\underline{\sigma}$ et \underline{d} par les grandeurs homologues, contraintes et vitesses de déformation généralisées, Σ et Δ .

2.2.2 - MODE DE CHARGEMENT DÉPENDANT DE n PARAMÈTRES

La théorie du calcul à la rupture trouve une expression simple et efficace lorsque l'on considère un système soumis à un mode de chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres ; c'est donc dans ce cadre qu'elle sera ici présentée. Aussi est-il nécessaire au préalable d'introduire le concept de mode de chargement dépendant de n paramètres par ses définitions et propriétés essentielles ; une présentation plus fouillée de ces notions pourra être trouvée dans (Salençon et Halphen, 1981).

L'état des sollicitations imposées au système étudié, dans une géométrie donnée, est défini par les forces de masse données dans le volume V du système et les données aux limites. Ces dernières portent sur les composantes T_{λ} et v_{λ} des vecteurs contrainte \underline{T} et vitesse \underline{v} en chaque point du contour $S = \partial V$ du système (3 composantes orthogonales complémentaires : $\lambda = 1,2,3$).

On a affaire à un mode de chargement à n paramètres si toutes ces données dépendent linéairement de n paramètres de la façon suivante :

■ On définit les champs de contrainte *statiquement admissibles* dans le mode de chargement étudié :

ce sont les champs $\underline{\sigma}$ qui satisfont les conditions aux limites sur les contraintes et les équations d'équilibre pour un état de sollicitation du mode étudié.

On désigne par S l'ensemble de ces champs.

■ On définit les champs de vitesse *cinématiquement admissibles* dans le mode de chargement étudié :

ce sont les champs \underline{v} qui satisfont les conditions aux limites sur les vitesses pour un état de sollicitation du mode étudié.

On désigne par C l'ensemble de ces champs.

■ On définit les *champs d'autocontrainte* dans le mode de chargement étudié: ce sont les champs de contrainte statiquement admissibles dans le mode et dont la puissance est nulle dans tout champ de vitesse cinématiquement admissible dans le mode. On désigne par A l'ensemble des champs d'autocontrainte : c'est un espace vectoriel.

$$\int_V [\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} \begin{array}{c} \underline{\sigma} \in A \\ \updownarrow \\ \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket \end{array} \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) d\Sigma = 0, \quad \forall \underline{v} \in C \quad (1)$$

■ On définit les *champs "d'autodéformation"* dans le mode de chargement étudié :

ce sont les champs de vitesse cinématiquement admissibles dans le mode et tels que la puissance de tout champ de contrainte statiquement admissible dans le mode y soit nulle.

On désigne par D l'ensemble des champs d'autodéformation : c'est un espace vectoriel.

$$\int_V [\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} \begin{array}{c} \underline{v} \in D \\ \updownarrow \\ \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket \end{array} \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) d\Sigma = 0, \quad \forall \underline{\sigma} \in S$$

■ Alors, on dit que le système est soumis à un mode de chargement à n paramètres si S est un espace vectoriel et si l'espace quotient S/A est de dimension n .

(1) \underline{d} est le champ de vitesse de déformation dérivé de \underline{v} .

Σ représente l'ensemble des surfaces de discontinuité du champ \underline{v} dans V ;

$\underline{n}(\underline{x})$ est la normale à Σ au point \underline{x} , et $\llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket$ la discontinuité de \underline{v} en ce point.

Dans ce cas, le principe des puissances virtuelles peut se mettre sous la forme :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{\sigma} \in S \quad \text{et} \quad \forall \underline{v} \in C \quad \text{on a :} \\ \int_V [\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) d\Sigma = \\ = Q_j(\underline{\sigma}) \cdot \dot{q}_j(\underline{v}) = \underline{Q}(\underline{\sigma}) \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \end{array} \right.$$

où $\underline{Q}(\underline{\sigma}) \in \{\underline{Q}\}$ isomorphe à \mathbb{R}^n , et dépend linéairement de $\underline{\sigma}$
et $\dot{\underline{q}}(\underline{v}) \in \{\dot{\underline{q}}\}$ isomorphe à \mathbb{R}^n , et dépend linéairement de \underline{v} .

Par commodité d'écriture dans toute la suite (chaque fois que cela ne risquera pas d'entraîner des confusions) on identifiera $\{\underline{Q}\}$ à \mathbb{R}^n ainsi que $\{\dot{\underline{q}}\}$; on ne devra toutefois pas perdre de vue que \underline{Q} et $\dot{\underline{q}}$ sont en réalité des grandeurs physiques dimensionnées.

\underline{Q} est appelé "chargement" du système. Ses composantes Q_j sont les paramètres de chargement, et l'espace correspondant est l'espace des paramètres de chargement. $\dot{\underline{q}}$ est la "vitesse de déformation" du système.

■ On remarque que la définition donnée plus haut est équivalente à la suivante : le système est soumis à un mode de chargement à n paramètres si C est un espace vectoriel et si l'espace quotient C/D est de dimension n .

Les cas les plus couramment rencontrés pour les paramètres de chargement Q_j sont :

- paramètre d'intensité pour les forces de masse ;
- paramètre d'intensité pour une pression uniformément répartie agissant sur une partie du contour ;
- éléments de réduction (composantes de la résultante et du moment en un point) des efforts exercés sur une partie du contour par un solide indéformable.

En pratique, pour mettre en évidence qu'un système est soumis à un mode de chargement dépendant de n paramètres, on montrera que le principe des puissances virtuelles se met sous la forme (2.8) : n , nombre de paramètres de chargement, sera obtenu comme étant la dimension de l'espace vectoriel image de S par l'application linéaire $\underline{\sigma} \mapsto \underline{Q}$.

■ Examinons maintenant deux exemples .

a) Soit le demi-espace tridimensionnel $z < 0$ à la surface duquel est exercée (par l'intermédiaire d'une membrane parfaitement souple par exemple) une pression uniforme p sur une aire a du plan Oxy (figure 3).

Les conditions aux limites sont de type classique :

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à l'infini} : v_x = v_y = v_z = 0 \\ \text{sur (Oxy - } a) : T_x = T_y = T_z = 0 \\ \text{sur } a : T_x = T_y = 0, \quad T_z = -p. \end{array} \right.$$

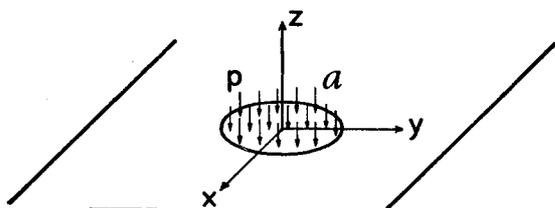


Figure 3 : Mode de chargement dépendant du paramètre p , pression normale exercée sur a .

Ces données définissent un mode de chargement dépendant du paramètre p . Un champ de contrainte $\underline{\sigma}$ est statiquement admissible pour ce mode de chargement s'il est en équilibre et satisfait les conditions aux limites sur les T_i pour une valeur de p . Un champ de vitesse \underline{v} est cinématiquement admissible s'il satisfait les conditions aux limites sur les v_i . On a :

$$(2.10) \quad Q = p, \quad \dot{q} = - \int_a v_z dS$$

puisque le théorème des puissances virtuelles appliqué à deux champs $\underline{\sigma}$ et \underline{v} quelconques du type ci-dessus s'écrit :

$$(2.11) \quad \int_V [\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} [\underline{v}(\underline{x})] \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) d\Sigma = - \int_a p v_z dS.$$

b) Soit le demi-espace tridimensionnel $z < 0$ à la surface duquel agit un poinçon lisse de section a .

Les données aux limites sont les suivantes :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à l'infini} : v_x = v_y = v_z = 0 \\ \text{sur (Oxy - } a) : T_x = T_y = T_z = 0 \\ \text{sur } a : \left\{ \begin{array}{l} T_x = T_y = 0 \\ v_z = -\lambda - \alpha x + \beta y. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où λ, α, β sont trois paramètres.

Ces données définissent un mode de chargement dépendant de trois paramètres. Un champ de contraintes $\underline{\sigma}$ est statiquement admissible dans ce mode s'il satisfait les conditions aux limites sur les T_i . Un champ de vitesse \underline{v} est cinématiquement admissible s'il satisfait les conditions à l'infini et sur α pour un triplet de valeurs de λ, α, β .

λ, α, β définissent la vitesse de déformation du système :

$$(2.13) \quad \begin{cases} \dot{\underline{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \\ \dot{q}_1 = \lambda, \quad \dot{q}_2 = \alpha, \quad \dot{q}_3 = \beta . \end{cases}$$

Le principe des puissances virtuelles appliqué à deux champs $\underline{\sigma}$ et \underline{v} du type ci-dessus s'écrit :

$$(2.14) \quad \int_V [\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} [[\underline{v}(\underline{x})]] \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) d\Sigma = \lambda N + \alpha M + \beta L$$

en posant :

$$(2.15) \quad \int_{\alpha} T_z dS = -N, \quad \int_{\alpha} y T_z dS = L, \quad \int_{\alpha} x T_z dS = -M .$$

Les paramètres de chargement du mode considéré sont donc :

$$(2.16) \quad Q_1 = N, \quad Q_2 = M, \quad Q_3 = L ;$$

ce sont la résultante et les composantes du moment en 0 des actions exercées par le poinçon sur le demi-espace (figure 4).

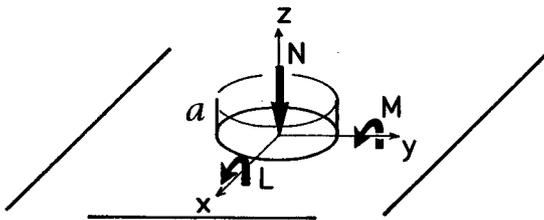


Figure 4 : Mode de chargement dépendant des paramètres N, L, M , éléments de réduction des efforts exercés par le poinçon lisse.

2.2.3 - DOMAINE ADMISSIBLE POUR LES CONTRAINTES

Les capacités de résistance du matériau sont définies en chaque point \underline{x} du système par la donnée du domaine admissible pour les contraintes ; c'est un domaine invariable, c'est à dire indépendant du temps et des sollicitations subies, que nous désignerons par $G(\underline{x})$:

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en tout point } \underline{x} \text{ de } V \text{ (dans la géométrie fixée pour le} \\ \text{système),} \\ \text{est donné } G(\underline{x}) \text{ domaine fermé invariable de } \mathcal{R}^6 \text{ tel que :} \\ 1^\circ \underline{\sigma}(\underline{x}) \notin G(\underline{x}) \text{ est impossible,} \\ 2^\circ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \text{ est permis.} \end{array} \right.$$

En règle générale $G(\underline{x})$ possède les propriétés suivantes :

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ G(\underline{x}) \text{ contient l'état de contrainte nul :} \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) = 0 \in G(\underline{x}) \quad ; \end{array} \right.$$

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2^\circ G(\underline{x}) \text{ est étoilé de centre } 0 : \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \Rightarrow \forall \alpha \in (0,1) \quad , \quad \alpha \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad . \end{array} \right.$$

De plus $G(\underline{x})$ est souvent convexe mais ce n'est pas une règle générale.

2.2.4 - CHARGEMENT POTENTIELLEMENT SUPPORTABLE PAR LE SYSTÈME

DANS UNE GÉOMÉTRIE DONNÉE

Le système étant étudié dans une géométrie fixée, dans un mode de chargement dépendant de n paramètres Q_j , la question est de savoir si ce système sera "stable" sous un chargement donné $\underline{Q} \in \mathcal{R}^n$; ou encore : déterminer dans \mathcal{R}^n l'ensemble des chargements \underline{Q} sous lesquels le système sera "stable".

La démarche est alors identique à celle suivie dans l'étude de l'exemple au § 2.1 :

une condition nécessaire de "stabilité" est évidemment :

$$(2.20) \quad \text{compatibilité} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{équilibre quasi-statique sous } \underline{Q} \\ \text{capacités de résistance du matériau} \end{array} \right.$$

Si (2.20) est satisfaite on dira que le système est "potentiellement stable" sous \underline{Q} ou encore que \underline{Q} est un chargement "potentiellement supportable" par le système dans les conditions indiquées.

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{système "potentiellement stable" sous } \underline{Q} \\ \Downarrow \\ (2.20) \end{array} \right.$$

2.2.5 - L'ENSEMBLE K DES CHARGEMENTS "POTENTIELLEMENT SUPPORTABLES"

La condition (2.21) s'écrit plus précisément :

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{Q} \text{ "potentiellement supportable"} \\ \Downarrow \\ \exists \underline{\sigma} \text{ statiquement admissible dans le mode de chargement,} \\ \text{équilibrant } \underline{Q}, \text{ et tel que :} \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in V. \end{array} \right.$$

Reprenant les notations du § 2.2.2, on désigne par L l'application linéaire de S dans \mathcal{R}^n qui, à $\underline{\sigma}$ statiquement admissible dans le mode de chargement, fait correspondre le chargement \underline{Q} qu'il équilibre. Le noyau de cette application, en général non bijective, ⁽¹⁾ est l'espace vectoriel A des champs d'auto-contrainte dans le mode : $A = L^{-1}(0)$

$$S \xrightarrow{L} \{Q\} = \mathcal{R}^n .$$

⁽¹⁾ Elle est bijective dans le cas d'une structure isostatique considérée du point de vue des contraintes généralisées.

D'où pour exprimer (2.22) :

$$(2.23) \quad \begin{array}{c} \underline{Q} \\ \text{"potentiellement} \\ \text{supportable"} \end{array} \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{\sigma} \in L^{-1}(\underline{Q}) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in V. \end{array} \right.$$

Désignons par H , l'ensemble des champs de contrainte $\underline{\sigma}$, statiquement admissibles dans le mode, et tels que $\underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in V$:

$$(2.24) \quad H = \left\{ \underline{\sigma} : \underline{\sigma} \in S \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in V \right\}$$

Il est clair alors, que l'ensemble K des chargements potentiellement supportables est :

$$(2.25) \quad K = L(H).$$

2.2.6 - ÉTUDE DE K

Compte tenu de la linéarité de L et du fait que S est un espace vectoriel, on tire sans difficulté les conclusions suivantes :

1° Si, $\forall \underline{x} \in V$, $0 \in G(\underline{x})$

(règle générale, comme indiqué au § 2.2.3)

alors K contient le chargement nul :

$$(2.26) \quad \underline{Q} = 0 \in K ;$$

2° Si $\forall \underline{x} \in V$, $G(\underline{x})$ est étoilé de centre 0

(règle générale, comme indiqué au § 2.2.3)

alors K est étoilé de centre 0 (figure 5a) :

$$(2.27) \quad \underline{Q} \in K \implies \forall \alpha \in (0,1), \alpha \underline{Q} \in K$$

3° Si, $\forall \underline{x} \in V$, $G(\underline{x})$ est convexe

alors K est convexe (figure 5b).

Les démonstrations de ces propositions sont immédiates en considérant les propriétés de H ⁽¹⁾.

(¹) Par contre, on remarquera que, bien que $G(\underline{x})$ soit par hypothèse fermé, il n'en résulte pas nécessairement que H et K sont fermés. Nous désignerons par \bar{K} l'adhérence de K .

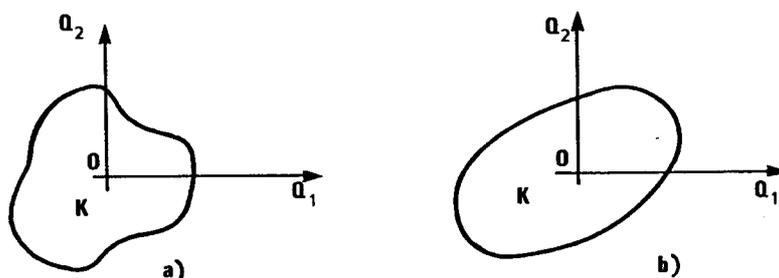


Figure 5 : Domaine des chargements "potentiellement supportables" dans le cas où $\{Q\} = \mathbb{R}^2$; a) domaine étoilé de centre 0, b) domaine convexe.

2.3 - RÉSUMÉ ET COMMENTAIRES

2.3.1 - Il apparait ainsi que la seule hypothèse de l'existence d'un domaine invariable définissant les capacités de résistance, en chaque point, du matériau constituant le système implique, dans l'espace des chargements, l'existence d'un domaine K délimitant la "stabilité potentielle" du système dans la géométrie fixée : on peut affirmer que le système sera instable, dans cette géométrie, sous tout chargement extérieur à K .

Dans l'exemple du § 2.1, K était le segment $-2L \leq Q \leq 2L$.

Il convient de remarquer que, en l'absence d'hypothèses complémentaires, K constitue l'information la plus élaborée que l'on puisse obtenir, au niveau des chargements, à partir de l'information connue au niveau du matériau constitutif.

La frontière de K délimite les potentialités de "stabilité" du système au sens indiqué au § 2.3.1. Les chargements appartenant à cette frontière seront désignés par le terme de "chargements extrêmes".

2.3.2 - La notion de matériau constitutif est ici à prendre au sens large : il s'agit non seulement du matériau constitutif au sens classique mais en outre, lorsque l'on a affaire à plusieurs solides, des interfaces de contact entre ces solides. En chaque point de celles-ci la condition de frottement, c'est à dire la partie de la condition aux limites qui restreint le vecteur contrainte agissant en ce point sur l'interface, définit les capacités de résistance (portant sur $\underline{\sigma}(x)$).

A titre d'exemple, en un point d'une interface de normale \underline{n} avec condition aux limites du type "frottement de Coulomb", la condition de frottement s'écrit en décomposant le vecteur contrainte \underline{T} en composantes normale σ et tangentielle τ (figure 6) :

$$(2.28) \quad |\tau| \leq -\sigma \operatorname{tg} \varphi ;$$

d'où en exprimant σ et τ en fonction du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ et de \underline{n} , le domaine $G(\underline{x})$ pour $\underline{\sigma}$ en ce point, qui dépend de \underline{n} :

$$(2.29) \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \iff -\underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \geq |\underline{\sigma} \cdot \underline{n}| \cos \varphi$$

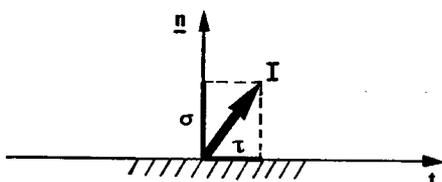


Figure 6 :
Interface entre deux solides.

2.3.3 - Il est clair que si l'on considère deux systèmes géométriquement identiques, soumis au même mode de chargement, distingués par les exposants ' et '' et tels que l'on ait :

$$\forall \underline{x} \in V \quad , \quad G'(\underline{x}) \subset G''(\underline{x}) \quad ,$$

alors les domaines de "stabilité potentielle" K' et K'' vérifient la propriété :

$$K' \subset K'' \quad .$$

En conséquence immédiate de ce résultat :

en règle générale, en l'absence de force de masse, si l'on retranche de la matière à un système, on restreint son domaine de stabilité potentielle dans tout mode de chargement : retrancher de la matière revient en effet à considérer que dans les régions intéressées $G(\underline{x})$ se réduit au seul tenseur $\underline{\sigma} = 0$ qui, comme on l'a dit au § 2.2.3, est en règle générale contenu dans le $G(\underline{x})$ du matériau constitutif ; si le chargement comporte des forces de masse il n'est plus possible de conclure car en retranchant de la matière on modifie aussi le chargement.

2.3.4 - Le concept de mode de chargement dépendant de n paramètres, tel que nous l'avons introduit et utilisé ci-dessus, semble exclure la possibilité de forces imposées constantes. En fait, il n'en est rien, puisqu'il suffit de considérer ces forces comme variables, (proportionnellement à un même $(n + 1)$ -ème paramètre), puis de les fixer à la valeur prescrite. On a alors affaire à la théorie précédente vis-à-vis des $(n + 1)$ paramètres, d'où le domaine K_{n+1} dans \mathcal{R}^{n+1} ; son intersection avec la variété linéaire d'équation $Q_{n+1} = Q_{n+1}^0$ (valeur correspondant aux forces constantes imposées) donne, par projection sur le sous-espace vectoriel $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ des n paramètres effectifs, le domaine K cherché. Mais il est clair que ce domaine K ne possèdera plus nécessairement les propriétés 1° et 2° du § 2.2.6.

3 - CONSTRUCTION DE K PAR L'INTÉRIEUR

3.1 - CONSTRUCTION PAR L'INTÉRIEUR

Comme on y a insisté, le concept de chargement potentiellement supportable est basé sur la nécessaire compatibilité entre l'équilibre quasi-statique du système et les capacités de résistance du matériau constitutif (cf (2.21)).

Ceci permet la construction de l'ensemble K au moyen des formules (2.24) et (2.25) : on construit K par l'intérieur, point par point, en application de la condition suffisante contenue dans (2.23).

Compte tenu des propriétés généralement vérifiées par K (1° et 2° du § 2.2.6), à savoir :

K contient le chargement nul,

K est étoilé de centre 0,

il est commode pour cette construction, de procéder par trajets de charge radiaux. Cela signifie que l'on explore K le long des rayons vecteurs issus de 0. Sur chacun d'eux la détermination du chargement extrême s'écrit comme un problème de maximisation :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{Q}^1 \text{ donné } \neq 0 \\ \text{Maximiser } \lambda \geq 0 \\ \text{tel que :} \\ \exists \underline{\sigma} \in H \text{ en équilibre avec} \\ \underline{Q}^\lambda = \lambda \underline{Q}^1 \end{array} \right.$$

C'est ce que schématise la figure 7.

Cette maximisation peut se faire exactement ou de façon approchée selon les cas : en fait, sauf quelques cas exceptionnels, elle ne peut être menée à bien, aisément, que pour les structures, telles que structures réticulées, structures à barres fléchies avec chargements simples. Dans les autres cas, on doit, le plus

souvent se contenter d'une maximisation approchée : on considère quelques formes de champs $\underline{\sigma}$ de $L^{-1}(Q^1)$, et l'on cherche, pour chacune de ces formes, à maximiser λ tout en faisant en sorte que $\lambda \underline{\sigma}$ respecte le critère de résistance en tout point. La qualité du résultat dépendra donc évidemment du raffinement des formes de champs étudiées.

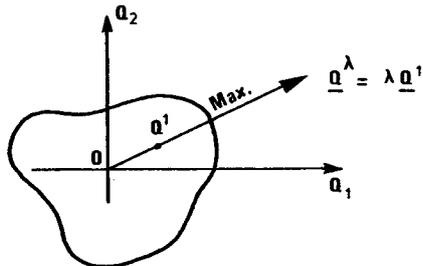


Figure 7 :
Construction de K par trajets de charge radiaux.

3.2 - CAS DU MODE DE CHARGEMENT A UN PARAMÈTRE

On remarque que lorsque l'on a affaire à un système dans un mode de chargement à un paramètre, K est un segment de \mathcal{R} , qui contient l'origine. Les chargements extrêmes sont les extrémités Q^+ et Q^- de ce segment, que l'on détermine respectivement par les problèmes 3.2 a) et b) :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q^1 \text{ donné } > 0 \\ \begin{array}{ll} \text{a) } & \text{b) } \\ \text{maximiser } \lambda & \text{minimiser } \lambda \end{array} \\ \text{tel que :} \\ \exists \underline{\sigma} \in H, \text{ en équilibre avec } Q^\lambda = \lambda Q^1 \end{array} \right.$$

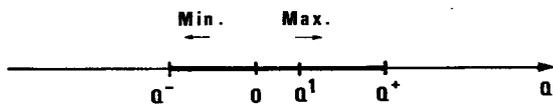


Figure 8 : Système dans un mode de chargement à un paramètre : détermination de Q^+ et Q^- .

3.3 - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR SI K EST CONVEXE

On sait que, si $\forall \underline{x} \in V$ $G(\underline{x})$ est convexe, K est convexe (3° du § 2.2.6). Dans ce cas, ce qui a été dit ci-dessus demeure évidemment valable si $G(\underline{x})$ contient 0. De plus, la construction de K devient beaucoup plus aisée.

En effet, on sait par (2.23) que si on peut construire un champ de contrainte $\underline{\sigma} \in H$, alors le chargement \underline{Q} qui lui correspond est dans K . Supposons que l'on ait ainsi mis en évidence n chargements \underline{Q}^j dans K , la convexité de K permet d'affirmer que l'enveloppe convexe de ces chargements constitue une approximation par l'intérieur de la frontière de K . C'est ce que représente la figure 9 dans le cas d'un mode de chargement à deux paramètres.

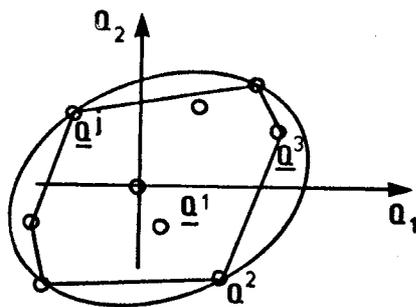


Figure 9 :
Approximation par l'intérieur de la frontière de K lorsque K est convexe.

3.4 - CRITÈRES

Du point de vue pratique le domaine $G(\underline{x})$ peut être défini en chaque point au moyen d'une fonction scalaire de $\underline{\sigma}(\underline{x})$ analogue à la fonction de charge (ou au "critère") pour un matériau parfaitement plastique :

il s'agit d'une fonction scalaire de $\underline{\sigma}(\underline{x})$ soit $f[(\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x}))]$ telle que :

$$(3.3) \quad \begin{cases} f[(\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x}))] < 0 \text{ corresponde à l'intérieur du domaine } G(\underline{x}) \\ f[(\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x}))] = 0 \text{ à la frontière de } G(\underline{x}) \\ f[(\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x}))] > 0 \text{ à l'extérieur de } G(\underline{x}) \end{cases}$$

A titre d'exemples de telles fonctions utilisées pour caractériser les capacités de résistance du matériau constitutif, on peut citer :

- "critère" de Coulomb pour les sols frottants ;
- "critères" de von Mises et de Tresca pour les plaques métalliques minces ⁽¹⁾ ;
- "critère" de Johansen (1932, 1952) pour les dalles minces en béton armé ⁽¹⁾ ;
- "critères" bidimensionnels de Casagrande-Carrillo (1944), de Bishop (1966), pour les sols cohérents anisotropes.
- fonctions de charge (ou "critères") de von Mises et de Tresca, pour les métaux parfaitement-plastiques, ou pour les sols purement cohérents.

⁽¹⁾ Contrainte généralisée : le tenseur des moments de flexion \underline{M} .

Lorsque le domaine $G(\underline{x})$ est convexe, il est commode de choisir $f[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})]$ convexe de $\underline{\sigma}(\underline{x})$; (c'est d'ailleurs le choix usuel).

On remarque, comme pour la présentation des fonctions de charge en plasticité (Salençon et Halphen, 1981) que, la fonction f n'étant physiquement définie que sur les tenseurs $\underline{\sigma}(\underline{x})$ symétriques, son expression en fonction des neuf composantes de $\underline{\sigma}(\underline{x})$ supposées distinctes demeure arbitraire : on choisira de désigner par f la forme symétrique en $\sigma_{ij}(\underline{x})$ et $\sigma_{ji}(\underline{x})$, ⁽¹⁾.

Revenant alors à la définition même de K donnée par (2.25), on remarque que celle-ci revient aussi à caractériser K par une fonction scalaire $\delta(Q)$, possédant vis-à-vis de Q et de K les mêmes propriétés que $f[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})]$ vis-à-vis de $\underline{\sigma}(\underline{x})$ et de $G(\underline{x})$, et définie comme suit :

$$(3.4) \quad \delta(Q) = \inf_{\underline{\sigma} \in L^{-1}(Q)} \cdot \sup_{\underline{x} \in V} \left\{ f[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})] \right\} \quad (2)$$

Si, $\forall \underline{x} \in V$, $f[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})]$ est convexe de $\underline{\sigma}(\underline{x})$, δ sera convexe de Q .

⁽¹⁾ Il en va évidemment de même pour les fonctions de résistance des plaques et dalles minces exprimées en fonction des composantes du tenseur symétrique \underline{M} .

⁽²⁾ En laissant de côté certains problèmes mathématiques de continuité qui nécessiteraient des développements hors de proportion avec leur intérêt pratique.

 4 - APPROCHE DE K PAR L'EXTÉRIEUR

 4.1 - APPROCHE DE K PAR L'EXTÉRIEUR PAR LES CONTRAINTES

En prenant la proposition contraposée de (2.21) il vient :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Système certainement instable} \\ \text{sous } \underline{Q} \\ \updownarrow \\ \text{incompatibilité} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{équilibre quasi-statique sous } \underline{Q} \\ \text{capacités de résistance du matériau.} \end{array} \right.$$

Ainsi, pour prouver qu'un chargement \underline{Q} est extérieur à K il faut montrer qu'il n'existe aucun champ $\underline{\sigma}$ tel que indiqué dans (2.22), c'est-à-dire tel que :

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma} \in L^{-1}(\underline{Q}) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in V ; \end{array} \right.$$

en d'autres termes on doit être en mesure d'explorer $H(\underline{Q}) = H \cap L^{-1}(\underline{Q})$ et de montrer qu'il est vide.

Sous cette forme il apparaît donc assez difficile *a priori* d'approcher K par l'extérieur par les contraintes.

Pourtant une telle approche ne serait pas sans intérêt. Comme on l'a dit au § 3.1, il n'est pas toujours possible de déterminer exactement les chargements extrêmes et l'on doit souvent se contenter des résultats fournis par une maximisation approchée, dans un compromis entre les nécessités d'un calcul efficace et la sophistication des formes de champs de contraintes utilisées. L'approche par l'extérieur permettrait donc, sur chaque trajet radial, d'encadrer le chargement extrême. En particulier, dans le cas d'un mode de chargement à un paramètre, il serait intéressant d'obtenir ainsi un majorant pour Q^+ et un minorant pour Q^- .

Il est possible dans certains cas, d'utiliser cette approche de façon pratique. Une méthode qui se révèle parfois efficace pour cela consiste à remarquer que l'incompatibilité dans (4.1) sera assurée si l'on démontre qu'il y a *incompatibilité* entre une conséquence logique de l'équilibre quasi-statique sous Q et les capacités de résistance.

En particulier, il se révélera souvent commode de montrer que l'équilibre global, c'est-à-dire l'équilibre au sens de la mécanique des solides indéformables, d'une partie du système est impossible à assurer compte tenu des conditions imposées par les capacités de résistance.

On peut illustrer concrètement cette méthode en considérant l'exemple de la structure étudiée au § 2 (figure 1) : en examinant l'équilibre du seul noeud A (figure 10), on voit immédiatement que la structure sera instable si $Q > L(1 + \sqrt{2})$, d'où $Q^+ \leq L(1 + \sqrt{2})$ (résultat qui dans ce cas ne présente pas d'intérêt puisque Q^+ était connu exactement).

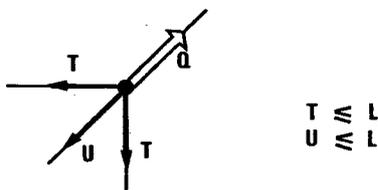


Figure 10 : Equilibre du noeud A dans la structure de la figure 1.

Ce mode de raisonnement est d'utilisation courante en Mécanique des Sols [cf. (Coussy et Salençon, 1979)] : ce sont les méthodes d'équilibre de "blocs" qui trouvent leur origine dans les travaux de Coulomb (1773) et ont été appliquées, entre autres, par Culmann (1866). A titre d'exemple on trouvera dans le chapitre VI du présent ouvrage (§ 4.6) une analyse de la méthode du prisme de Coulomb pour l'étude de la stabilité d'une fouille verticale. D'une manière générale il est essentiel de retenir que ces méthodes d'équilibre de "blocs" ne conduisent à des résultats rigoureux non triviaux que pour des blocs, c'est-à-dire des sous-systèmes ou des sous-structures dont on étudie l'équilibre global, "bien choisis" en fonction du critère de résistance du matériau constitutif.

4.2 - APPROCHE DE K PAR L'EXTÉRIEUR PAR LES VITESSES

La condition $\underline{\sigma} \in L^{-1}(Q)$ qui intervient dans (4.2) s'exprime directement par l'écriture des équations de l'équilibre quasi-statique (équations de champ et conditions aux limites sur les contraintes) ; c'est ainsi qu'ont été bâtis tous les raisonnements présentés précédemment.

On peut aussi faire appel au principe des puissances virtuelles, sous la forme (2.8) correspondant au mode de chargement à n paramètres, en écrivant :

$$\begin{aligned} & \underline{\sigma} \in L^{-1}(Q) \\ & \quad \Updownarrow \\ (4.3) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \int_V [\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} [\underline{v}(\underline{x})] \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) d\Sigma = Q(\underline{\sigma}) \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \\ & \forall \underline{v} \text{ cinématiquement admissible dans le mode de chargement } (1). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, pour un chargement Q donné, en démontrant l'incompatibilité de :

$$(4.3) \text{ où } Q(\underline{\sigma}) = Q$$

avec :

$$(4.4) \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in V,$$

on démontre que Q est extérieur à K .

Sous cette forme il ne paraît pas, bien au contraire, que le problème posé au paragraphe précédent se trouve simplifié !

Toutefois, on peut remarquer que la condition (4.4), par le fait que les capacités de résistance du matériau sont limitées par $G(\underline{x})$ en chaque point \underline{x} de V , permet de majorer le premier membre de (4.3). En effet posons :

$$(4.5) \quad \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] = \text{Sup} \{ \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \}$$

$$(4.6) \quad [\underline{v}(\underline{x})] = \underline{V}(\underline{x})$$

$$(4.7) \quad \pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})] = \text{Sup} \{ \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \}$$

Compte tenu des définitions (4.5) à (4.7), le 1er membre de (4.3) se trouve majoré, sous la condition (4.4), par la fonction du seul champ \underline{v} définie par :

(1) Sera dans la suite désigné en abrégé par C.A.

$$(4.8) \quad P(\underline{v}) = \int_V \pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} \pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]] d\Sigma .$$

Il s'ensuit alors que :

s'il existe un champ \underline{v} C.A., tel que dans ce champ on ait :

$$(4.9) \quad P(\underline{v}) < \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v})$$

on peut affirmer qu'il y a incompatibilité entre l'équilibre quasi-statique sous \underline{Q} et les capacités de résistance du matériau :

(4.10) a

$$\left. \begin{array}{l} \exists \underline{v} \text{ C.A. tel que} \\ P(\underline{v}) < \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Q} \notin K$$

ou encore :

(4.10) b

$$K \subset \left\{ \underline{Q} \mid \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - P(\underline{v}) \leq 0 \right\} \quad \forall \underline{v} \text{ C.A.}$$

On a ainsi une méthode d'approche de K par l'extérieur, basée sur l'utilisation de champs de vitesses C.A.

Cette méthode est *effective* lorsque l'on choisit un champ \underline{v} C.A. pour lequel $P(\underline{v})$ est finie (on verra aux § 4.4 et 4.5 que π peut être finie), et $\dot{\underline{q}}(\underline{v}) \neq 0$: pour un tel champ l'inéquation (4.9) définit dans l'espace \mathcal{R}^n un demi-espace extérieur à K (figure 11). Considérant alors p champs de vitesses \underline{v}^k de ce type, l'enveloppe convexe des p hyper-plans d'équations :

$$(4.11) \quad P(\underline{v}^k) - \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}^k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$$

est une approximation par l'extérieur de la frontière de K .

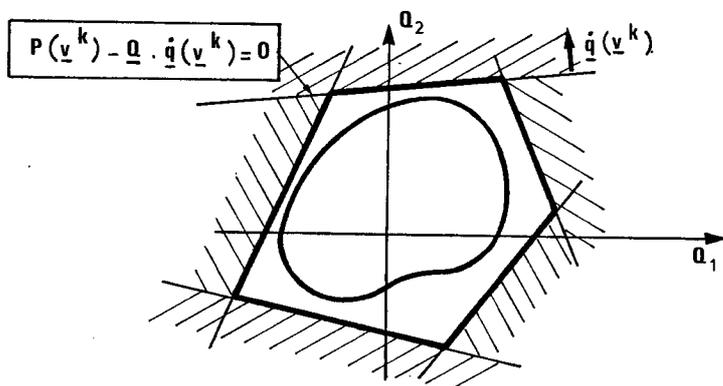


Figure 11 :
Approximation par
l'extérieur de la
frontière de K .

On cherche souvent à borner K dans une direction donnée, ce qui revient à utiliser la méthode ci-dessus à \dot{q} donné = \dot{q}^0 . On est donc conduit à minimiser $P(\underline{v})$ sur les champs \underline{v} C.A. tels que $\dot{q}(\underline{v}) = \dot{q}^0$ (figure 12).

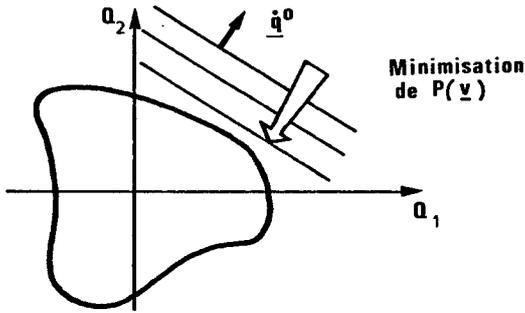


Figure 12 :
Borner K dans une direction.

4.3 - CAS DU MODE DE CHARGEMENT A UN PARAMÈTRE

Dans le cas d'un système dans un mode de chargement à un paramètre, et compte tenu du fait que K est alors le segment (Q^-, Q^+) de \mathbb{R} , (4.10) s'écrit :

$$(4.12) \quad \left. \begin{array}{l} \exists \underline{v} \text{ C.A. tel que} \\ P(\underline{v}) < Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) \end{array} \right\} \Rightarrow Q \notin (Q^-, Q^+)$$

d'où :

$\forall \underline{v}$ C.A., on a :

- si $\dot{q}(\underline{v}) > 0$: $Q^+ \leq P(\underline{v}) / \dot{q}(\underline{v})$
- si $\dot{q}(\underline{v}) < 0$: $Q^- \geq P(\underline{v}) / \dot{q}(\underline{v})$

(4.13)

c'est-à-dire que l'on obtient ainsi, suivant le signe de la vitesse de déformation du système $\dot{q}(\underline{v})$, un majorant de Q^+ ou un minorant de Q^- (figure 13). Pour améliorer le résultat on cherchera, dans les deux cas, à \dot{q} fixé, à minimiser $P(\underline{v})$.

Figure 13 : Système dans un mode de chargement à un paramètre : approche par l'extérieur.



4.4 - ÉTUDE DE LA FONCTION $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$

Il est commode, pour cette étude, d'utiliser le langage géométrique : on identifie les deux espaces $\{\underline{\sigma}(\underline{x})\}$ et $\{\underline{d}(\underline{x})\}$ à \mathbb{R}^6 et on représente $\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})$ par le produit scalaire euclidien dans cet espace, en portant sur les axes :

- 1) σ_{11} et d_{11} ; 2) σ_{22} et d_{22} ; 3) σ_{33} et d_{33} ; 4) $\sqrt{2} \sigma_{12}$ et $\sqrt{2} d_{12}$;
5) $\sqrt{2} \sigma_{13}$ et $\sqrt{2} d_{13}$; 6) $\sqrt{2} \sigma_{23}$ et $\sqrt{2} d_{23}$.

On suivra le raisonnement sur la figure 14 dans l'espace à deux dimensions.

La recherche de la valeur de $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$ consiste à chercher, à $\underline{d}(\underline{x})$ donné, la valeur maximale du produit scalaire $\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})$ quand $\underline{\sigma}(\underline{x})$ parcourt $G(\underline{x})$. Cette valeur s'obtient de la façon suivante : on cherche sur la frontière de $G(\underline{x})$ les points en lesquels la normale extérieure est dirigée suivant $\underline{d}(\underline{x})$;

- s'il n'y en a pas, on a (cas n°1 sur la figure 14) :

$$(4.14) \quad \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] = +\infty$$

- s'il n'y en a qu'un, soit $\underline{\sigma}^*(\underline{x})$, on a (cas n°2 sur la figure 14) :

$$(4.15) \quad \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] = \underline{\sigma}^*(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})$$

- s'il y en a plusieurs, on a (cas n°3 sur la figure 14) :

$$(4.16) \quad \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] = \text{Sup} \{ \underline{\sigma}^*(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \} \quad \text{sur l'ensemble des } \underline{\sigma}^*(\underline{x})$$

de la frontière de $G(\underline{x})$, en lesquels la normale extérieure est dirigée selon $\underline{d}(\underline{x})$.

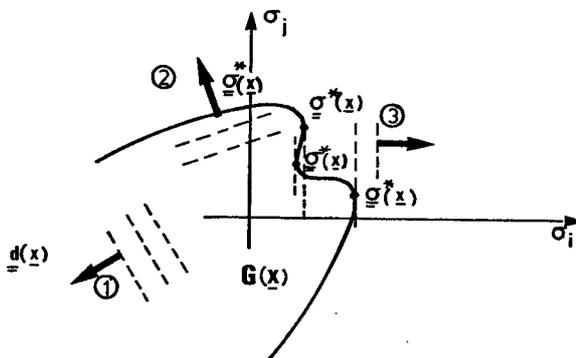


Figure 14 :
Recherche de la valeur de
 $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$.

Il est clair que $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$ possède les propriétés suivantes :

1° Puisque $0 \in G(\underline{x})$, π est positive :

$$(4.17) \quad \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] \geq 0, \quad \forall \underline{d}(\underline{x})$$

2° π est positivement homogène de degré 1 :

$$(4.18) \quad \pi[\underline{x} ; \alpha \underline{d}(\underline{x})] = \alpha \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \forall \underline{d}(\underline{x}).$$

3° π est convexe de $\underline{d}(\underline{x})$:

$$(4.19) \quad \begin{aligned} & \pi[\underline{x} ; \lambda \underline{d}^1(\underline{x}) + (1 - \lambda) \underline{d}^2(\underline{x})] \leq \\ & \leq \lambda \pi[\underline{x} ; \underline{d}^1(\underline{x})] + (1 - \lambda) \pi[\underline{x} ; \underline{d}^2(\underline{x})] \\ & \forall \underline{d}^1(\underline{x}), \quad \forall \underline{d}^2(\underline{x}), \quad \forall \lambda \in (0, 1) \end{aligned}$$

En fait, $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$ n'est autre que la fonction d'appui ⁽¹⁾ de l'enveloppe convexe de $G(\underline{x})$, notée $[G(\underline{x})]^{Co}$ (figure 15) .

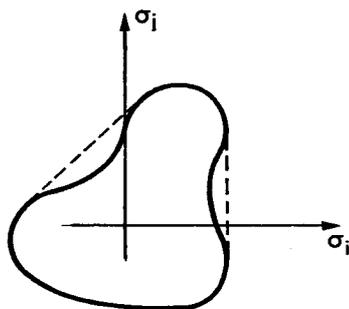


Figure 15 :
 $G(\underline{x})$ et son enveloppe convexe
 $[G(\underline{x})]^{Co}$

(¹) Cela signifie que $[G(\underline{x})]^{Co}$ se définit dans l'espace $\{\underline{\sigma}\}$ par dualité au moyen de π :

$$[G(\underline{x})]^{Co} = \bigcap_{\underline{d}(\underline{x}) \in \mathcal{R}^6} \left\{ \underline{\sigma}(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) - \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] \leq 0 \right\}$$

4.5 - ÉTUDE DE LA FONCTION $\pi[\underline{x}; \underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$

4.5.1 - AUTRE EXPRESSION DE $\pi[\underline{x}; \underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$

Le vecteur $\underline{T}[\underline{n}(\underline{x}), \underline{\sigma}(\underline{x})]$ défini par :

$$(4.20) \quad \underline{T}[\underline{n}(\underline{x}), \underline{\sigma}(\underline{x})] = \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

étant évidemment linéaire en $\underline{\sigma}(\underline{x})$, il en résulte que lorsque $\underline{\sigma}(\underline{x})$ parcourt $G(\underline{x})$, \underline{T} parcourt un domaine $g[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})]$ dans l'espace \mathbb{R}^3 des vecteurs-contraintes, et $g[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})]$ possède dans cet espace les mêmes propriétés que celles énoncées au § 2.2.3 pour le domaine $G(\underline{x})$ dont il est issu, dans \mathbb{R}^6 .

Il résulte alors de la définition (4.7) que l'on a aussi :

$$(4.21) \quad \pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})] = \text{Sup} \left\{ \underline{T} \cdot \underline{V}(\underline{x}) \mid \underline{T} \in g[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})] \right\}$$

On devra donc, pour obtenir l'expression de $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$, construire $g[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})]$ et procéder ensuite à partir de ce domaine de \mathbb{R}^3 comme on a fait ci-dessus (§4.4) à partir de $G(\underline{x}) \subset \mathbb{R}^6$ pour obtenir $\pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})]$.

4.5.2 - OBTENTION DE $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$ A PARTIR DE $\pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})]$

On peut obtenir l'expression de $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$ directement à partir de la connaissance de celle de $\pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})]$

En effet, décomposons $\underline{V}(\underline{x})$ selon ses composantes normale selon \underline{n} : u_n , et tangentielles selon deux axes orthogonaux dans le plan tangent à Σ en \underline{x} :

$$u_{t_1} \quad \text{et} \quad u_{t_2} \quad ;$$

Désignons par $\underline{D}[\underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$ le tenseur symétrique dont la matrice dans ces axes $\underline{n}, \underline{t}_1, \underline{t}_2$ est $\hat{\underline{D}}[\underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$ définie par :

$$(4.22) \quad \underline{\hat{D}}[\underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})] = \begin{bmatrix} u_n & \frac{u_{t_1}}{2} & \frac{u_{t_2}}{2} \\ \frac{u_{t_1}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{u_{t_2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On voit que l'on a l'identité :

$$(4.23) \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{D}[\underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})] = \sigma u_n + \tau_1 u_{t_1} + \tau_2 u_{t_2}$$

où l'on désigne par σ , τ_1 , τ_2 , les composantes normale et tangentielles selon \underline{n} , \underline{t}_1 , \underline{t}_2 du vecteur $\underline{T}[\underline{n}(\underline{x}), \underline{\sigma}(\underline{x})]$ défini par (4.20), c'est-à-dire que l'on a :

$$(4.24) \quad \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{D}[\underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})].$$

Il est alors clair, par les définitions (4.5) et (4.7) que :

$$(4.25) \quad \pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})] = \pi[\underline{x} ; \underline{D}[\underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})]]$$

ce qui permet d'obtenir $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})]$ à partir des résultats connus par l'étude du § 4.4.

4.6 - CAS OU LE DOMAINE $G(\underline{x})$ EST CONVEXE

4.6.1 - FONCTION $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$

Si $G(\underline{x})$ est convexe, la recherche de la valeur de $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$ faite au § 4.4 se trouve simplifiée : en effet, il n'y a plus alors à distinguer les cas des $\underline{d}(\underline{x})$ de types 2 et 3 sur la figure 14 puisque, s'il existe plusieurs $\underline{\sigma}^*(\underline{x})$ sur la frontière de $G(\underline{x})$ en lesquels $\underline{d}(\underline{x})$ est dirigée suivant la normale extérieure, ils fournissent tous la même valeur pour le produit $\underline{\sigma}^*(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})$. On cherche donc ces points $\underline{\sigma}^*(\underline{x})$ et on a (figure 16) :

s'il n'y a pas de $\underline{\sigma}^*(\underline{x})$ à distance finie :

$$\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] = +\infty$$

s'il y en a, un ou plusieurs :

$$\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] = \underline{\sigma}^*(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})$$

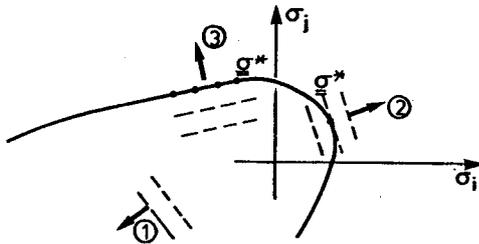


Figure 16 : recherche de la valeur de $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$ si $G(\underline{x})$ est convexe.

Ceci peut s'exprimer mathématiquement comme suit : en caractérisant le convexe $G(\underline{x})$ par un "critère" convexe $f[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})]$ comme indiqué en (3.3) :

$$(4.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] = \underline{\sigma}^*(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \\ \text{si } \exists \underline{\sigma}^*(\underline{x}) \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} f[\underline{x} ; \underline{\sigma}^*(\underline{x})] = 0 \\ \underline{d}(\underline{x}) \in \lambda \partial f[\underline{x} ; \underline{\sigma}^*(\underline{x})] \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right. \\ \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] = +\infty \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

Dans cette formule $\partial f[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})]$ représente le sous-différentiel de la fonction convexe $f[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})]$:

c'est l'ensemble des éléments \underline{y} de \mathbb{R}^6 tels que l'on ait :

$$(4.27) \quad \forall \underline{\sigma}'(\underline{x}) \in \mathbb{R}^6, \quad f[\underline{x} ; \underline{\sigma}'(\underline{x})] - f[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})] \geq \underline{y} : [\underline{\sigma}'(\underline{x}) - \underline{\sigma}(\underline{x})] .$$

Cet ensemble se réduit au seul gradient de f , soit $\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}(\underline{x})}[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})]$

dans le cas où f est régulière en $\underline{\sigma}(\underline{x})$. Dans la formule (4.26) $\lambda \partial f[\underline{x} ; \underline{\sigma}^*(\underline{x})]$, $\lambda \geq 0$, représente le cône normal extérieur à la frontière de $G(\underline{x})$ au point $\underline{\sigma}^*(\underline{x})$.

On peut aussi caractériser $G(\underline{x})$ par sa fonction indicatrice $\psi[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})]$ définie par :

$$(4.28) \quad \begin{cases} \psi[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})] = 0 & \text{si } \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \\ \psi[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})] = +\infty & \text{si } \underline{\sigma}(\underline{x}) \notin G(\underline{x}); \end{cases}$$

(4.26) prend alors la forme plus simple :

$$(4.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})] = \underline{\sigma}^*(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \\ \text{si } \exists \underline{\sigma}^*(\underline{x}) \text{ tel que } \begin{cases} \psi[(\underline{x}); \underline{\sigma}^*(\underline{x})] = 0 \\ \underline{d}(\underline{x}) \in \partial \psi[\underline{x}; \underline{\sigma}^*(\underline{x})] \end{cases} \\ \pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})] = +\infty, \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

$\pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})]$ est la fonction d'appui du domaine convexe $G(\underline{x})$, selon la définition donnée au § 4.4, et l'on a :

$$(4.30) \quad G(\underline{x}) = \bigcap_{\underline{d}(\underline{x}) \in \mathcal{R}^6} \left\{ \underline{\sigma}(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) - \pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})] \leq 0 \right\}.$$

Mathématiquement $\pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})]$ est la transformée de Legendre de $\psi[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})]$.

4.6.2 - FONCTION $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$

$G(\underline{x})$ étant convexe dans \mathcal{R}^6 , $g[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})]$ l'est aussi dans \mathcal{R}^3 et l'on peut reprendre au sujet de $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$, le raisonnement fait ci-dessus à propos de $\pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})]$ et écrire les formules homologues des formules précédentes.

Il est particulièrement intéressant de pousser plus avant le raisonnement dans le cas où le matériau est *isotrope*.

Compte tenu des symétries de $G(\underline{x})$ dues à l'isotropie du matériau, $g[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})]$ est alors *indépendant* de $\underline{n}(\underline{x})$; on le notera $g(\underline{x})$. Dans l'espace \mathbb{R}^3 , défini par les composantes normale σ et tangentiellles τ_1 et τ_2 du vecteur $\underline{T}[\underline{n}(\underline{x}), \underline{\sigma}(\underline{x})]$ ⁽¹⁾, $g(\underline{x})$ est, de plus, *symétrique de révolution* autour de l'axe σ . En conséquence dans l'application de la formule (4.21), pour la recherche du $\text{Sup} \{ \underline{T} \cdot \underline{V}(\underline{x}) \}$ il est clair qu'il suffit de se limiter à explorer dans $g(\underline{x})$ les vecteurs \underline{T} contenus dans le même plan méridien que $\underline{V}(\underline{x})$ (figure 17).

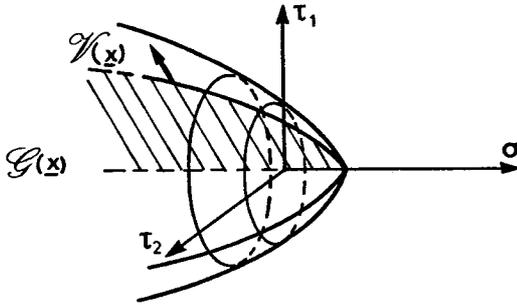


Figure 17 :
Domaine $G(\underline{x})$ pour le matériau isotrope.

Autrement dit alors :

$\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})]$ ne dépend plus de $\underline{n}(\underline{x})$ que par l'intermédiaire du produit scalaire $\underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$; plus précisément on aura :

$$(4.31) \quad \pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})] = \pi[\underline{x} ; |\underline{V}(\underline{x})|, \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})] ;$$

soit en choisissant les axes t_1 et t_2 en sorte que $u_{t_2} = 0$

$$(4.32) \quad \pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})] = \text{Sup} \left\{ u_n \sigma + u_t \tau \mid (\sigma, \tau, 0) \in g(\underline{x}) \right\}$$

sans qu'il soit nécessaire de préciser l'orientation absolue de ces axes par rapport à un repère fixe.

On se trouve ramené, par cette formule, à l'utilisation de la représentation de Mohr : on sait par un résultat classique, que l'enveloppe convexe de l'extrémité du vecteur contrainte $\underline{T}[\underline{n}(\underline{x}), \underline{\sigma}(\underline{x})]$ pour un tenseur $\underline{\sigma}(\underline{x})$: donné et $\underline{n}(\underline{x})$ explorant toutes les directions de \mathbb{R}^3 , est le grand cercle de Mohr de diamètre $\sigma_3 \sigma_1$, (σ_1 contraintes principales ordonnées selon $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) ; ce résultat est évidemment conservé si $\underline{n}(\underline{x})$ étant fixe, $\underline{\sigma}(\underline{x})$ varie par son orientation dans l'espace en conservant les mêmes valeurs des contraintes principales.

(1) Cf § 4.5.2, formule (4.23).

Le domaine assigné à (σ, τ) dans (4.32) n'est autre que la section méridienne de $g(\underline{x})$ et est donc convexe ; c'est aussi le domaine limité dans le plan de Mohr par l'enveloppe convexe des grands cercles de Mohr pour tous les $\underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x})$. Cette courbe (figure 18) sera appelée par la suite la "Courbe Intrinsèque de déformation plane".

Le résultat obtenu peut ainsi s'énoncer :

$\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})]$ est la fonction d'appui du domaine limité dans le plan de Mohr par la courbe intrinsèque de déformation plane.

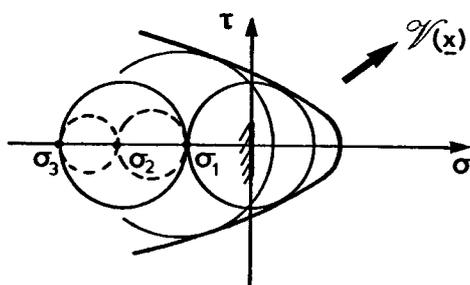


Figure 18 : Utilisation du plan de Mohr pour le calcul de $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{V}(\underline{x})]$; "Courbe intrinsèque de déformation plane".

On notera également le résultat général obtenu chemin faisant :

pour un matériau isotrope dont les capacités de résistance sont définies par un domaine convexe $G(\underline{x})$, le vecteur contrainte agissant sur une facette quelconque est toujours limité par la "Courbe intrinsèque de déformation plane" correspondant à $G(\underline{x})$.

4.6.3 - FONCTION D'APPUI DU CONVEXE K

On sait que si $G(\underline{x})$ est convexe $\forall \underline{x} \in V$, le domaine K est convexe dans \mathcal{R}^n . Ce convexe peut, dans \mathcal{R}^n , être défini par sa fonction d'appui qui sera désignée par $\Pi(\dot{\underline{q}})$:

$$(4.33) \quad \Pi(\dot{\underline{q}}) = \sup_{\underline{Q} \in K} \{ \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} \} ,$$

d'où la formule :

$$(4.34) \quad \bar{K} = \bigcap_{\dot{\underline{q}} \in \mathcal{R}^n} \{ \underline{Q} \mid \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} - \Pi(\dot{\underline{q}}) \leq 0 \} \quad (1)$$

(1) On rappelle que, quoique $G(\underline{x})$ soit supposé fermé, K ne l'est pas nécessairement.

Les résultats de l'approche par l'extérieur, exprimés par la formule (4.10) montrent que :

$$(4.35) \quad \Pi[\dot{\underline{q}}(\underline{v})] \leq P(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \text{ C.A.}$$

fournissant ainsi une majoration de la fonction d'appui de K à partir de la connaissance de la fonction d'appui de $G(\underline{x})$.

Nayroles (1970), Frémond et Friàà (1978) et Friàà (1979) ont donné les théorèmes permettant d'affirmer sous certaines hypothèses que :

a)

$$(4.36) \quad \Pi(\dot{\underline{q}}) = \text{Inf} \{ P(\underline{v}) \mid \underline{v} \text{ C.A. et } \dot{\underline{q}}(\underline{v}) = \dot{\underline{q}} \};$$

b)

le convexe K est fermé et admet $\Pi(\dot{\underline{q}})$ défini par (4.36) comme fonction d'appui.

4.7 - LES CHAMPS DE VITESSE UTILISES

On rappelle la formule (4.10) qui résume la méthode d'approche par l'extérieur, par les vitesses :

$$K \subset \left\{ \underline{Q} \mid \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - P(\underline{v}) \leq 0 \right\} \forall \underline{v} \text{ C.A.}$$

Comme on l'a dit au § 4.3, cette méthode est effective lorsque l'on choisit pour \underline{v} un champ cinématiquement admissible tel que :

$$(4.37) \quad \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \neq 0,$$

c'est-à-dire qu'il y a "déformation" du système, et tel que :

$$(4.38) \quad P(\underline{v}) < +\infty$$

Compte tenu de la définition de $P(\underline{v})$ (formule (4.8)), et sans entrer dans des subtilités mathématiques ⁽¹⁾, cette dernière condition nécessite que pour le champ \underline{v} utilisé on ait :

$$(4.39) \quad \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] < +\infty, \quad \forall \underline{x} \in V,$$

$$(4.40) \quad \pi[\underline{x} ; \underline{n}(\underline{x}); \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket] < +\infty, \quad \forall \underline{x} \in \Sigma.$$

Ceci impose donc des limitations aux champs \underline{v} "efficaces" qui sont exprimées par la forme même des fonctions π pour le matériau constitutif, et qui correspondent au fait que :

$\underline{d}(\underline{x})$ doit être tel que l'on se trouve dans les cas 2 ou 3 de la fig. 14 vis-à-vis de $G(\underline{x})$;

$\llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket = \underline{V}(\underline{x})$ doit être tel que l'on se trouve dans les cas homologues vis-à-vis de $g[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})]$ ou, ce qui est équivalent, que $\underline{D}[\underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$ doit être dans ces mêmes cas vis-à-vis de $G(\underline{x})$.

Lorsque $G(\underline{x})$ est convexe, ceci s'exprime plus commodément du point de vue mathématique en se reportant aux § 4.6.1 et 4.6.2 ; il faut que \underline{v} soit tel que :

1° en chaque point \underline{x} de V , il existe $\underline{\sigma}(\underline{x})$ vérifiant :

$$(4.41) \quad \begin{cases} f[\underline{x}, \underline{\sigma}(\underline{x})] = 0 \\ \underline{d}(\underline{x}) \in \lambda \partial f[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})] \quad \lambda \geq 0. \end{cases}$$

2° en chaque point \underline{x} de Σ , il existe de la même façon, $\underline{\sigma}(\underline{x})$ vérifiant :

$$(4.42) \quad \begin{cases} f[\underline{x}, \underline{\sigma}(\underline{x})] = 0 \\ \underline{D}[\underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})] \in \lambda \partial f[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})], \quad \lambda \geq 0; \end{cases}$$

⁽¹⁾ Il s'agit de problèmes de mesure à propos desquels il ne semble pas que l'on ait encore abouti à des résultats définitifs. Le lecteur intéressé par cette question consultera avec profit les travaux de Suquet (1978a).

ou encore : il existe $\underline{\sigma}(\underline{x})$ tel que $\underline{T}[\underline{n}(\underline{x}), \underline{\sigma}(\underline{x})]$ soit sur la frontière de $g[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})]$ et que $\underline{V}(\underline{x})$ y soit normale extérieure ; dans le cas du matériau isotrope, de domaine $G(\underline{x})$ convexe, cette forme de condition devient : il existe $\underline{\sigma}(\underline{x})$ tel que $\underline{T}[\underline{n}(\underline{x}), \underline{\sigma}(\underline{x})]$ ait son extrémité sur la courbe intrinsèque de déformation plane, et que $\underline{V}(\underline{x})$ y soit normale extérieure à celle-ci.

Si le domaine $G(\underline{x})$ est convexe $\forall \underline{x} \in V$, on peut alors dire, de façon imagée, pour exprimer les conditions (4.37) et (4.38), que les champs \underline{v} qui conduisent à une approche par l'extérieur non triviale sont les champs de vitesse, produisant une déformation non nulle, possibles pour le système géométriquement identique au système considéré, soumis au même mode de chargement, et constitué du matériau :

- 1° Indéformable lorsque le critère $f(\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})) = 0$ n'est pas atteint ;
- 2° Susceptible de déformation illimitée selon les règles définies par (4.41) et (4.42) lorsque ce critère est atteint ;

on reconnaît là le matériau rigide parfaitement plastique, de fonction de charge $f(\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x}))$, et dont la règle d'écoulement est définie par la règle de "NORMALITE au critère" ; le facteur indéterminé non négatif λ dans (4.41) et (4.42) joue le rôle du $\lambda \geq 0$ intervenant dans la formulation habituelle de ce modèle de comportement [cf. (Salençon et Halphen, 1981)].

Si le domaine $G(\underline{x})$ n'est pas convexe on peut reprendre cet énoncé à condition de le rapporter au matériau rigide parfaitement plastique standard dont le convexe de plasticité est, non plus $G(\underline{x})$, mais l'enveloppe convexe $[G(\underline{x})]^{CO}$ de celui-ci.

4.8 - QUELQUES REMARQUES SUR LES PROCEDURES NUMERIQUES

On supposera, pour fixer les idées, que l'on procède comme indiqué au § 4.2 (figure 12) en cherchant à borner K dans une direction $\underline{\dot{q}}^0$ donnée. On est donc amené à construire des champs \underline{v} cinématiquement admissibles, vérifiant $\underline{\dot{q}}(\underline{v}) = \underline{\dot{q}}^0$, et satisfaisant (4.39) et (4.40), et à minimiser $P(\underline{v})$ sur ceux-ci.

Signalons d'abord que la quasi-totalité des problèmes traités jusqu'à ce jour, l'ont été pour des matériaux à critère convexe. Un cas de traitement de tels problèmes pour un matériau à critère non convexe (et d'ailleurs anisotrope) est l'étude de la capacité portante d'une fondation superficielle sur un sol purement cohérent anisotrope caractérisé par les critères de Casagrande-Carrillo ou de Bishop, et l'analyse de la stabilité des pentes, talus et remblais dans les mêmes conditions (Tristán-Lopez, 1979, 1981 ; Salençon et Tristán-Lopez 1980, 1981 a, b, c, d).

En ce qui concerne les méthodes employées : jusqu'à ces dernières années on a essentiellement procédé par voie analytique, en construisant des champs de vitesses satisfaisant rigoureusement les conditions imposées ; on avait parfois recours au calcul numérique pour effectuer la minimisation de $P(\underline{v})$ par rapport aux paramètres (en très petit nombre) dont dépendaient ces champs.

Ceux-ci étaient d'ailleurs souvent très simples, et c'est certainement un des attraits du Calcul à la Rupture, que les résultats ainsi obtenus "à coup de serpe" se soient révélés très utiles dans la pratique pour l'ingénieur. En particulier, on a fait grand usage de champs de vitesses présentant des discontinuités, voire de champs dans lesquels la déformation ne provient que des discontinuités de vitesse.

Pour les problèmes plans de calcul à la rupture (cf. chapitre V), on dispose aussi, pour la construction de tels champs de vitesses, d'une méthode très puissante, mais un peu plus délicate à employer, qui est connue selon ses domaines d'application sous son nom mathématique de "méthode des caractéristiques" (en mécanique des sols), soit sous le terme -quelque peu impropre- de méthode des lignes de glissement (en formage des métaux par exemple). Celle-ci a conduit à des résultats d'un grand intérêt.

D'un autre côté, on a pensé à se tourner vers les méthodes numériques : *différences finies*, et surtout *éléments finis*. Il s'avère alors nécessaire de modifier un peu la manière de traiter le problème. Sans entrer dans des détails qui ressortiraient plus à un exposé d'analyse numérique nous dirons brièvement ceci :

dans la construction par voie numérique de champs de vitesses pour la minimisation de $P(\underline{v})$, les conditions (4.39) et (4.40) se révèlent très contraignantes. Ainsi dans le cas de matériau caractérisé par un critère de von Mises ou de Tresca, (4.39) s'exprime sous la forme $\text{tr } \underline{d}(\underline{x}) = 0$ (invariance du volume) ; aussi on adopte, non sans difficulté d'ailleurs, des méthodes de pénalisation, ou de dualisation. Cette dernière revient à conserver, dans l'expression (4.8) de $P(\underline{v})$, les fonctions π sous leurs formes de Sup, (4.5) et (4.7), qui sont ensuite traitées numériquement (cf. par exemple : Frémond, Pecker et Salençon, 1974 ; Delbecq et coll., 1977).

On doit aussi évoquer, dans le cadre des études numériques, les méthodes de régularisation mises en oeuvre par plusieurs auteurs (Mercier, 1977 ; Friaa, 1978 ; Frémond et Friaa, 1979). Celles-ci sont le plus souvent associées à la recherche des chargements *limites*, c'est-à-dire aux problèmes concernant les structures en matériau rigide parfaitement-plastique standard (cf. chapitre III "Analyse limite" § 4.6) mais en fait, comme cela ressort de l'exposé ci-dessus (§ 4.7 *in fine*), elles sont évidemment applicables à la recherche des charges extrêmes. Nous renvoyons aux références données ci-dessus et à Frémond (1980) pour un exposé complet sur ces méthodes dont nous ne donnons ici qu'une présentation naïve.

Le principe consiste à résoudre des problèmes d'écoulements viscoplastiques ou viscoélastiques pour des matériaux, de Bingham ou de Norton-Hoff par exemple, construits à partir du critère de résistance des matériaux constitutifs donnés pour le système étudié, et à tirer de ces écoulements des informations sur les chargements extrêmes de ce système. La construction des champs de vitesse correspondants s'effectue numériquement par la minimisation d'une fonctionnelle : ainsi dans le cas du matériau de Norton-Hoff le problème apparaît, par bien des aspects, comme semblable à celui à traiter pour l'approche par l'extérieur des chargements extrêmes en calcul à la rupture, mais il est plus simple en raison de la forme de la fonctionnelle qui est plus régulière. L'obtention des résultats relatifs aux chargements extrêmes peut provenir, soit de l'utilisation directe des champs de vitesse ainsi construits dans la méthode d'approche par l'extérieur, soit, de façon plus efficace, des théorèmes reliant le comportement de la structure en matériau "régularisé" à la position du chargement qui lui est imposé par rapport au domaine des chargements potentiellement supportables.

5 - COMBINAISON DES APPROCHES PAR LES CONTRAINTES
ET PAR LES VITESSES

5.1 - OBTENTION DE CHARGEMENTS EXTRÊMES

Les chargements extrêmes ont été définis au § 2.3 : ce sont les chargements de la frontière de K . Pour déterminer un tel chargement en utilisant la construction de K par l'intérieur, au moyen des champs de contrainte, par exemple en suivant un trajet de charge radial, il faut résoudre exactement le problème de maximisation posé en (3.1).

Des chargements extrêmes peuvent aussi être déterminés par l'utilisation combinée des deux méthodes ; supposons en effet que :

1° en appliquant la construction par l'intérieur, on construisse un champ $\underline{\sigma}^* \in H$, déterminant ainsi un chargement \underline{Q}^* :

$$(5.1) \quad \underline{Q}^* = L(\underline{\sigma}^*) \in K :$$

2° d'autre part, utilisant la méthode d'approche par l'extérieur, on mette en évidence un champ \underline{v} cinématiquement admissible et tel que l'égalité suivante soit vraie :

$$(5.2) \quad \underline{Q}^* \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) = P(\underline{v}) ,$$

signifiant donc que le chargement \underline{Q}^* défini par (5.1) est sur l'hyperplan d'équation (4.11) défini par le champ \underline{v} .

Dans ces circonstances on a évidemment les résultats suivants, représentés sur la figure 19 :

1° \underline{Q}^* est chargement extrême

2° $\dot{\underline{q}}(\underline{v})$ est normale extérieure à la frontière de K en \underline{Q}^* .

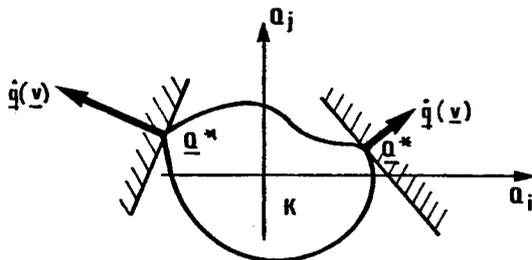


Figure 19 :
Détermination de chargements extrêmes par combinaison des approches.

On remarque sur la figure 19, compte tenu de la formule fondamentale (4.10) de l'approche par l'extérieur, que seuls les chargements extrêmes en lesquels le plan tangent ne recoupe par K , peuvent ainsi être déterminés.

5.2 - THÉORÈME D'ASSOCIATION

En plus des résultats ci-dessus concernant le chargement et la vitesse de déformation du système, on obtient aussi certaines propriétés concernant les champs $\underline{\underline{\sigma}}^*$ et $\underline{\underline{v}}$ eux-mêmes :

En appliquant à (5.2) le principe des puissances virtuelles, et en revenant à la définition de $P(\underline{\underline{v}})$, on voit que l'on a l'égalité :

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_V [\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}})] dV + \int_{\Sigma} [\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}})] \cdot \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}}(\underline{\underline{x}}) d\Sigma = \\ & = \int_V \text{Sup} \left\{ \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}}) \mid \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \in G(\underline{\underline{x}}) \right\} dV + \\ & + \int_{\Sigma} \text{Sup} \left\{ [\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}})] \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \cdot \underline{\underline{n}}(\underline{\underline{x}}) \mid \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}) \in G(\underline{\underline{x}}) \right\} d\Sigma \end{aligned} \right.$$

dans laquelle $\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{x}}) \in G(\underline{\underline{x}}) \quad \forall \underline{\underline{x}} \in V$. Il s'ensuit donc immédiatement que :

1° En tout point où $\underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}}) \neq 0$, les tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{x}})$ et $\underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}})$ sont associés par la relation :

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{x}}) \text{ est sur la frontière de } G(\underline{\underline{x}}) \\ & \text{il est tel que } \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}}) \text{ y soit normale extérieure,} \\ & \text{et il maximise le produit } \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}}) \end{aligned} \right.$$

2° En tout point où $[\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}})] = \underline{\underline{V}}(\underline{\underline{x}}) \neq 0$, les tenseurs

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\underline{x}}) \text{ et } \underline{\underline{D}}[\underline{\underline{n}}(\underline{\underline{x}}) ; \underline{\underline{V}}(\underline{\underline{x}})] \text{ sont liés par la relation} \\ & \text{homologue de (5.4).} \end{aligned} \right.$$

On dit que les champs $\underline{\underline{\sigma}}^*$ et $\underline{\underline{v}}$ constituent alors une *solution complète* pour le problème de calcul à la rupture.

Dans le cas où $G(\underline{x})$ est convexe, caractérisé par le "critère" convexe $f[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})]$ on exprime (5.4) et (5.5) mathématiquement sous la forme :

$$(5.6) \quad \underline{d}(\underline{x}) \neq 0 \implies \begin{cases} f[\underline{x}; \underline{\sigma}^*(\underline{x})] = 0 \\ \underline{d}(\underline{x}) \in \lambda \partial f[\underline{x}; \underline{\sigma}^*(\underline{x})] \quad , \quad \lambda > 0 . \end{cases}$$

$$(5.7) \quad \underline{V}(\underline{x}) \neq 0 \implies \begin{cases} f[\underline{x}; \underline{\sigma}^*(\underline{x})] = 0 \\ \underline{D}[\underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})] \in \lambda \partial f[\underline{x}; \underline{\sigma}^*(\underline{x})] \quad \lambda > 0 . \end{cases}$$

5.3 - THÉORÈME D'UNICITÉ

Le théorème d'association ci-dessus permet de plus de démontrer, sous certaines hypothèses, un théorème d'unicité partielle pour les champs $\underline{\sigma}^*$, équilibrant un chargement extrême \underline{Q}^* sans sortir du domaine de résistance $G(\underline{x})$ en aucun point.

Soit dans \underline{Q}^* un chargement extrême, obtenu par la combinaison des deux méthodes comme indiqué ci-dessus, et deux champs $\underline{\sigma}^*$ et \underline{v} vérifiant (5.1) et (5.2) ; pour $\underline{\sigma}^*$ cela signifie qu'il s'agit d'un champ quelconque de $H \cap L^{-1}(\underline{Q}^*)$.

Ces deux champs sont liés par (5.4) et (5.5). Il s'ensuit qu'il y a unicité de $\underline{\sigma}^*(\underline{x})$ en tout point \underline{x} où $G(\underline{x})$ et $\underline{d}(\underline{x})$, ou $\underline{D}[\underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$, sont tels que l'on se trouve dans le cas n° 2 de la figure 14.

En particulier, si $G(\underline{x})$ est strictement convexe $\forall \underline{x} \in V$, on peut affirmer que les champs $\underline{\sigma}^*$ coïncident en tout point \underline{x} de V où soit $\underline{d}(\underline{x}) \neq 0$ soit $\|\underline{v}(\underline{x})\| \neq 0$. Cela implique notamment que s'il existe plusieurs champs \underline{v} vérifiant (5.2), le champ $\underline{\sigma}^*$ est unique dans la réunion des zones où soit $\underline{d}(\underline{x})$ soit $\|\underline{v}(\underline{x})\|$ sont non nulles dans au moins un de ces champs ; de plus, alors, les tenseurs $\underline{d}(\underline{x})$, $\underline{D}[\underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})]$, dans ces divers champs sont positivement proportionnels entre eux dans le cas d'un critère régulier.

L'hypothèse $G(\underline{x})$ strictement convexe est rarement vérifiée par les critères utilisés pour le milieu continu tridimensionnel. Elle est évidemment toujours vérifiée pour les structures quand le critère ne fait intervenir qu'une composante de contrainte généralisée (barres comprimées ou tendues ; barres fléchies) ; elle est vérifiée par les critères "moment de flexion - effort normal" et "moment de torsion - effort normal" par exemple, dans le cas de deux composantes ; par le critère de von

Mises dans le cas des plaques (3 composantes pour la contrainte généralisée).

Si $G(\underline{x})$ n'est pas strictement convexe, le théorème d'unicité ne peut plus être énoncé directement à partir de (5.4) et (5.5), et on doit procéder à une étude cas par cas pour les critères utilisés dans la pratique : critères de von Mises, de Tresca, de Coulomb pour le milieu continu tridimensionnel, critères de Tresca, de Johansen pour les plaques etc. Moyennant des conditions complémentaires, sur la forme des données aux limites, voire sur la forme du champ $\underline{\sigma}^*$, on peut encore démontrer l'unicité de $\underline{\sigma}^*$ dans la réunion des zones où, soit $\underline{d}(\underline{x})$, soit $[\underline{v}(\underline{x})]$ est non nul.

Ces conditions sont spécifiques à chaque critère et ont été obtenues par Hill dans le cas du critère de von Mises, et par Mandel dans le cas du critère de Tresca ; il s'agissait alors de recherches effectuées dans le cadre de "l'analyse limite" classique, et pour cette raison les cas des sols régis par le critère de Coulomb ou par le critère de Drucker-Prager n'avaient pas été étudiés. On peut maintenant énoncer les résultats suivants :

Pour le critère de von Mises : unicité assurée si en au moins un point du contour de chaque partie convexe de la zone où $\underline{d}(\underline{x})$ ou $\underline{V}(\underline{x}) \neq 0$, la contrainte normale est imposée.

Pour le critère de Tresca : même condition en régime d'arête, condition plus compliquée en régime de face.

Critère de Drucker-Prager : unicité assurée

. ou bien si en un point du contour de chaque partie convexe de la zone où $\underline{d}(\underline{x})$ ou $\underline{V}(\underline{x}) \neq 0$, une cission non nulle est imposée ou une contrainte normale $< C \cotg \varphi$ est imposée et si $\underline{\sigma}$ ne s'annule pas dans toute la zone,

. ou bien si, la cission en surface étant nulle et la contrainte normale égale à $C \cotg \varphi$, la composante de la force de volume selon la normale intérieure est supérieure à celle du gradient de $(-C \cotg \varphi)$, et si $\underline{\sigma}$ ne s'annule pas dans toute la zone.

Critère de Coulomb (courbe intrinsèque): les conditions précédentes en régime d'arête ; conditions plus compliquées en régime de face.

5.4 - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR DE K , PAR LES VITESSES, POUR L'EXEMPLE DE
LA FIGURE 1 -

Reprenant l'exemple de la figure 1 qui a permis d'introduire la notion de chargement potentiellement supportable, nous nous proposons d'y mettre en oeuvre la méthode d'approche par l'extérieur par les vitesses.

Désignant par N_i la force de traction dans la barre i , le domaine de résistance, défini au § 2.1, est identique pour chaque barre :

$$(5.8) \quad G_i : \quad -L \leq N_i \leq L \quad i = 1, 2, \dots, 6 .$$

La fonction π_i correspondante s'exprime en fonction de la vitesse d'extension $\dot{\varepsilon}_i$; la vitesse d'allongement de la barre i , de longueur l_i , est : $\dot{\delta}_i = l_i \dot{\varepsilon}_i$.

On a de façon immédiate :

$$\pi_i(\dot{\varepsilon}_i) = \text{Max} \left\{ N_i \dot{\varepsilon}_i \mid -L \leq N_i \leq L \right\}$$

soit :

$$(5.9) \quad \pi_i(\dot{\varepsilon}_i) = L |\dot{\varepsilon}_i| .$$

Les champs cinématiquement admissibles pour ce problème sont définis par des vitesses d'extension $\dot{\varepsilon}_i$ pour les six barres, qui doivent être géométriquement compatibles. Par utilisation du principe des puissances virtuelles on obtient sans difficulté l'unique condition de compatibilité géométrique pour ce problème :

$$(5.10) \quad 2(\dot{\varepsilon}_5 + \dot{\varepsilon}_6) = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 + \dot{\varepsilon}_4 .$$

Les champs cinématiquement admissibles constituent donc un espace vectoriel de dimension 5 . On conviendra de désigner par $\underline{\varepsilon}$ un tel champ. La vitesse de déformation du système soumis au chargement Q indiqué est :

$$(5.11) \quad \dot{q}(\underline{\varepsilon}) = \dot{\delta}_5 = \dot{\varepsilon}_5 l_5 = \dot{\varepsilon}_5 l \sqrt{2} .$$

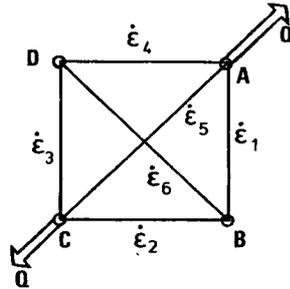


Figure 20 :
Champ cinématiquement
admissible.

Les symétries géométriques et *physiques* du problème permettent de se restreindre *a priori*, pour l'approche par l'extérieur, à l'exploration du sous-espace vectoriel constitué par les champs $\dot{\underline{\epsilon}}$ dans lesquels les quatre côtés du carré ont la même vitesse d'extension.

$$\dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_3 = \dot{\epsilon}_4 = \dot{\epsilon}_T ,$$

les diagonales ayant les vitesses $\dot{\epsilon}_5 = \dot{\epsilon}_U$ et $\dot{\epsilon}_6 = \dot{\epsilon}_V$, liées par (5.10), d'où:

$$(5.12) \quad \dot{\epsilon}_U + \dot{\epsilon}_V = 2\dot{\epsilon}_T .$$

On a alors :

$$(5.13) \quad P(\dot{\underline{\epsilon}}) = L\ell (4|\dot{\epsilon}_T| + \sqrt{2}|\dot{\epsilon}_U| + \sqrt{2}|\dot{\epsilon}_V|)$$

$$(5.14) \quad Q \cdot \dot{\underline{q}}(\dot{\underline{\epsilon}}) = Q\ell \sqrt{2} \dot{\epsilon}_U .$$

Le système est étudié dans un mode de chargement à un paramètre (§ 4.3). Il est commode, pour approcher Q^+ , de fixer \dot{q} à une valeur positive, par exemple, $\dot{q} = \ell \sqrt{2}$, d'où $\dot{\epsilon}_U = 1$ et l'on en déduit par application de (4.13) et compte tenu de (5.12) :

$$(5.15) \quad Q^+ \leq L \frac{\sqrt{2}}{2} (4|\dot{\epsilon}_T| + \sqrt{2} + \sqrt{2} |2\dot{\epsilon}_T - 1|) , \quad \forall \dot{\epsilon}_T ;$$

de même pour Q^- en fixant $\dot{q} = -\ell \sqrt{2}$:

$$(5.16) \quad Q^- \geq -L \frac{\sqrt{2}}{2} (4|\dot{\epsilon}_T| + \sqrt{2} + \sqrt{2} |2\dot{\epsilon}_T + 1|) , \quad \forall \dot{\epsilon}_T .$$

La minimisation en $\dot{\varepsilon}_T$ dans les deux cas ne présente pas de difficulté et l'on obtient :

$$(5.17) \quad Q^+ \leq 2L \quad \text{et} \quad Q^- \geq -2L$$

On a vu au § 2 que ces bornes sont les valeurs exactes Q^+ et Q^- ; on est donc dans un cas où l'égalité (4.36) est vraie ⁽¹⁾.

De plus, si on considère le champ $\dot{\varepsilon}$ minimisant qui correspond à la borne $2L$ pour Q^+ , il est de la forme :

$$(5.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon} \text{ minimisant} \\ \text{pour } \dot{q} = \ell \sqrt{2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_T = 0 \\ \dot{\varepsilon}_U = 1 \\ \dot{\varepsilon}_V = -1 \end{array} \right. .$$

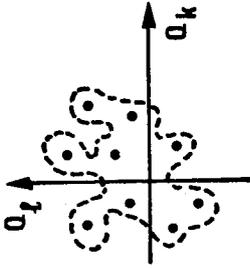
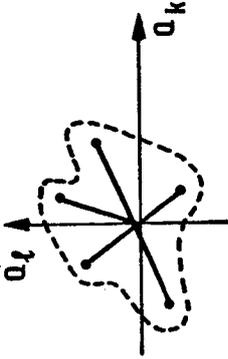
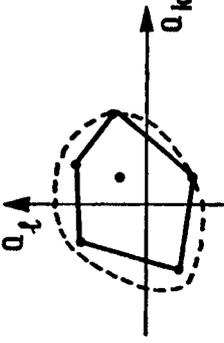
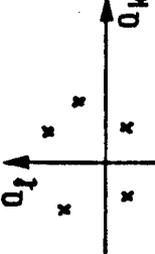
On vérifie le théorème d'association puisque, en se reportant à la figure 2, on voit que pour $Q^+ = 2L$, le seul champ statiquement admissible respectant le critère (5.8) est :

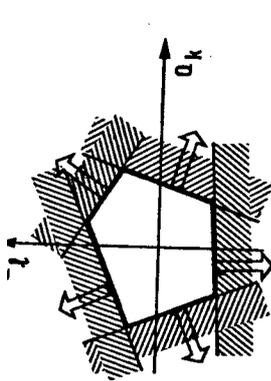
$$(5.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = T = L \sqrt{2} / 2 \\ N_5 = U = L \\ N_6 = V = -L \end{array} \right.$$

6 - TABLEAU RÉCAPITULATIF

Le tableau suivant récapitule les résultats concernant K et les approches par les contraintes et par les vitesses présentés dans les chapitres 2 à 5.

⁽¹⁾ Les conditions d'application des théorèmes cités au § 4.6.3 sont effectivement remplies.

G(x)	QUELCONQUE	ÉTOILÉ DE CENTRE 0	CONVEXE CONTENANT 0
APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR PAR LES CONTRAINTES	 <p>QUELCONQUE</p>	 <p>ÉTOILÉ DE CENTRE 0</p>	 <p>CONVEXE CONTENANT 0</p>
APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR PAR LES CONTRAINTES	$H(\underline{\sigma}) = H \cap L^{-1}(\underline{\sigma}) \text{ est vide} \implies \underline{\sigma} \notin K$ 	$H = \left\{ \underline{\sigma} \mid \underline{\sigma} \text{ S.A., } \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \forall \underline{x} \in V \right\}$ $\underline{\sigma} \in H \implies \underline{\sigma} = L(\underline{\sigma}) \in K$	
APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR PAR LES CONTRAINTES	$P(\underline{v}) = \int_V \pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} \pi[\underline{x}; \underline{n}(\underline{x}); \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket] d\Sigma$		

$K = \left\{ \underline{Q} \mid \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - P(\underline{v}) \leq 0 \right\}$	 <p> $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] = \text{Sup} \left\{ \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \right\}$ $\pi[\underline{x} ; \underline{n}(\underline{x}), \underline{V}(\underline{x})] = \text{Sup} \left\{ \underline{V}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \right\}$ </p>
$\pi(\underline{x} ; \bullet)$ $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); \bullet]$	$\pi(\underline{x} ; \bullet) = \text{fonction d'appui de } [G(\underline{x})]^{\text{co}}$ $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); \bullet] = \text{fonction d'appui de } [g(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}))]^{\text{co}}$
K	<p>sous certaines conditions :</p> $K = \bigcap_{\underline{v} \text{ C.A.}} \left\{ \underline{Q} \mid \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - P(\underline{v}) \leq 0 \right\}$
<p>COMBINAISON DES DEUX APPROCHES</p> <p>RELATION ENTRE $\underline{\sigma}^*$ et \underline{v}</p>	$\exists \underline{\sigma}^* \in H, \exists \underline{v} \text{ C.A. tels que : } \left\{ \begin{array}{l} \underline{Q}^* \text{ chargement extrême} \\ \underline{Q}^*(\underline{\sigma}^*) \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) = P(\underline{v}) \\ \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \text{ normale extérieure} \end{array} \right\} \Rightarrow$ $\underline{d}(\underline{x}) \neq 0 \implies \underline{\sigma}^*(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) = \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$ $[[\underline{v}(\underline{x})] \neq 0 \implies [[\underline{v}(\underline{x})] \cdot \underline{\sigma}^*(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; [[\underline{v}(\underline{x})]]]$

7 - APPLICATION PRATIQUE DU CALCUL A LA RUPTURE
A L'ÉTUDE DE LA TENUE DES OUVRAGES

7.1 - INTRODUCTION

~~~~~

Comme on l'a dit en 1, le problème de vérification quasi-statique qui se pose à l'ingénieur constructeur se ramène le plus souvent à l'énoncé suivant : s'assurer que dans la géométrie fixée, l'ouvrage tel qu'il est dimensionné supportera les charges qui lui sont imposées compte tenu des capacités de résistance données pour les matériaux constitutifs.

On a vu ensuite en 2, que la notion de domaine des chargements potentiellement supportables par l'ouvrage, en géométrie fixée, dans un mode de chargement donné, et pour des capacités de résistance données, constitue l'information la plus précise qui peut être déduite des seules données énoncées ci-dessus (géométrie, chargement, critère de résistance).

On a enfin présenté les méthodes permettant de déterminer ce domaine, de le construire ou de l'approcher par l'intérieur et par l'extérieur, et la puissance de ces méthodes selon les propriétés du domaine définissant les capacités de résistance du matériau constitutif.

Du point de vue de l'utilisation pratique, deux problèmes de natures différentes, viennent alors à l'esprit :

- 1° Par quel moyen commode peut-on indiquer la position du (ou des) chargement imposé à l'ouvrage, par rapport au domaine des chargements potentiellement supportables ?  
Pour cela, on introduira un coefficient scalaire qui sera appelé "coefficient de rupture".
- 2° Comment utiliser les résultats du Calcul à la Rupture, compte tenu du fait que ceux-ci ne se réfèrent qu'aux potentialités de résistance du système ?  
On montrera sur l'exemple de base introduit à la figure 1, le rôle de la nature physique du phénomène correspondant à la limitation des capacités de résistance en examinant deux cas extrêmes : limitation correspondant à la parfaite plasticité, et limitation correspondant à la fragilité. Ceci conduira à quelques réflexions sur la notion de coefficient de sécurité.

## 7.2 - COEFFICIENT DE RUPTURE D'UN OUVRAGE SOUS UN CHARGEMENT DONNÉ

Nous nous plaçons désormais dans le cas où le domaine de résistance du matériau constitutif de l'ouvrage étudié est, en tout point, étoilé de centre  $O$ , ce qui, comme on l'a dit, est pratiquement la règle générale. On sait que le domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables possède alors la même propriété.

Dans ces conditions, comme cela est évident sur la figure 21, la position du chargement donné  $\underline{Q}$  par rapport à  $K$  est indiquée par la position par rapport à 1 du rapport  $F(\underline{Q})$  défini par :

$$(7.1) \quad F(\underline{Q}) = \frac{\overline{OQ^F}}{\overline{OQ}} ,$$

où  $\underline{Q}^F$  désigne le chargement extrême sur le trajet de charge radial proportionnel à  $\underline{Q}$  :

$$(7.2) \quad \begin{cases} F(\underline{Q}) < 1 & \iff \underline{Q} \text{ extérieur à } K , \\ F(\underline{Q}) = 1 & \iff \underline{Q} \text{ chargement extrême,} \\ F(\underline{Q}) > 1 & \iff \underline{Q} \text{ intérieur à } K . \end{cases}$$

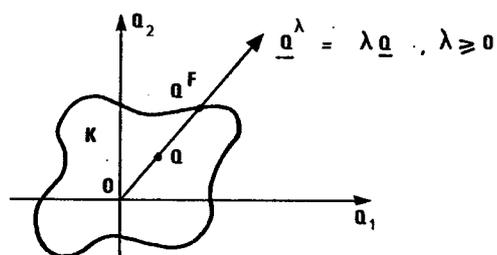


Figure 21 : Définition du coefficient de rupture.

Le coefficient scalaire  $F(\underline{Q})$  ainsi défini sera appelé "coefficient de rupture" de l'ouvrage sous le chargement  $\underline{Q}$  (dans la géométrie fixée, pour les capacités de résistance indiquées.)

Il est clair que l'information qu'il contient est moins complète que celle fournie par la localisation géométrique de  $\underline{Q}$  et de  $K$  dans  $\mathcal{R}^n$ , mais il est évidemment plus commode d'emploi que cette dernière.

### 7.3 - APPROCHE PAR DÉFAUT DU COEFFICIENT DE RUPTURE

Découlant de façon évidente de la construction de  $K$  par l'intérieur au moyen des contraintes, on obtient une approche par défaut du coefficient de rupture, par les contraintes : il s'agit en fait du problème (3.1). Ainsi on a :

$$(7.3) \quad F(Q) = \text{Sup} \left\{ \lambda \mid L^{-1}(\lambda Q) \cap H \neq \emptyset \right\} ;$$

La mise en évidence d'un champ  $\underline{\sigma} \in H$  et équilibrant  $Q^\lambda = \lambda Q$  ( $\lambda \geq 0$ ) conduit à une approximation par défaut du "coefficient de rupture".

### 7.4 - APPROCHE PAR EXCÈS DU COEFFICIENT DE RUPTURE PAR LES CONTRAINTES

En corollaire de (7.3) on a :

$$(7.4) \quad F(Q) = \text{Inf} \left\{ \lambda \mid \lambda \geq 0, L^{-1}(\lambda Q) \cap H = \emptyset \right\} ,$$

ce qui conduit à l'approche par excès du coefficient de rupture, par les contraintes :

toute valeur de  $\lambda \geq 0$  pour laquelle on peut prouver qu'il n'existe pas de champ  $\underline{\sigma}$  permettant de satisfaire à la fois l'équilibre avec le chargement  $\lambda Q$  et les capacités de résistance, est un majorant de  $F(Q)$ .

Les difficultés de cette approche sont les mêmes que celles signalées au § 4.1.

### 7.5 - APPROCHE PAR EXCÈS DU COEFFICIENT DE RUPTURE PAR LES VITESSES

Pour le chargement extrême  $Q^F$  sur le trajet de charge radial proportionnel à  $Q$ , la formule (4.10) permet d'écrire :

$$(7.5) \quad Q^F \cdot \dot{q}(\underline{v}) \leq P(\underline{v}) , \quad \forall \underline{v} \text{ C.A.} ;$$

d'où, par (7.1) :

$$Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) \leq P(\underline{v}) / F(Q) \quad \forall \underline{v} \text{ C.A.}$$

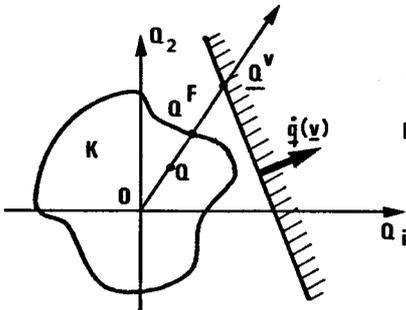
On en déduit :

$$(7.6) \quad \boxed{F(\underline{Q}) \leq P(\underline{v}) / \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \text{ C.A. tel que} \\ \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \geq 0}$$

Cette formule fournit la méthode d'approche par excès du coefficient de rupture au moyen des vitesses. On remarque que n'importe quel champ de vitesse  $\underline{v}$  cinématiquement admissible, dans lequel la puissance des forces extérieures est positive fournit un majorant pour  $F(\underline{Q})$ , soit  $F_{\underline{v}}(\underline{Q})$  défini par (figure 22) :

$$(7.7) \quad F_{\underline{v}}(\underline{Q}) = P(\underline{v}) / \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) ;$$

on cherchera à minimiser  $F_{\underline{v}}(\underline{Q})$  par rapport à  $\underline{v}$ .



$$F(\underline{Q}) = \overline{\partial \underline{Q} F} / \overline{\partial \underline{Q}}$$

$$F_{\underline{v}}(\underline{Q}) = \overline{\partial \underline{Q} v} / \overline{\partial \underline{Q}}$$

Figure 22 :

Approche par excès du coefficient de rupture par les vitesses :

$$F(\underline{Q}) \leq F_{\underline{v}}(\underline{Q})$$

On voit de plus, par comparaison avec (7.2), que  $F_{\underline{v}}(\underline{Q})$  possède la propriété :

$$(7.8) \quad F_{\underline{v}}(\underline{Q}) < 1 \implies \underline{Q} \text{ extérieur à } K.$$

Ainsi la méthode d'approche par excès du coefficient de rupture, par les vitesses, permet dès que l'on a mis en évidence un champ de vitesse  $\underline{v}$  C.A., dans lequel la puissance des forces extérieures est positive et pour lequel :

$$(7.9) \quad F_{\underline{v}}(\underline{Q}) < 1 ,$$

d'affirmer l'instabilité certaine de l'ouvrage étudié sous le chargement imposé avec les capacités de résistance indiquées. On trouvera dans Coussy (1978), Salençon et Coussy (1979) des exemples d'application de ce résultat.

## 7.6 - REMARQUES

### 7.6.1 - MATÉRIAU A DOMAINE DE RÉSISTANCE CONVEXE

---

Il est clair sur la figure 22 que, si le domaine  $K$  n'est pas convexe, il n'est certainement pas possible pour toute valeur de  $\underline{Q}$ , d'obtenir la valeur de  $F(\underline{Q})$  par minimisation de  $F_{\underline{v}}(\underline{Q})$  sur tous les  $\underline{v}$  C.A.

Par contre, si  $G(\underline{x})$  est convexe  $\forall \underline{x} \in V$  on peut montrer, sous les mêmes hypothèses que celles énoncées au § 4.6.3, que l'on a :

$$(7.10) \quad F(\underline{Q}) = \inf_{\underline{v}} \left\{ F_{\underline{v}}(\underline{Q}) \mid \underline{v} \text{ C.A.}, \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \geq 0 \right\}$$

(Frémond et Friaà, 1978, Friaà, 1979).

### 7.6.2 - AUTRES FORMES DE COEFFICIENTS DE RUPTURE

---

Pour certains types de problèmes, tels que ceux rencontrés en Mécanique des Sols, le coefficient  $F(\underline{Q})$  défini par (7.1) ne correspond pas exactement aux besoins de la pratique. Il est alors possible de construire à partir de  $F(\underline{Q})$  un autre "coefficient de rupture" ayant la même propriété quant à la signification (7.2) et qui est mieux adaptée au problème étudié : on introduira par exemple, en Mécanique des Sols, un coefficient de rupture par rapport à la "résistance totale" (voir par exemple les références déjà citées de Coussy et Salençon).

De la même façon, dans le cas des structures soumises à diverses combinaisons de charges, il pourra être utile de faire la distinction entre charges permanentes et non permanentes et d'évaluer le "coefficient de rupture" attaché au chargement, par rapport à une seule catégorie de charges, pourvu que par rapport à celles-ci le domaine des chargements potentiellement supportables, défini comme au § 2.3.4, soit encore étoilé de centre 0. Il en va ainsi par exemple pour le problème de la capacité portante des fondations superficielles avec les critères de résistance classiques pour les sols.

## 7.7 - APPLICABILITÉ DES RÉSULTATS DU CALCUL A LA RUPTURE

---

### 7.7.1 - GÉNÉRALITÉS

---

Le calcul à la rupture permet lorsque l'on effectue une vérification, d'affirmer avec certitude "l'instabilité" d'un ouvrage lorsque le chargement qui est imposé à celui-ci est extérieur à  $K$  ou encore lorsque le coefficient de rupture est inférieur à 1 ; ce résultat est fort intéressant car bien des méthodes classiquement utilisées n'y aboutissent pas ; par contre, il n'est pas possible d'obtenir, par le calcul à la rupture seul, une certitude de "stabilité" de l'ouvrage ce qui permettrait d'effectuer des dimensionnements.

Ainsi que nous l'avons dit, il n'y a pas lieu de s'étonner de cette constatation qui résulte, en fait, de l'information fournie au départ et sur laquelle sont fondés tous les raisonnements. Seules des données sur le comportement du matériau constitutif, dans son domaine de résistance, peuvent permettre d'affiner les conclusions dans le sens souhaité. Toutefois, il est clair que l'on sera alors amené, pour aboutir à de nouvelles conclusions concernant les possibilités pour l'ouvrage d'utiliser ses potentialités de résistance, à sortir des raisonnements si simples du calcul à la rupture : en suivant l'histoire de charge imposée à l'ouvrage à partir d'un état initial connu, on étudiera sa réponse à chaque instant.

On voit donc que les possibilités d'utilisation pratique d'une telle approche, même à supposer que l'on connaisse parfaitement le comportement des matériaux constitutifs (ce qui est souvent loin d'être le cas : par exemple, en Mécanique des Sols) seront elles-mêmes vite limitées par l'ampleur du travail à effectuer. Pour cette raison on devra, dans la majorité des cas, se contenter d'un compromis reposant sur l'Art de l'ingénieur, qui consistera à évaluer *a priori* quelle partie des potentialités de résistance du système peut être prise en compte ; ceci reviendra à considérer l'ouvrage comme stable lorsque son coefficient de rupture sera supérieur à un certain seuil supérieur à 1, ou encore à travailler sur un coefficient pondéré construit à partir du coefficient de rupture de l'ouvrage, et qui sera, lui, comparé à la valeur 1.

On présentera au chapitre III la théorie de l'Analyse limite qui, sous les hypothèses énoncées à propos des problèmes d'élasto-plasticité (Salençon et Halphen, 1981), permet d'affirmer que le système utilisera pleinement toutes ses potentialités de résistance : ceci repose en particulier sur la *parfaite-plasticité* du matériau constitutif lorsqu'il atteint sa limite de résistance, mais ce n'est pas la seule hypothèse. Dans ce cas on pourra, de ce point de vue, fixer au coefficient de rupture un seuil égal à l'unité.

On montrera au § 7.7.2 sur un exemple, deux cas extrêmes qui peuvent se produire, correspondant l'un à un comportement parfaitement-plastique, comme évoqué ci-dessus, l'autre à la rupture fragile. La complexité des problèmes rencontrés dans la pratique est en fait beaucoup plus grande car la rupture des matériaux usuels lorsque l'on atteint la limite de résistance est bien souvent un compromis entre la parfaite-plasticité, qui correspondrait à une ductilité illimitée, et la fragilité.

L'incidence des considérations ci-dessus sur le concept de *coefficient de sécurité* d'un ouvrage vaut peut-être d'être évoquée : pour l'ingénieur constructeur, le problème posé est un problème pratique :

*"assurer la construction d'un ouvrage qui doit être utilisé sous des charges et dans des conditions imposées".*

Le problème étudié par la théorie est toujours un problème modélisé : par la géométrie, par les hypothèses de chargement, par le comportement des matériaux, etc ;

la réponse apportée au problème modélisé n'est parfois que partielle ; elle est, en outre, plus ou moins bien adaptée au problème posé ; enfin, elle ne prend pas en compte les conditions de réalisation.

Le coefficient de sécurité a pour but de rendre possible l'utilisation pratique de cette réponse. De ce point de vue, le coefficient de rupture est un élément dans la fabrication du coefficient de sécurité : il se place du point de vue de la "stabilité" de l'ouvrage ; outre le fait que, comme on l'a dit, il n'est relié qu'aux potentialités de résistance de l'ouvrage (sauf sous certaines hypothèses), on doit aussi remarquer que, par nature même, il ne se préoccupe aucunement des déformations tolérables pour celui-ci.

La figure 23 présente schématiquement les considérations développées ci-dessus ; on trouvera des réflexions sur ce sujet dans (Matar et Salençon, 1979).

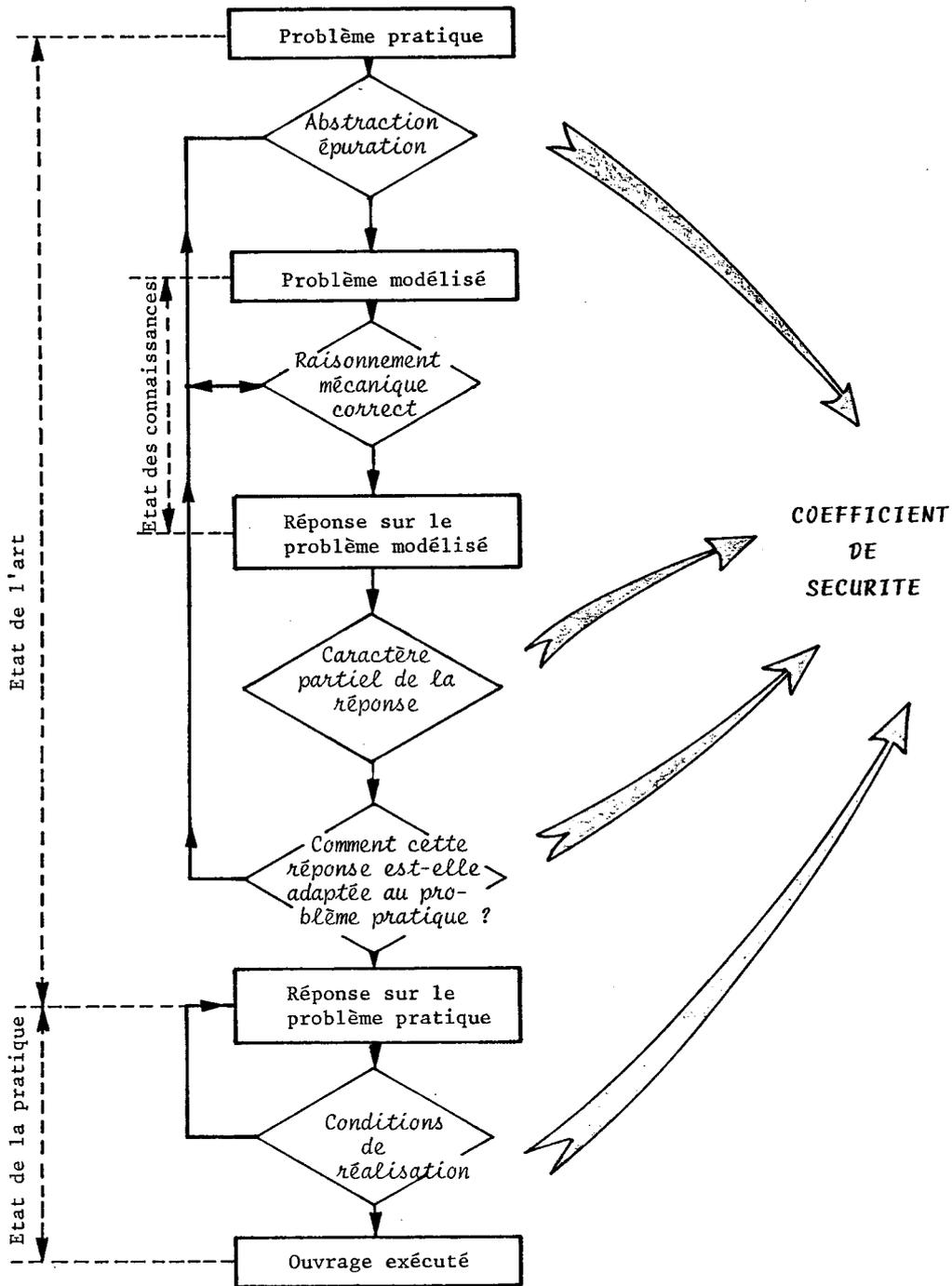


Figure 23 : Réflexions sur le concept de coefficient de sécurité.

7.7.2 - ÉTUDE DE L'EXEMPLE DE LA STRUCTURE DE LA FIGURE 1

---

Reprenant l'exemple de la structure introduite à la figure 1, on suppose maintenant que le comportement des éléments constitutifs dans leur domaine de résistance est connu (figure 24).

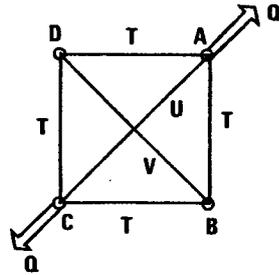


Figure 24 :  
Structure réticulée étudiée  
à titre d'exemple.

Deux cas seront examinés, représentés à la figure 25 :

- barres linéairement-élastiques et parfaitement-plastiques
- barres linéairement-élastiques et fragiles en traction.

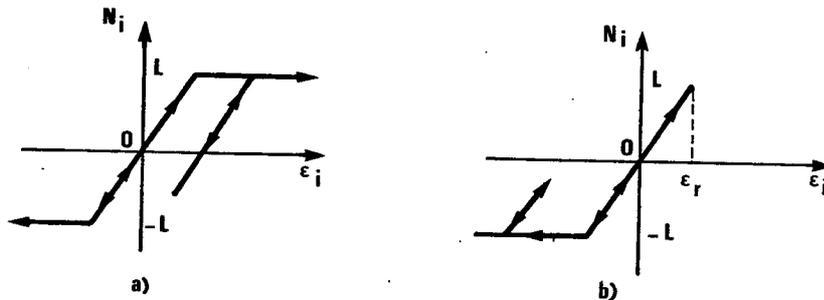


Figure 25 : Comportement des éléments constitutifs de la structure de la figure 24 <sup>(1)</sup>

L'état initial de la structure étant supposé naturel, on suit un processus de chargement monotone croissant ( $Q \nearrow$ ).

Avec le comportement a) on a à traiter un problème classique d'élasto-plasticité (cf. "Elasto-plasticité" chap. II).  $Q$  croissant, la phase élastique initiale de la structure correspond à  $0 < Q < L\sqrt{2}$  : elle est limitée par la plastification de la barre AC en traction. Cette barre peut ensuite continuer à se

---

<sup>(1)</sup> Les notations et conventions de signes sont celles du § 2.1

déformer plastiquement sous la force constante  $L$  : c'est la phase élasto-plastique qui s'achève pour  $Q = 2L$  lorsque la barre  $BD$  atteint la limite de plastification en compression. Pour cette structure toutes les potentialités de résistance sont alors utilisées puisque l'on a mis en évidence au § 2.1 que  $Q^+ = 2L$ .

Avec le comportement b), rien n'est modifié quant à la phase élastique initiale :  $0 < Q < L\sqrt{2}$ . Pour  $Q = L\sqrt{2}$ , la barre  $AC$  atteint la limite de rupture  $L$  et l'extension de rupture correspondante  $\epsilon_R$  : elle ne peut ne s'allonger ni supporter aucun accroissement de traction. L'augmentation de  $Q$  au-delà de  $L\sqrt{2}$  entraîne donc nécessairement la rupture de  $AC$ , qui entraîne elle-même la rupture des cotés du carré car la force  $y$  devient égale à  $T = Q\sqrt{2}/2$ , elle-aussi supérieure à  $L$ . La structure manifeste donc un comportement élastique-fragile ; sa charge de ruine dans ce processus est  $L\sqrt{2}$  ; il n'est pas possible d'y atteindre la charge extrême  $Q^+$ .

On vérifiera par contre que si la structure était soumise, à partir de l'état naturel, à un trajet de charge de compression croissante ( $Q < 0$  et  $Q \searrow$ ), il serait possible d'atteindre la charge extrême  $Q^- = -2L$  que le comportement des barres soit a) ou b) (figure 26).

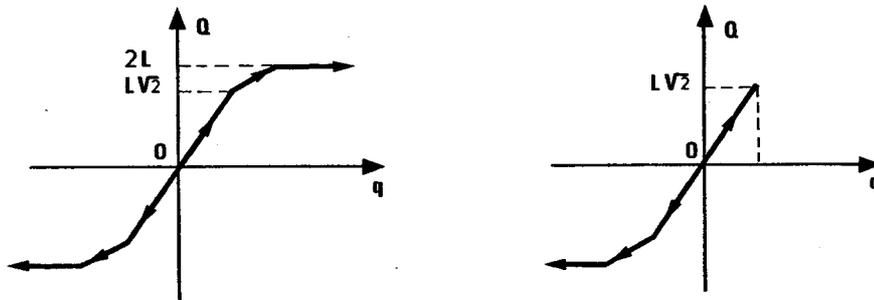


Figure 26 : Comportement de la structure de la figure 24, pour les comportements a) et b) des barres, dans un trajet de charge croissant en traction ou en compression.

---

 8 - GÉNÉRALISATIONS
 

---

La théorie du Calcul à la Rupture a été ici présentée, selon le principe général que nous avons adopté, sur le modèle du milieu continu tridimensionnel. Il est clair que les raisonnements mis en oeuvre et les résultats obtenus se transposent sans difficulté à toutes les autres modélisations utilisées en mécanique des solides :

- les structures réticulées, évidemment ; l'une d'entre elles a d'ailleurs servi d'exemple illustratif ;
- les structures à barres fléchies ;
- les plaques en flexion ; etc. ;
- mais aussi la modélisation du milieu continu bidimensionnel pour les problèmes plans, une fois établis la signification de celle-ci et le critère à prendre en compte (cf. Chapitre V).

Le chapitre suivant est en quelque sorte un formulaire de divers critères usuels et des fonctions  $\pi$  correspondantes, pour le milieu continu tridimensionnel et dans les cas évoqués ci-dessus. On traitera ensuite, dans des chapitres spécialisés, des particularités des diverses applications pratiques.

Quelques remarques peuvent d'ores et déjà être faites.

1° Le domaine de résistance pour l'élément de milieu continu généralisé (poutre, plaque, etc.) pourra être obtenu de deux façons :

- . soit directement comme un résultat expérimental,
- . soit par le calcul à la rupture à partir du domaine de résistance connu pour le matériau constitutif. La démarche suivie alors est homologue de celle suivie en Résistance des Matériaux (élasticité), en élasto-plasticité (Salençon et Halphen, 1981), en viscoélasticité également . Les contraintes généralisées du milieu étudié étant définies (par exemple : le moment fléchissant et l'effort normal pour l'élément de poutre), on pose le problème de calcul à la rupture suivant : détermination des potentialités de résistance pour le système *tridimensionnel* correspondant à la modélisation, soumis à un chargement dont les paramètres ne sont autres que les composantes de la contrainte généralisée (par exemple : poutre droite soumise à ses deux extrémités à des moments de flexion et des efforts normaux égaux et opposés appliqués par des solides indéformables). Le domaine ainsi déterminé, ou

approché, sera ensuite pris comme domaine de résistance pour l'élément de milieu continu généralisé. Il va de soi que, reprenant les considérations développées au § 7.7.1, la validité pratique de ce domaine sera liée au comportement du matériau constitutif dans son domaine de résistance.

2° Comme on l'a dit au § 2.3.2, les conditions de contact entre solides constituant le système étudié sont prises en compte au titre des conditions de résistance pour le matériau constitutif. Ainsi en particulier, pour une structure, les conditions d'appui devront être traitées en considérant qu'il y a :

- au titre des équations d'équilibre, une liaison totale ;
- au titre des conditions de résistance, un *domaine de résistance* pour l'appui, défini par la condition de contact.

On devra donc prendre garde que cette démarche, qui est la seule correcte du point de vue théorique, conduit dans l'approche par les vitesses à considérer des champs cinématiquement admissibles pour lesquels tous les déplacements sont nuls aux appuis, présentant éventuellement des discontinuités, infiniment près de ceux-ci, déterminées de façon à rendre finie la valeur de la fonction  $\pi$  correspondante définie à partir du domaine de résistance de l'appui.

On retiendra que, lorsqu'il s'agit de structures pour lesquelles interviennent simplement des conditions aux appuis du type liaisons sans frottement unilatérales ou bilatérales, encastrement, bord libre, il y a équivalence entre la démarche ci-dessus et celle qui consiste à imposer aux champs cinématiquement admissibles, les conditions sur les déplacements aux appuis. Il n'en va pas de même dans le cas général.

Enfin, on peut mentionner, parmi les généralisations, l'application du calcul à la rupture à l'analyse de la stabilité des voûtes en maçonnerie. En fait, comme cela est montré par Delbecq (1982), il ne s'agit pas, à proprement parler, d'une généralisation mais plutôt, comme dans le cas des analyses de stabilité de pente en mécanique des sols (cf. Coussy et Salençon, 1979), d'approches par l'extérieur par les contraintes menées dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel en raisonnant sur des grandeurs statiques globales. On trouvera dans Delbecq (1981) une abondante bibliographie sur le sujet, mentionnant de nombreux articles historiques dont le mémoire déjà cité de Coulomb (1773), celui de Méry (1840) où est introduite la célèbre épure, et les recherches récentes de Heyman (1966, 1969, 1972, 1980).

Nous reproduirons ici, à propos de l'épure de Méry, la citation extraite des travaux de Durand-Claye (1867, 1880) qui est donnée dans (Delbecq, 1981) ; elle montre que la théorie du calcul à la rupture, que nous avons présentée ici sous une forme générale grâce aux possibilités ouvertes par les mathématiques contemporaines (Moreau, 1966), correspond bien comme on l'a dit au raisonnement des bâtisseurs : " .... A chaque valeur prise par la poussée, à chaque point d'application correspond une courbe de pression : on cherche si, parmi ces courbes, il s'en trouve une correspondant à l'équilibre ... Ainsi, recherche de la possibilité d'une solution d'équilibre, voilà quel est le véritable sens de la construction et des tâtonnements indiqués par M. Méry", (équilibre est pris au sens de respect des conditions d'équilibre et des capacités de résistance du matériau constitutif).

*Chapitre II*

*Critères de résistance usuels*

*et fonctions  $\pi(\cdot)$  correspondantes*

---

## 1 - INTRODUCTION

---

Ce chapitre présente un formulaire de critères de résistances utilisés de façon courante dans les applications pratiques et des fonctions "duales",  $\pi(\cdot)$  correspondantes. Aucun détail de raisonnement ne sera donné et l'on traitera successivement :

- du milieu continu tridimensionnel,
- des interfaces (entre solides tridimensionnels),
- des milieux continus généralisés unidimensionnels,
- des milieux continus généralisés bidimensionnels.

Dans chaque cas on commencera par un paragraphe général rappelant les notations correspondant au milieu étudié et la définition des contraintes et vitesses de déformations, ou contraintes généralisées et vitesses de déformation généralisées, en cause, ainsi que l'expression de la fonction " $P(\underline{v})$ " sous forme d'intégrales des fonctions " $\pi$ ".

Le chapitre V sera consacré aux problèmes plans de calcul à la rupture: on y introduira les concepts de milieux continus bidimensionnels en calcul à la rupture (en contrainte plane et en déformation plane). On y donnera en annexe les critères de résistance et les fonctions "duales" pour les milieux continus bidimensionnels suivants :

- milieu de von Mises en déformation plane,
- milieu de Tresca en déformation plane,
- milieu de von Mises en contrainte plane,
- milieu de Tresca en contrainte plane.

---

 2 - MILIEU CONTINU TRIDIMENSIONNEL
 

---

 2.1 - NOTATIONS
 

---

$\underline{\underline{\sigma}}$  : tenseur des contraintes (composantes  $\sigma_{ij}$ )  
 $\sigma_{\lambda}$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$  : contraintes principales  
 $\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}$  : déviateur des contraintes  
 $\underline{\underline{d}}$  : tenseur des vitesses de déformation (composantes  $d_{ij}$ )  
 $d_{\lambda}$ ,  $\lambda = 1, 2, 3$  : valeurs principales de  $\underline{\underline{d}}$   
 $\underline{V} = \llbracket \underline{v} \rrbracket$  : discontinuité de la vitesse  $\underline{v}$  au franchissement  
 de la surface de discontinuité  $\Sigma$  en un point de  
 normale  $\underline{n}$

$$P(\underline{v}) = \int_V \pi(\underline{x}; \underline{\underline{d}}(\underline{x})) dV + \int_{\Sigma} \pi(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); \underline{V}(\underline{x})) d\Sigma$$

2.2 - CRITÈRE DE VON MISES

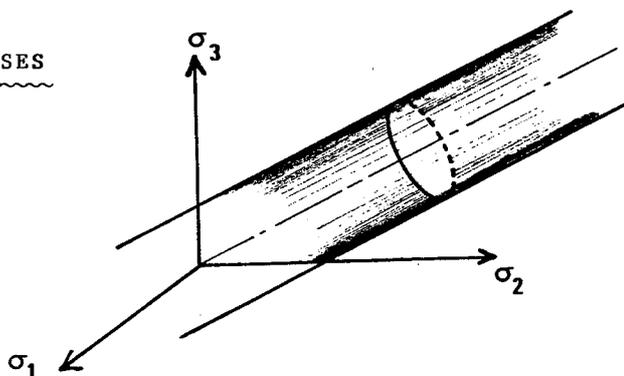


Figure 1 : Critère de von Mises :  
domaine de résistance.

Matériau isotrope

♦ Domaine de résistance convexe défini par  $f(\underline{\sigma}) \leq 0$  avec :

$$(2.1) \quad f(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2} \text{tr } \underline{\underline{\delta}}^2 - k^2 = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{ji} - k^2$$

$k$  est la limite de résistance en cisssion simple .

♦ fonctions  $\pi$  :

(2.2 a)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{\underline{d}}) &= +\infty \quad \text{si } \text{tr } \underline{\underline{d}} \neq 0 \\ \pi(\underline{\underline{d}}) &= k \sqrt{2 \text{tr } \underline{\underline{d}}^2} \quad \text{si } \text{tr } \underline{\underline{d}} = 0 \end{aligned}$$

soit encore :

(2.2 b)

$$\pi(\underline{\underline{d}}) = k \sqrt{2 \text{tr } \underline{\underline{d}}^2} + \text{Sup}_{p \in \mathcal{R}} \left\{ p \cdot \text{tr } \underline{\underline{d}} \right\} .$$

Et :

(2.3 a)

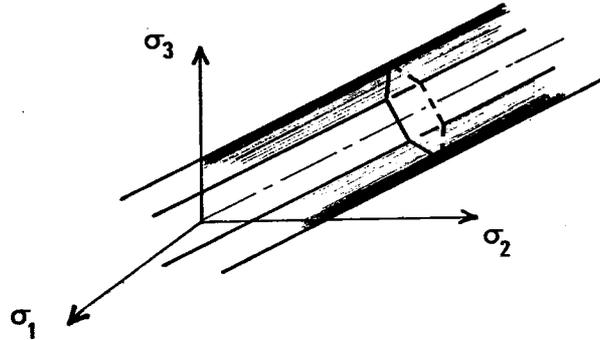
$$\begin{aligned} \pi(\underline{\underline{n}} ; \underline{\underline{V}}) &= +\infty \quad \text{si } \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{n}} \neq 0 \\ \pi(\underline{\underline{n}} ; \underline{\underline{V}}) &= k |\underline{\underline{V}}| \quad \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{n}} = 0 \end{aligned}$$

soit encore :

(2.3 b)

$$\pi(\underline{\underline{n}} ; \underline{\underline{V}}) = k |\underline{\underline{V}}| + \text{Sup}_{p \in \mathcal{R}} \left\{ p \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{n}} \right\} .$$

### 2.3 - CRITÈRE DE TRESCA



Matériau isotrope

- ◆ Domaine de résistance convexe défini par  $f(\underline{\sigma}) \leq 0$  avec :

Figure 2 : Critère de Tresca : domaine de résistance.

(2.4)

$$f(\underline{\sigma}) = \sup_{\substack{i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3}} (\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0)$$

$\sigma_0$  est la limite de résistance en traction simple ( $\sigma_0/2$  est la cohésion).

- ◆ Fonctions  $\pi$  :

(2.5 a)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{d}) &= +\infty && \text{si } \text{tr } \underline{d} \neq 0 \\ \pi(\underline{d}) &= \frac{\sigma_0}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_3|) && \text{si } \text{tr } \underline{d} = 0 \end{aligned}$$

soit encore :

(2.5 b)

$$\pi(\underline{d}) = \frac{\sigma_0}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_3|) + \sup_{p \in \mathcal{R}} \{ p \cdot \text{tr } \underline{d} \}$$

Et :

(2.6 a)

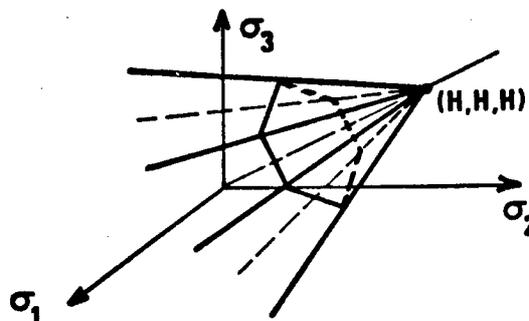
$$\begin{aligned} \pi(\underline{n} ; \underline{V}) &= +\infty && \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \neq 0 \\ \pi(\underline{n} ; \underline{V}) &= \frac{\sigma_0}{2} |\underline{V}| && \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} = 0 \end{aligned}$$

soit encore :

(2.6 b)

$$\pi(\underline{n} ; \underline{V}) = \frac{\sigma_0}{2} |\underline{V}| + \sup_{p \in \mathcal{R}} \{ p \cdot \underline{V} \cdot \underline{n} \}$$

## 2.4 - CRITÈRE DE COULOMB



Matériau *isotrope*

- ♦ Domaine de résistance convexe défini par  $f(\underline{\sigma}) \leq 0$  avec :

Figure 3 : Critère de Coulomb : domaine de résistance.

(2.7)

$$f(\underline{\sigma}) = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \left\{ \sigma_i (1 + \sin \varphi) - \sigma_j (1 - \sin \varphi) - 2 C \cos \varphi \right\}$$

$C$  est la cohésion,  $\varphi$  l'angle de "frottement interne" ; on posera  $H = C \cotg \varphi$ , appelée "pression de cohésion", qui apparaît comme la limite de résistance en traction triple.

- ♦ Fonctions  $\pi$  :

(2.8 a)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{d}) &= +\infty \\ &\text{si } \operatorname{tr} \underline{d} < (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi ; \\ \pi(\underline{d}) &= H \cdot \operatorname{tr} \underline{d} \\ &\text{si } \operatorname{tr} \underline{d} \geq (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi . \end{aligned}$$

Soit encore :

(2.8 b) 
$$\pi(\underline{d}) = H \cdot \operatorname{tr} \underline{d} + \sup_{p \geq 0} \left\{ p \left[ (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi - \operatorname{tr} \underline{d} \right] \right\}$$

Et :

(2.9 a)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{n}; \underline{V}) &= +\infty \\ &\text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} < |\underline{V}| \sin \varphi ; \\ \pi(\underline{n}; \underline{V}) &= H \underline{V} \cdot \underline{n} \\ &\text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq |\underline{V}| \sin \varphi \end{aligned}$$

soit encore :

$$(2.9 b) \quad \pi(\underline{n}; \underline{V}) = H \underline{V} \cdot \underline{n} + \sup_{p \geq 0} \left\{ p \left[ |\underline{V}| \sin \varphi - \underline{V} \cdot \underline{n} \right] \right\}$$

• REMARQUE

Dans (2.8), les  $\underline{d}$  pour lesquels  $\text{tr} \underline{d} > (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi$  correspondent aux normales au sommet de la pyramide représentative du critère de Coulomb ; d'une façon générale l'inégalité large est équivalente à dire que les  $\underline{d}$  sont de la forme :

$$d_1 = (\lambda_1 + \lambda_6)(1 + \sin \varphi) - (\lambda_3 + \lambda_4)(1 - \sin \varphi)$$

$$d_2 = (\lambda_2 + \lambda_4)(1 + \sin \varphi) - (\lambda_1 + \lambda_5)(1 - \sin \varphi)$$

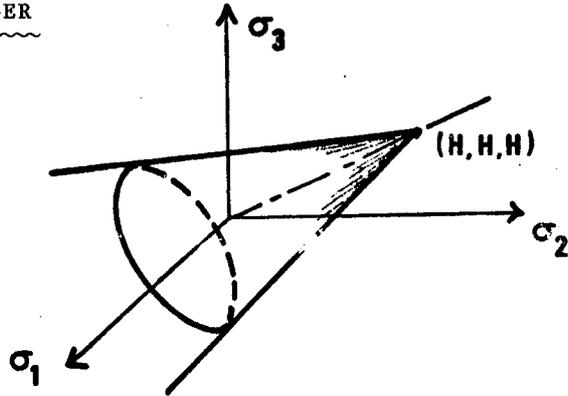
$$d_3 = (\lambda_3 + \lambda_5)(1 + \sin \varphi) - (\lambda_2 + \lambda_6)(1 - \sin \varphi)$$

avec  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ).

On prendra garde au fait que certaines expressions de  $\pi(\underline{d})$  données dans la littérature sont erronées.

D'autre part, d'après (2.9), pour que  $\pi(\underline{V}) < \infty$ , il faut que  $\underline{V}$  ait une composante normale positive ("décollement"), et que son inclinaison  $\alpha$  sur la surface  $\Sigma$  soit comprise entre  $\varphi$  et  $\pi - \varphi$  bornes comprises ; l'intervalle  $\varphi < \alpha < \pi - \varphi$ , souvent omis dans la littérature, provient des normales au sommet de la "courbe intrinsèque de déformation plane" (chap. I § 4.6.2 et chap. V § 5.2).

2.5 - CRITÈRE DE DRUCKER-PRAGER



Matériau isotrope

- ♦ Domaine de résistance convexe défini par  $f(\underline{\sigma}) \leq 0$  avec :

Figure 4 : Critère de Drucker-Prager : domaine de résistance.

(2.10)

$$f(\underline{\sigma}) = \left[ \frac{1}{2} \text{tr} \underline{\underline{\underline{\sigma}}^2} \right]^{1/2} - \frac{3 \sin \varphi}{\sqrt{3(3 + \sin^2 \varphi)}} \left( H - \frac{1}{3}(\text{tr} \underline{\sigma}) \right)$$

H et  $\varphi$  sont les paramètres définissant la résistance ; H apparaît comme la limite de résistance en traction triple.

- ♦ Fonctions  $\pi$  :

(2.11 a)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{\underline{\underline{d}}}) &= +\infty \\ \text{si } \text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}} &< \sqrt{\frac{2 \sin^2 \varphi}{3 + \sin^2 \varphi} [3 \text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}}^2 - (\text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}})^2]} \\ \pi(\underline{\underline{\underline{d}}}) &= H \cdot \text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}} \\ \text{si } \text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}} &\geq \sqrt{\frac{2 \sin^2 \varphi}{3 + \sin^2 \varphi} [3 \text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}}^2 - (\text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}})^2]} \end{aligned}$$

Soit encore :

(2.11 b)

$$\pi(\underline{\underline{\underline{d}}}) = H \cdot \text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}} + \text{Sup}_{p \geq 0} \left\{ p \left( \sqrt{\frac{2 \sin^2 \varphi}{3 + \sin^2 \varphi} [3 \text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}}^2 - (\text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}})^2]} - \text{tr} \underline{\underline{\underline{d}}} \right) \right\}$$

Et :

(2.12 a)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{n} ; \underline{V}) &= +\infty \\ &\text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} < |\underline{V}| \sin \varphi ; \\ \pi(\underline{n} ; \underline{V}) &= H \underline{V} \cdot \underline{n} \\ &\text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq |\underline{V}| \sin \varphi . \end{aligned}$$

Soit encore :

$$(2.12 b) \quad \pi(\underline{n} ; \underline{V}) = H \underline{V} \cdot \underline{n} + \sup_{p \geq 0} \left\{ p \left[ |\underline{V}| \sin \varphi - \underline{V} \cdot \underline{n} \right] \right\}$$

• REMARQUE

A noter que le choix des paramètres  $H$  et  $\varphi$ , pour caractériser la résistance du matériau et définir le critère de Drucker-Prager comme indiqué dans (2.10), a été fait de manière à identifier les expressions de  $\pi(\underline{n} ; \underline{V})$  avec celles obtenues pour le critère de Coulomb (2.9).

2.6 - CRITÈRE DE TRESCA SANS

RÉSISTANCE A LA TRACTION

Matériau isotrope

- ♦ Domaine de résistance convexe, défini comme l'intersection du domaine de résistance pour le critère de Tresca (§ 2.3) et du domaine "contrainte normale toujours compressive"; soit  $f(\underline{\sigma}) \leq 0$  avec :

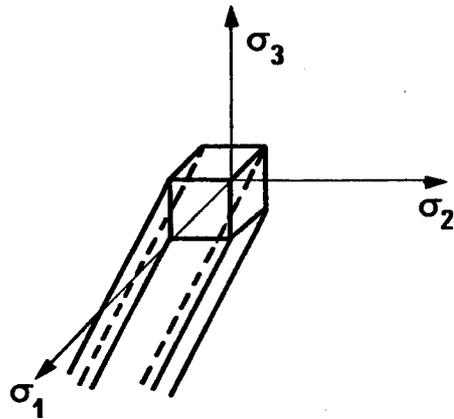


Figure 5 : Critère de Tresca sans résistance à la traction : domaine de résistance.

(2.13)

$$f(\underline{\sigma}) = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \{ \sigma_i - \sigma_j - \sigma_0, \sigma_i \}$$

$\sigma_0/2$  est la cohésion.

- ♦ Fonctions  $\pi$  :

(2.14 a)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{d}) &= +\infty && \text{si } \text{tr } \underline{d} < 0 ; \\ \pi(\underline{d}) &= \frac{\sigma_0}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_3| - \text{tr } \underline{d}) && \text{si } \text{tr } \underline{d} \geq 0 . \end{aligned}$$

soit encore :

(2.14 b)

$$\pi(\underline{d}) = \frac{\sigma_0}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_3|) + \sup_{p \geq \sigma_0/2} (-p \text{tr } \underline{d})$$

Et :

(2.15 a)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{n} ; \underline{V}) &= +\infty && \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} < 0 ; \\ \pi(\underline{n} ; \underline{V}) &= \frac{\sigma_0}{2} (|\underline{V}| - \underline{V} \cdot \underline{n}) && \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq 0 \end{aligned}$$

Soit encore :

$$(2.15 \text{ b}) \quad \pi(\underline{n} ; \underline{V}) = \frac{\sigma_0}{2} |\underline{V}| + \sup_{p \geq \sigma_0/2} (-p \underline{V} \cdot \underline{n})$$

• REMARQUE

Les expressions (2.14) et (2.15) obtenues pour  $\pi(\underline{d})$  et  $\pi(\underline{n} ; \underline{V})$  respectivement, coïncident avec celles trouvées dans le cas du critère de Tresca, lorsque  $\text{tr } \underline{d} = 0$  (resp.  $\underline{V} \cdot \underline{n} = 0$ ). La formule (2.15) donnant  $\pi(\underline{n} ; \underline{V})$  s'interprète sans difficulté si l'on considère la "courbe intrinsèque de déformation plane" correspondant au critère (2.13), représentée à la figure 6 (cf. chap. I § 4.6.2. et chap. V § 5.2).

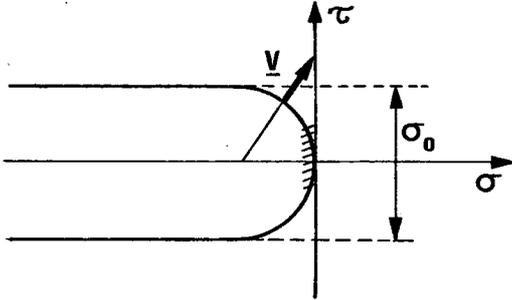


Figure 6 : Courbe intrinsèque pour le critère de Tresca sans résistance à la traction.

## 2.7 - CRITÈRE DE COULOMB

### SANS RÉSISTANCE A LA TRACTION

Matériau *isotrope*

- ◆ Domaine de résistance convexe défini comme l'intersection du domaine de résistance pour le critère de Coulomb (§ 2.4) et du domaine "contrainte normale toujours compressive" ; soit  $f(\underline{\sigma}) \leq 0$  avec :

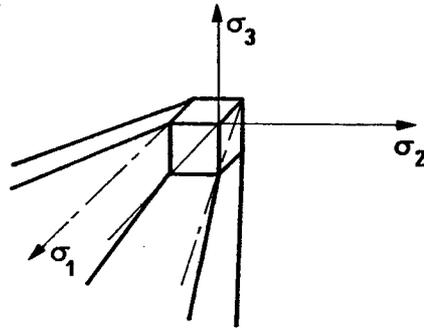


Figure 7 : Critère de Coulomb sans résistance à la traction : domaine de résistance.

$$(2.16) \quad f(\underline{\sigma}) = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \left\{ \left[ \sigma_i (1 + \sin \varphi) - \sigma_j (1 - \sin \varphi) - 2 C \cos \varphi \right], \sigma_i \right\}$$

$C$  est la cohésion,  $\varphi$  l'angle de frottement interne.

- ◆ Fonctions  $\pi$  :

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \pi(\underline{d}) &= +\infty \\ &\text{si } \text{tr } \underline{d} < (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \cdot \sin \varphi \\ \pi(\underline{d}) &= C(|d_1| + |d_2| + |d_3| - \text{tr } \underline{d}) \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\text{si } \text{tr } \underline{d} \geq (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Et :

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \pi(\underline{n} ; \underline{V}) &= +\infty && \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} < |\underline{V}| \sin \varphi \\ \pi(\underline{n} ; \underline{V}) &= C(|\underline{V}| - \underline{V} \cdot \underline{n}) \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq |\underline{V}| \sin \varphi \end{aligned}$$

• REMARQUE

Les expressions (2.17) et (2.18) obtenues pour  $\tilde{\pi}(\underline{d})$  et  $\pi(\underline{n}; \underline{V})$  respectivement, coïncident avec celles trouvées dans le cas du critère de Coulomb lorsque  $\text{tr } \underline{d} = (|d_1| + |d_2| + |d_3| \sin \varphi)$  (ou  $\underline{V} \cdot \underline{n} = \underline{V} \sin \varphi$  resp.). La formule (2.18) donnant  $\pi(\underline{n}; \underline{V})$  s'interprète aisément en considérant la "courbe intrinsèque de déformation plane" pour le critère (2.16) (figure 8 et cf. chap. I, § 4.6.2. et chap. V, § 5.2).

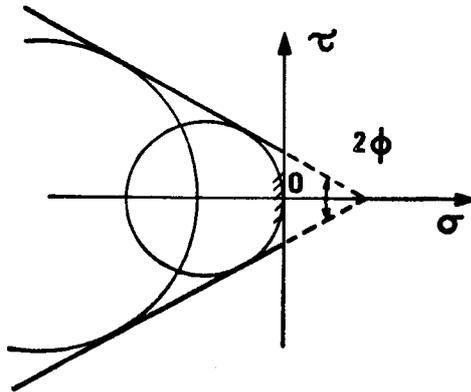


Figure 8 : Courbe intrinsèque pour le critère de Coulomb sans résistance à la traction.

## 2.8 - CRITÈRE DE TRESCA TRONQUÉ EN TRACTION

Matériau *isotrope*

- ◆ Domaine de résistance *convexe* défini comme l'intersection du domaine de résistance pour le critère de Tresca (§ 2.3) et du domaine "contrainte normale inférieure à la limite en traction  $T$ "; soit  $f(\underline{\sigma}) \leq 0$  avec :

(2.19)

$$f(\underline{\sigma}) = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \left\{ \sigma_i - \sigma_j - \sigma_0, \sigma_i - T \right\}$$

◆ Fonctions  $\pi$  :

(2.20)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{d}) &= +\infty \\ &\text{si } \text{tr } \underline{d} < 0, \\ \pi(\underline{d}) &= \frac{\sigma_0}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_3| - \text{tr } \underline{d}) + T \text{tr } \underline{d} \\ &\text{si } \text{tr } \underline{d} \geq 0. \end{aligned}$$

Et :

(2.21)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{n}; \underline{V}) &= +\infty \quad \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} < 0; \\ \pi(\underline{n}; \underline{V}) &= \frac{\sigma_0}{2} (|\underline{V}| - \underline{V} \cdot \underline{n}) + T \underline{V} \cdot \underline{n} \quad \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq 0 \end{aligned}$$

## 2.9 - CRITÈRE DE COULOMB TRONQUÉ EN TRACTION

Matériau isotrope

♦ Domaine de résistance convexe défini comme l'intersection du domaine de résistance pour le critère de Coulomb (§ 2.4) et du domaine "contrainte normale inférieure à la limite en traction T" ( $T < C \cotg \varphi$ ) ; soit  $f(\underline{\sigma}) \leq 0$  avec :

$$(2.22) \quad f(\underline{\sigma}) = \text{Sup}_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \left\{ \left[ \sigma_i (1 + \sin \varphi) - \sigma_j (1 - \sin \varphi) - 2 C \cos \varphi \right], \sigma_i - T \right\}$$

C est la cohésion et  $\varphi$  l'angle de frottement interne.

♦ Fonctions  $\pi$  :

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \pi(\underline{d}) &= +\infty \\ &\text{si } \text{tr } \underline{d} < (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \cdot \sin \varphi ; \\ \pi(\underline{d}) &= C(|d_1| + |d_2| + |d_3| - \text{tr } \underline{d}) \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\quad + \frac{T}{1 - \sin \varphi} \left[ \text{tr } \underline{d} - (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi \right] \\ &\text{si } \text{tr } \underline{d} \geq (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \varphi . \end{aligned}$$

Et :

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \pi(\underline{n} ; \underline{V}) &= +\infty && \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} < |\underline{V}| \sin \varphi \\ \pi(\underline{n} ; \underline{V}) &= C(|\underline{V}| - \underline{V} \cdot \underline{n}) \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\quad + \frac{T}{1 - \sin \varphi} (\underline{V} \cdot \underline{n} - |\underline{V}| \sin \varphi) \\ &\text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq |\underline{V}| \sin \varphi . \end{aligned}$$

**2.10- REMARQUES SUR LES CRITÈRES PRÉSENTÉS AUX § 2.6 à 2.9**

---

Les critères de Tresca et de Coulomb sans résistance à la traction sont utilisés dans certains problèmes de Mécanique des sols ; voir notamment : Drucker (1953, 1954), Chen (1975). Pour d'autres matériaux, le béton par exemple, on caractérise le domaine de résistance par un critère tronqué en traction pour une valeur faible, mais non nulle, de la traction : on pourra se reporter à ce propos à Chen et Drucker (1969), Chen (1970 et 1975), Chen et Covarrubias (1971).

---

**3 - INTERFACES ENTRE MILIEUX CONTINUS TRIDIMENSIONNELS**


---

3.1 - NOTATIONS

$S$  : surface définissant l'interface

$\underline{n}(\underline{x})$  : normale au point  $\underline{x}$  de  $S$ , dirigée du milieu (1) vers le milieu (2)

$\underline{T}(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$  : vecteur contrainte en  $\underline{x}$  sur la facette de normale  $\underline{n}(\underline{x})$ ; c'est la contrainte généralisée,  $\underline{\Sigma}$ , pour l'interface

$\sigma, \tau_1, \tau_2$  : composantes normale et tangentielles de  $\underline{T}$  sur  $(\underline{n}, \underline{t}_1, \underline{t}_2)$ , trièdre orthonormé

$\tau = (\tau_1^2 + \tau_2^2)^{1/2}$  :  $\sigma$  et  $\tau$  sont les composantes normale et tangentielle de  $\underline{T}$  sur  $\underline{n}$  et  $\underline{t}$  coaxial à  $\underline{T} - \underline{n}(\underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n})$

$\underline{V}(\underline{x}) = \underline{v}^{(2)}(\underline{x}) - \underline{v}^{(1)}(\underline{x})$  : vitesse relative en  $\underline{x}$  du milieu (2) par rapport au milieu (1); c'est la vitesse de déformation généralisée,  $\underline{\Delta}$ , pour l'interface.

$u_n, u_{t_1}, u_{t_2}$  : composantes normale et tangentielles de  $\underline{V}$  sur  $(\underline{n}, \underline{t}_1, \underline{t}_2)$ , trièdre orthonormé

$u_t = (u_{t_1}^2 + u_{t_2}^2)^{1/2}$  :  $u_n$  et  $u_t$  sont les composantes normale et tangentielle de  $\underline{V}$  sur  $\underline{n}$  et  $\underline{t}$  coaxial à  $\underline{V} - \underline{n}(\underline{V} \cdot \underline{n})$

$$P(\underline{v}) = \int_S \pi(\underline{V}) dS .$$

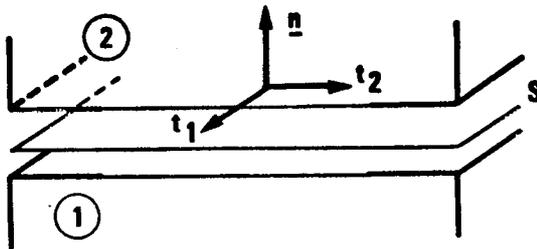


Figure 9 : Interface définie par la surface  $S$  entre les milieux (1) et (2).

### 3.2 - INTERFACE LISSE

(OU "SANS FROTTEMENT")

Interface *isotrope*

- ♦ Domaine de résistance convexe défini par  $f(\underline{T}) \leq 0$  avec :

(3.1)

$$f(\underline{T}) = \sup \{ \sigma, \tau \}$$

- ♦ Fonction  $\pi$  :

(3.2 a)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{V}) &= +\infty & \text{si } u_n < 0 ; \\ \pi(\underline{V}) &= 0 & \text{si } u_n \geq 0 \end{aligned}$$

soit encore :

(3.2 b)

$$\pi(\underline{V}) = \sup_{p \geq 0} \{ -p u_n \}$$

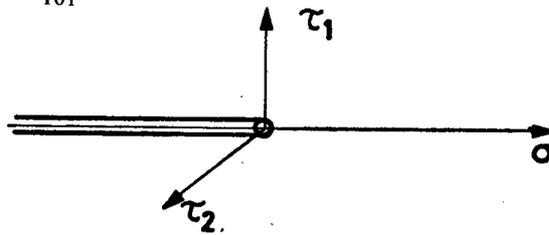


Figure 10 : Domaine de résistance pour l'interface lisse.

### 3.3 - INTERFACE AVEC FROTTEMENT "DE TYPE TRESCA", SANS RÉSISTANCE A LA TRACTION

Interface *isotrope*

- ♦ Domaine de résistance convexe défini par  $f(\underline{T}) \leq 0$  avec :

(3.3)

$$f(\underline{T}) = \sup \{ \sigma, \tau - k_i \}$$

$k_i$  désigne la cission limite de l'interface.

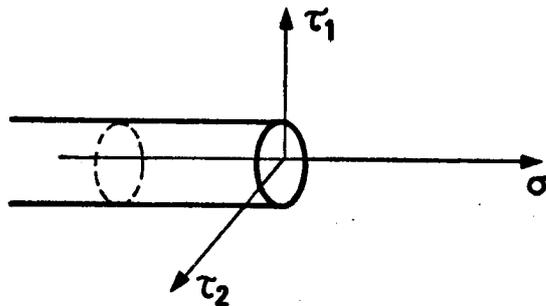


Figure 11 : Domaine de résistance pour l'interface avec frottement "de type Tresca".

♦ Fonctions  $\pi$  :

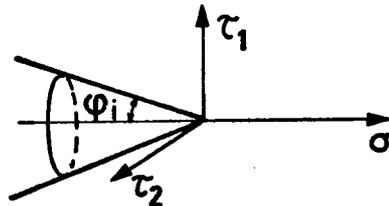
$$(3.4 a) \quad \begin{array}{l} \pi(\underline{V}) = +\infty \quad \text{si } u_n < 0 \\ \pi(\underline{V}) = k_i u_t \quad \text{si } u_n \geq 0 \end{array}$$

soit encore :

$$(3.4 b) \quad \pi(\underline{V}) = \sup_{p \geq 0} \left\{ -p u_n + k_i u_t \right\}$$

### 3.4 - INTERFACE AVEC FROTTEMENT

"DE TYPE COULOMB"



Interface *isotrope*

Figure 12 : Domaine de résistance pour l'interface avec frottement "de type Coulomb".

♦ Domaine de résistance convexe défini par  $f(\underline{T}) \leq 0$  avec :

$$(3.5) \quad f(\underline{T}) = \tau + \sigma \operatorname{tg} \varphi_i$$

$\varphi_i$  désigne l'angle de frottement sec de l'interface.

♦ Fonction  $\pi$  :

$$(3.6 a) \quad \begin{array}{l} \pi(\underline{V}) = +\infty \quad \text{si } u_n < u_t \operatorname{tg} \varphi_i \\ \pi(\underline{V}) = 0 \quad \text{si } u_n \geq u_t \operatorname{tg} \varphi_i \end{array}$$

soit encore :

$$(3.6 b) \quad \pi(\underline{V}) = \sup_{p \geq 0} \left\{ p(u_t \operatorname{tg} \varphi_i - u_n) \right\} .$$

### 3.5 - INTERFACE DITE "PARFAITEMENT RUGUEUSE"

Interface *isotrope*

♦ Domaine de résistance *convexe*, imposant uniquement que la contrainte nulle normale soit compressive ; soit  $f(\underline{T}) \leq 0$  avec :

(3.7)

$$f(\underline{T}) = \sigma$$

♦ Fonction  $\pi$  :

(3.8 a)

$$\begin{aligned} \pi(\underline{V}) &= +\infty \quad \text{si } u_n < |\underline{V}| ; \\ \pi(\underline{V}) &= 0 \quad \text{si } u_n = |\underline{V}| . \end{aligned}$$

soit encore :

(3.8 b)

$$\pi(\underline{V}) = \text{Sup}_{p \geq 0} \left\{ p(|\underline{V}| - u_n) \right\}$$

### 3.6 - INTERFACE A ADHÉRENCE TOTALE (OU "COLLÉE")

Interface *isotrope*

♦ Domaine de résistance *convexe* qui n'impose aucune condition à  $\underline{T}$  ; soit  $f(\underline{T}) \leq 0$  avec :

(3.9)

$$f(\underline{T}) = -C$$

où  $C$  est une constante strictement positive quelconque.

♦ Fonction  $\pi$  :

(3.10)

$$\pi(\underline{V}) = +\infty .$$

**3.7 - REMARQUE SUR LE TRAITEMENT DE L'INTERFACE**  
 ~~~~~  
DU POINT DE VUE GLOBAL
 ~~~~~

Si l'on considère les conditions à prendre en compte, du point de vue des capacités de résistance, en un point géométrique  $\underline{x}$  de  $S$  :

- 1° On se réfère pour l'état de contrainte dans le milieu (1), soit  $\underline{\sigma}^{(1)}(\underline{x})$ , au domaine de résistance de ce milieu, défini par exemple par la fonction  $f^{(1)}(\underline{x}; \cdot)$  soit :

$$(3.11) \quad f^{(1)}(\underline{x}; \underline{\sigma}^{(1)}(\underline{x})) \leq 0 ;$$

- 2° De même dans le milieu (2), pour l'état de contrainte  $\underline{\sigma}^{(2)}(\underline{x})$  :

$$(3.12) \quad f^{(2)}(\underline{x}; \underline{\sigma}^{(2)}(\underline{x})) \leq 0 ;$$

- 3° Pour le vecteur contrainte  $\underline{T}(\underline{x})$  sur l'interface qui sera lié à  $\underline{\sigma}^{(1)}(\underline{x})$  et  $\underline{\sigma}^{(2)}(\underline{x})$  par la condition d'équilibre :

$$(3.13) \quad \underline{\sigma}^{(1)}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x}) = \underline{\sigma}^{(2)}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) ,$$

on se réfère au domaine de résistance de l'interface défini par  $f_{\chi}(\underline{x}; \cdot)$ , soit :

$$(3.14) \quad f_{\chi}(\underline{x}; \underline{T}(\underline{x})) \leq 0 .$$

Pour les vitesses :

- 1° on aura à considérer dans le milieu (1) le tenseur vitesse de déformation  $\underline{d}^{(1)}(\underline{x})$  et à utiliser, en ce qui le concerne, la fonction  $\pi^{(1)}(\underline{x}; \cdot)$  correspondant à ce milieu ;

- 2° de même dans le milieu (2) avec  $\underline{d}^{(2)}(\underline{x})$  et  $\pi^{(2)}(\underline{x}; \cdot)$  ;

3° quant à la discontinuité de vitesse :

• au franchissement d'une surface  $\Sigma$  différente de  $S$  en  $\underline{x}$  la discontinuité sera nécessairement située soit dans le milieu (1) soit dans le milieu (2) et prise en compte avec la fonction  $\pi$  correspondante :  $\pi^{(1)}(\underline{x}, \underline{n}^{(1)}(\underline{x}) ; \underline{v}^{(1)}(\underline{x}))$  si  $\underline{v}(\underline{x})$ , notée alors  $\underline{v}^{(1)}(\underline{x})$  est dans le milieu (1), ou  $\pi^{(2)}(\underline{x}, \underline{n}^{(2)}(\underline{x}) ; \underline{v}^{(2)}(\underline{x}))$  si  $\underline{v}(\underline{x})$  est dans le milieu (2).

• au franchissement d'une surface  $\Sigma$  confondue avec  $S$  en  $\underline{x}$ , trois discontinuités de vitesse devront être considérées situées respectivement dans le milieu (1), dans l'interface et dans le milieu (2) :

$\underline{v}^{(1)}(\underline{x})$ ,  $\underline{v}^{(i)}(\underline{x})$ ,  $\underline{v}^{(2)}(\underline{x})$ , dont la somme constitue la discontinuité totale :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}^{(1)}(\underline{x}) + \underline{v}^{(i)}(\underline{x}) + \underline{v}^{(2)}(\underline{x})$$

et l'on aura alors :

$$P(\underline{v}) = \int_S \left\{ \pi^{(1)}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{v}^{(1)}(\underline{x})) + \pi^{(i)}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{v}^{(i)}(\underline{x})) \right. \\ \left. + \pi^{(2)}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \underline{v}^{(2)}(\underline{x})) \right\} dS .$$

---

 4 - MILIEUX CONTINUS GÉNÉRALISÉS UNIDIMENSIONNELS
 

---

 4.1 - NOTATIONS
 

---

Il s'agit de milieux curvilignes (barres, poutres, arcs), avec les notations suivantes :

- $s$  : abscisse curviligne sur la courbe définissant le milieu  
 $N(s)$  : effort normal sur la section d'abscisse  $s$   
 $\dot{u}(s)$  : composante tangentielle de la vitesse du point d'abscisse  $s$   
 $\dot{\epsilon}(s) = d\dot{u}/ds$  : vitesse d'extension à l'abscisse  $s$   
 $\dot{U}(s) = [\dot{u}(s)] = \dot{u}(s^+) - \dot{u}(s^-)$  : discontinuité de  $\dot{u}$  à l'abscisse  $s$   
 $C(s)$  : couple de torsion sur la section d'abscisse  $s$   
 $\dot{\alpha}(s)$  : composante tangentielle de la vitesse de rotation de la section d'abscisse  $s$   
 $\dot{\psi}(s) = d\dot{\alpha}/ds$  : vitesse de torsion  
 $\dot{\Psi}(s) = [\dot{\alpha}(s)] = \dot{\alpha}(s^+) - \dot{\alpha}(s^-)$  : discontinuité de  $\dot{\alpha}$  à l'abscisse  $s$

Pour une section possédant deux axes de symétrie rectangulaires :

- $M(s)$  : valeur algébrique du moment fléchissant supposé porté par l'un de ces axes  
 $\dot{\omega}(s)$  : composante de la vitesse de rotation de la section sur le même axe  
 $\dot{\chi}(s) = d\dot{\omega}/ds$  : vitesse de courbure à l'abscisse  $s$   
 $\dot{\theta}(s) = [\dot{\omega}(s)] = \dot{\omega}(s^+) - \dot{\omega}(s^-)$  : discontinuité de  $\dot{\omega}$  à l'abscisse  $s$  .

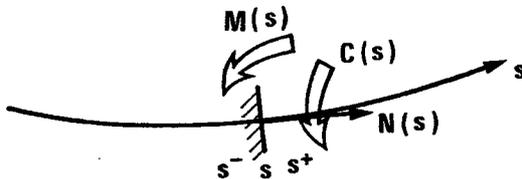


Figure 13 :  
Milieu curviligne :  
notations.

4.2 - SECTION EN TRACTION-

COMPRESSION (SYSTÈMES RÉTICULÉS)

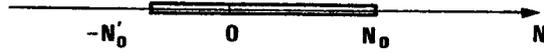


Figure 14 : Section en traction-  
compression : domaine de résistance.

- ♦ Contrainte généralisée à une seule composante :  $\Sigma = N$  ;  
Vitesse de déformation généralisée :  $\Delta = \dot{\epsilon}$  .

- ♦ Domaine de résistance défini par  $f(N) \leq 0$ , avec :

(4.1)

$$f(N) = \text{Sup} \left\{ N - N_0, -N - N'_0 \right\}$$

$N_0$  et  $-N'_0$  désignent, respectivement, les limites de résistance de la section en traction et en compression (figure 14).

- ♦ Fonctions  $\pi$  :

(4.2)

$$\pi(\dot{\epsilon}) = \text{Sup} \left\{ \dot{\epsilon} N_0, -\dot{\epsilon} N'_0 \right\}$$

Et :

(4.3)

$$\pi(\dot{U}) = \text{Sup} \left\{ \dot{U} N_0, -\dot{U} N'_0 \right\}$$

- ♦ Expression de "P(v)" :

$$(4.4) \quad "P(\underline{v})" = P(\dot{u}) = \int \pi[\Delta; \dot{\epsilon}(\Delta)] d\Delta + \sum_i \pi[\Delta_i; \dot{U}(\Delta_i)]$$

### 4.3 - SECTION EN FLEXION

♦ Avec les hypothèses mentionnées au § 4.1, contrainte généralisée à une seule composante :  $\Sigma = M$  ; vitesse de déformation généralisée :  $\Delta = \dot{\chi}$  .

♦ Domaine de résistance défini par  $f(M) \leq 0$ , avec :

(4.5)

$$f(M) = \text{Sup} \left\{ M - m, -M - m' \right\}$$

$m$  et  $-m'$  désignent respectivement les limites de résistance en flexions positive et négative.

♦ Fonctions  $\pi$  :

(4.6)

$$\pi(\dot{\chi}) = \text{Sup} \left\{ \dot{\chi} m, -\dot{\chi} m' \right\}$$

Et :

(4.7)

$$\pi(\dot{\theta}) = \text{Sup} \left\{ \dot{\theta} m, -\dot{\theta} m' \right\}$$

♦ Expression de "P(v)"

$$(4.8) \quad \text{"P(v)"} = P(\dot{\omega}) = \int \pi[\dot{\Delta}; \dot{\theta}(\Delta)] d\Delta + \sum_i \pi[\dot{\Delta}_i; \dot{\theta}(\Delta_i)]$$

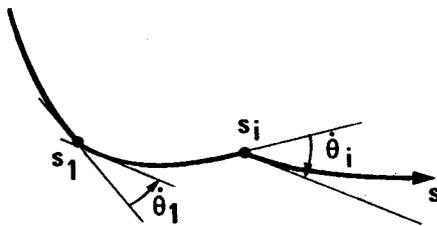


Figure 15 : Poutre en flexion.

#### 4.4 - SECTION EN TORSION

- ♦ Contrainte généralisée à une seule composante :  $\Sigma = C$  ;  
 Vitesse de déformation généralisée :  $\Delta = \dot{\psi}$  .

- ♦ Domaine de résistance défini par  $f(C) \leq 0$ , avec :

$$(4.9) \quad f(C) = \text{Sup} \left\{ C - C_0, -C - C_0 \right\}$$

$C_0$  désigne la limite de résistance en torsion (en module).

- ♦ Fonctions  $\pi$  :

$$(4.10) \quad \pi(\dot{\psi}) = \text{Sup} \left\{ \dot{\psi} C_0, -\dot{\psi} C_0 \right\}$$

Et :

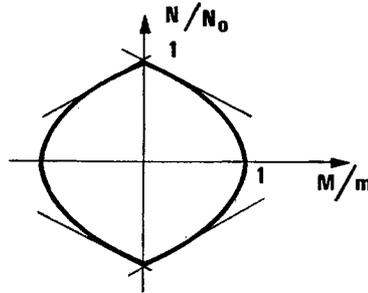
$$(4.11) \quad \pi(\dot{\Psi}) = \text{Sup} \left\{ \dot{\Psi} C_0, -\dot{\Psi} C_0 \right\}$$

Expression de "P(v)"

$$(4.12) \quad "P(\underline{v})" = P(\dot{\alpha}) = \int \pi[\dot{s} ; \dot{\psi}(\dot{s})] d\dot{s} + \sum_i \pi[\dot{s}_i ; \dot{\Psi}(\dot{s}_i)]$$

4.5 - SECTION RECTANGULAIRE  
 EN FLEXION DÉVIÉE

- ♦ Avec les hypothèses mentionnées au § 4.1, contrainte généralisée à deux composantes :  $\Sigma = (N, M)$  ; vitesse de déformation généralisée :  $\Delta = (\dot{\epsilon}, \dot{\chi})$



- ♦ Domaine de résistance convexe défini par  $f(N, M) \leq 0$ , avec :

Figure 16 : Section rectangulaire : domaine de résistance en flexion déviée.

(4.13)

$$f(N, M) = \left| \frac{M}{m} \right| + \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 - 1$$

$m$  et  $N_0$  sont respectivement les limites de résistance en flexion et en traction-compression (le matériau constitutif de la section étant supposé homogène et régi par les critères de von Mises ou de Tresca par exemple).

- ♦ Fonctions  $\pi$  :

(4.14)

$$\pi(\dot{\epsilon}, \dot{\chi}) = \frac{4(m\dot{\chi})^2 + (N_0\dot{\epsilon})^2}{4|m\dot{\chi}|}, \text{ si } \left| \frac{N_0\dot{\epsilon}}{2m\dot{\chi}} \right| \leq 1 ;$$

$$\pi(\dot{\epsilon}, \dot{\chi}) = N_0|\dot{\epsilon}|, \text{ si } \left| \frac{N_0\dot{\epsilon}}{2m\dot{\chi}} \right| \geq 1 .$$

Et :

(4.15)

$$\pi(\dot{U}, \dot{\theta}) = \frac{4(m\dot{\theta})^2 + (N_0\dot{U})^2}{4|m\dot{\theta}|}, \text{ si } \left| \frac{N_0\dot{U}}{2m\dot{\theta}} \right| \leq 1 ;$$

$$\pi(\dot{U}, \dot{\theta}) = N_0|\dot{U}|, \text{ si } \left| \frac{N_0\dot{U}}{2m\dot{\theta}} \right| \geq 1 .$$

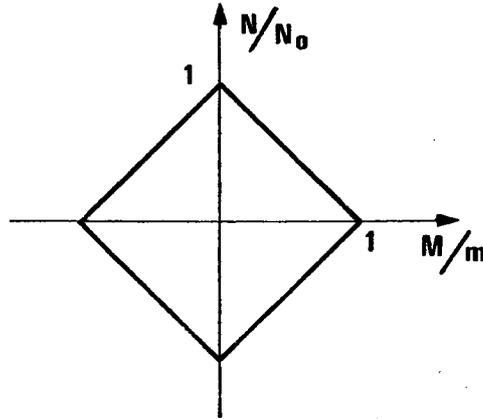
- ♦ Expression de "P(v)" :

(4.16)

$$"P(\underline{v})" = P(\dot{u}, \dot{\omega}) = \int \pi[s; \dot{\epsilon}(s), \dot{\chi}(s)] ds$$

$$+ \sum_i \pi[s_i; \dot{U}(s_i), \dot{\theta}(s_i)] .$$

4.6 - SECTION "I" IDÉALE (AME  
 ÉVANESCENTE) EN FLEXION DÉVIÉE



- ◆ Le moment de flexion est évidemment supposé porté par l'axe de symétrie parallèle aux membrures. Contrainte généralisée à deux composantes :  
 $\Sigma = (N, M)$  ; vitesse de déformation généralisée :  $\Delta = (\dot{\epsilon}, \dot{\chi})$ .

- ◆ Domaine de résistance convexe défini par  $f(N, M) \leq 0$ , avec :

Figure 17 : Section "I" idéale : domaine de résistance en flexion déviée.

(4.17)

$$f(N, M) = \left| \frac{M}{m} \right| + \left| \frac{N}{N_0} \right| - 1 .$$

$m$  et  $N_0$  ayant les mêmes significations qu'au § 4.5.

- ◆ Fonctions  $\pi$  :

(4.18)

$$\pi(\dot{\epsilon}, \dot{\chi}) = \text{Sup} \left\{ N_0 |\dot{\epsilon}|, m |\dot{\chi}| \right\}$$

Et :

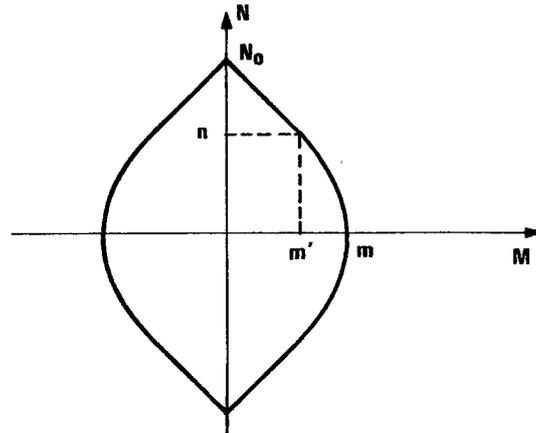
(4.19)

$$\pi(\dot{U}, \dot{\theta}) = \text{Sup} \left\{ N_0 |\dot{U}|, m |\dot{\theta}| \right\}$$

- ◆ Expression de  $P(\underline{v})$  : c'est (4.16).

#### 4.7 - SECTION "DOUBLE-TÊ" A PAROIS

##### MINCES EN FLEXION DÉVIÉE



- Le moment est supposé porté par l'axe de symétrie parallèle aux membrures. Contrainte généralisée à deux composantes :  $\Sigma = (N, M)$  ; vitesse de déformation généralisée :  $\dot{\Sigma} = (\dot{\epsilon}, \dot{\chi})$ .

- Domaine de résistance convexe défini par  $f(N, M) \leq 0$ , avec :

Figure 18 : Section "double-tête" à parois minces : domaine de résistance en flexion déviée.

(4.20)

$$f(N, M) = \frac{|M| - m'}{m - m'} + \left(\frac{N}{n}\right)^2 - 1, \text{ si } m' \leq |M| \leq m ;$$

$$f(N, M) = 2 \frac{|N| - n}{n} + \frac{|M| - m'}{m - m'}, \text{ si } |M| \leq m'.$$

$m$  est la limite de résistance en flexion pure ; la limite de résistance en traction-compression (en module) est  $N_0$  :  $N_0 = n(2m - m')/2(m - m')$ .  $n$  représente la part relative à l'âme dans  $N_0$  et  $m'$  représente la part relative aux membrures dans  $m$  (figure 18).

- Fonctions  $\pi$  :

(4.21)

$$\pi(\dot{\epsilon}, \dot{\chi}) = \frac{m(2m - m')^2 \dot{\chi}^2 + (m - m')(N_0 \dot{\epsilon})^2}{(2m - m')^2 |\dot{\chi}|}$$

si  $\left| \frac{N_0 \dot{\epsilon}}{(2m - m') \dot{\chi}} \right| \leq 1 ;$

$$\pi(\dot{\epsilon}, \dot{\chi}) = N_0 |\dot{\epsilon}|$$

si  $\left| \frac{N_0 \dot{\epsilon}}{(2m - m') \dot{\chi}} \right| \geq 1 .$

avec :

$$(4.22) \quad N_o = n(2m - m')/2(m - m')$$

(4.23)

$$\pi(\dot{U}, \dot{\theta}) = \frac{m(2m - m')^2 \dot{\theta}^2 + (m - m')(N_o \dot{U})^2}{(2m - m') |\dot{\theta}|}$$

si  $\left| \frac{N_o \dot{U}}{(2m - m') \dot{\theta}} \right| \leq 1 ;$

$$\pi(\dot{U}, \dot{\theta}) = N_o |\dot{U}|$$

si  $\left| \frac{N_o \dot{U}}{(2m - m') \dot{\theta}} \right| \geq 1 .$

♦ Expression de "P(v)" : c'est (4.16).

#### 4.8 - SECTION TUBULAIRE MINCE EN TORSION ET TRACTION

- ◆ Contrainte généralisée à deux composantes :  $\Sigma = (N, C)$  ;  
vitesse de déformation généralisée :  $\Delta = (\dot{\epsilon}, \dot{\psi})$  .
- ◆ Domaine de résistance convexe défini par  $f(N, C) \leq 0$  , avec :

$$(4.24) \quad f(N, C) = \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 + \left(\frac{C}{C_0}\right)^2 - 1$$

$N_0$  est la limite de résistance en traction-compression et  $C_0$  la limite en torsion pour une section constituée d'un matériau homogène régi par les critères de Tresca et de von Mises.

- ◆ Fonctions  $\pi$  :

$$(4.25) \quad \pi(\dot{\epsilon}, \dot{\psi}) = \sqrt{N_0^2 \dot{\epsilon}^2 + C_0^2 \dot{\psi}^2}$$

Et :

$$(4.26) \quad \pi(\dot{U}, \dot{\Psi}) = \sqrt{N_0^2 \dot{U}^2 + C_0^2 \dot{\Psi}^2}$$

Expression de "P(v)" :

$$(4.27) \quad \begin{aligned} \text{"P(v)" = P}(\dot{u}, \dot{\alpha}) &= \int \pi[s; \dot{\epsilon}(s), \dot{\psi}(s)] ds \\ &+ \sum_i \pi[s_i; \dot{U}(s_i), \dot{\Psi}(s_i)] . \end{aligned}$$

• REMARQUE

Pour d'autres formes de section (section circulaire, rectangle mince) on adopte aussi la formule (4.24) comme une expression approchée du critère de résistance (cf. Courbon, 1965).

#### 4.9 - SECTION TUBULAIRE MINCE EN FLEXION-TORSION

- ♦ Contrainte généralisée à deux composantes :  $\Sigma = (M, C)$   
vitesse de déformation généralisée :  $\Delta = (\dot{\chi}, \dot{\psi})$ .
- ♦ Domaine de résistance convexe représenté par  $f(M, C) \leq 0$ , avec de façon approchée (cf Courbon, 1965) :

(4.28)

$$f(M, C) = \left(\frac{M}{m}\right)^2 + \left(\frac{C}{C_0}\right)^2 - 1$$

$m$  et  $C_0$  sont les moments limites de résistance en flexion et en torsion pures, le matériau constituant la section étant supposé homogène et régi par le critère de von Mises.

- ♦ Fonctions  $\pi$  :

(4.29)

$$\pi(\dot{\chi}, \dot{\psi}) = \sqrt{m^2 \dot{\chi}^2 + C_0^2 \dot{\psi}^2}$$

Et :

(4.30)

$$\pi(\dot{\theta}, \dot{\Psi}) = \sqrt{m^2 \dot{\theta}^2 + C_0^2 \dot{\Psi}^2}$$

- ♦ Expression de "P(v)"

(4.31)

$$\begin{aligned} \text{"P(v)" = P}(\dot{\omega}, \dot{\alpha}) &= \int \pi[\dot{s}; \dot{\chi}(\dot{s}), \dot{\psi}(\dot{s})] d\dot{s} \\ &+ \sum_i \pi[\dot{s}_i; \dot{\theta}(\dot{s}_i), \dot{\Psi}(\dot{s}_i)] \end{aligned}$$

• REMARQUE

On adopte aussi (4.28) comme une expression approchée du critère de résistance pour d'autres formes de sections soumises à ce type de sollicitations.

---

 5 - MILIEUX CONTINUS GÉNÉRALISÉS BIDIMENSIONNELS
 

---

 5.1 - NOTATIONS
 

---

On étudie des plaques et des dalles minces modélisées comme des milieux continus généralisés bidimensionnels plans. Les notations sont les suivantes:

$Ox, Oy$  : axes rectangulaires

$\underline{x}$  : point courant du milieu continu généralisé

$\underline{M}(\underline{x})$  : tenseur des moments de flexion au point  $\underline{x}$  (tenseur symétrique), de composantes  $M_{ij}$ ; (figure 19)

$M_1, M_2$  : valeurs principales de  $\underline{M}$

$\dot{\underline{w}}(\underline{x})$  : vitesse de flèche au point  $\underline{x}$ , suivant  $Oz$

$\dot{\underline{\omega}}(\underline{x})$  : grad  $\dot{\underline{w}}(\underline{x})$   
 $\left( \frac{\partial \dot{\underline{w}}}{\partial x}, \frac{\partial \dot{\underline{w}}}{\partial y} \right)$  dans les axes  $(Oxy)$

$\dot{\underline{\chi}}(\underline{x})$  : tenseur symétrique des vitesses de courbure en  $\underline{x}$ , de composantes  $\dot{\chi}_{ij}$ . Dans les axes  $(Oxy)$  la matrice de  $\dot{\underline{\chi}}$  est :

$$\dot{\underline{\chi}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \dot{\underline{w}}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \dot{\underline{w}}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \dot{\underline{w}}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \dot{\underline{w}}}{\partial y^2} \end{vmatrix} .$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

$$\dot{\underline{\chi}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \dot{\underline{w}}}{\partial r^2} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \dot{\underline{w}}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{\underline{w}}}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \dot{\underline{w}}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{\underline{w}}}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\underline{w}}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{\underline{w}}}{\partial \theta^2} \end{vmatrix}$$

$\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2$  : valeurs principales de  $\dot{\underline{\chi}}$

$[\dot{\underline{\omega}}(\underline{x})] = \dot{\underline{\omega}}^{(2)}(\underline{x}) - \dot{\underline{\omega}}^{(1)}(\underline{x})$  : discontinuité de  $\dot{\underline{\omega}}$  au franchissement de la ligne de discontinuité  $L$  au point  $\underline{x}$  de normale  $\underline{n}(\underline{x})$ . Elle ne peut être quelconque ; d'après les relations de Hadamard on a nécessairement :

$$[\dot{\underline{\omega}}(\underline{x})] = \dot{\theta} \underline{n}(\underline{x})$$

correspondant au vecteur rotation  $\dot{\underline{\theta}}(\underline{x}) = \dot{\theta} \underline{t}(\underline{x})$ .

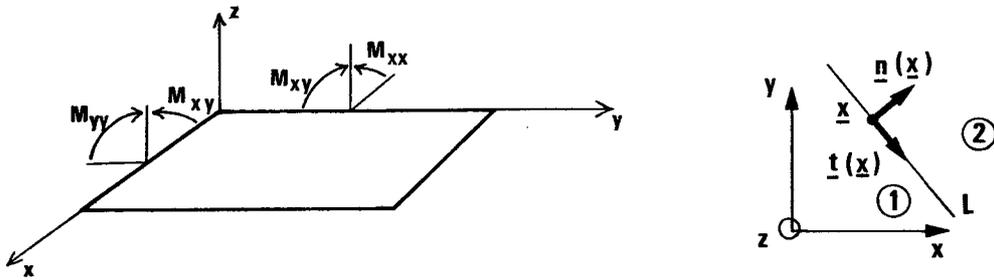


Figure 19 : Milieu continu généralisé bidimensionnel plan : notations.

$$"P(\underline{v})" = P(\underline{\dot{\omega}}) = \int_S \pi[\underline{x} ; \underline{\dot{\chi}}(\underline{x})] dS + \int_L \pi[\underline{x} ; \underline{\dot{\theta}}(\underline{x})] dL .$$

## 5.2 - PLAQUE "de VON MISES"

Milieu continu généralisé *isotrope*.

♦ Domaine de résistance *convexe* défini par  $f(\underline{M}) \leq 0$ , avec :

(5.1 a)

$$f(\underline{M}) = M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2 - \frac{3}{4} m^2$$

soit encore :

(5.1 b)

$$f(\underline{M}) = M_{xx}^2 + M_{yy}^2 - M_{xx} M_{yy} + 3M_{xy}^2 - \frac{3}{4} m^2$$

$m$  est le "moment" limite de résistance.

♦ Fonctions  $\pi$  :

(5.2 a)

$$\pi(\underline{\dot{\chi}}) = m \sqrt{\dot{\chi}_1^2 + \dot{\chi}_2^2 + \dot{\chi}_1 \dot{\chi}_2}$$

soit encore :

(5.2 b)

$$\pi(\underline{\dot{\chi}}) = m \sqrt{\dot{\chi}_{xx}^2 + \dot{\chi}_{yy}^2 + \dot{\chi}_{xy}^2 + \dot{\chi}_{xx} \dot{\chi}_{yy}}$$

Et :

(5.3)

$$\pi(\dot{\theta}) = m |\dot{\theta}|$$

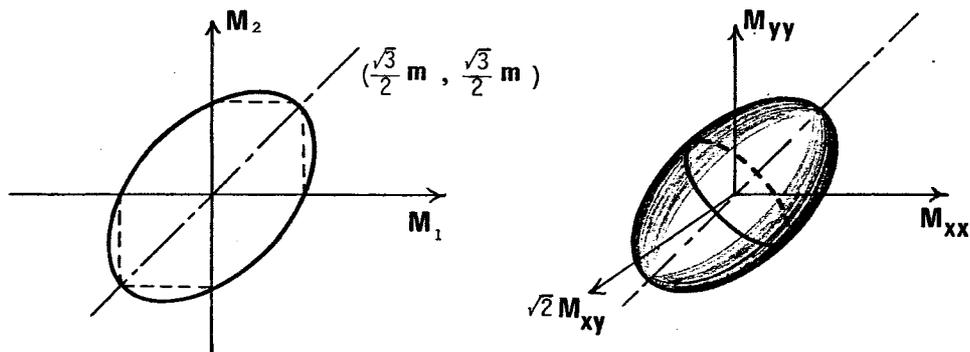


Figure 20 : Plaque "de von Mises" ; domaine de résistance :

a) En axes principaux

b) En axes  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $\sqrt{2}M_{xy}$  : ellipsoïde de révolution autour de l'axe (1,1,0).

### 5.3 - PLAQUE "de TRESCA"

Milieu continu généralisé isotrope.

♦ Domaine de résistance convexe défini par  $f(M) \leq 0$  avec :

$$(5.4) \quad f(\underline{M}) = \sup_{i,j} \left\{ |M_i|, |M_i - M_j| \right\} - m$$

$m$  est le "moment" limite de résistance.

♦ Fonctions  $\pi$  :

$$(5.5) \quad \pi(\underline{\dot{\chi}}) = m \cdot \sup_{i,j} \left\{ |\dot{\chi}_i|, |\dot{\chi}_i + \dot{\chi}_j| \right\}$$

Et :

$$(5.6) \quad \pi(\theta) = m |\theta|$$

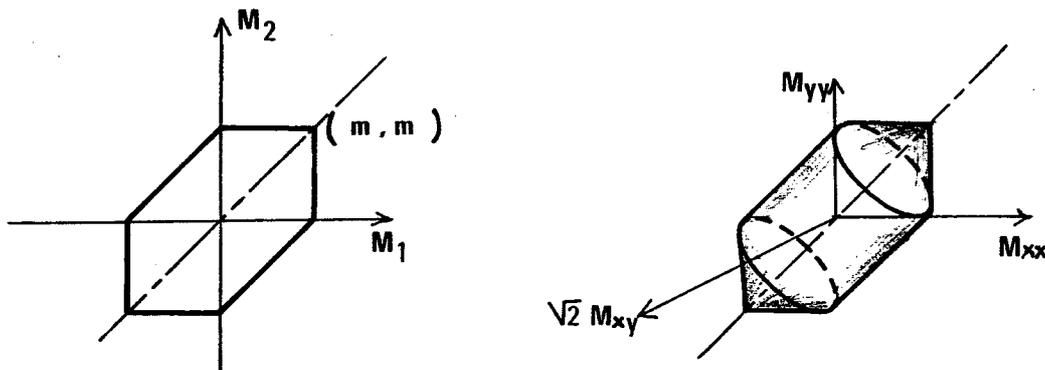


Figure 21 : Plaque "de Tresca" ; domaine de résistance :

- en axes principaux
- en axes  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $\sqrt{2}M_{xy}$  : cylindre et cônes de révolution autour de l'axe  $(1, 1, 0)$ .

#### 5.4 - DALLE "de JOHANSEN" ISOTROPE

Milieu continu généralisé *isotrope*

♦ Domaine de résistance convexe défini par  $f(M) \leq 0$ , avec :

$$(5.7) \quad f(\underline{M}) = \sup_i \left\{ M_i - m, -M_i - m' \right\}$$

$m$  et  $m'$  sont respectivement les "moments" limites de résistance en flexions positive et négative.

♦ Fonctions  $\pi$  :

$$(5.8) \quad \pi(\underline{\dot{\chi}}) = \sup \left\{ m \dot{\chi}_1, -m' \dot{\chi}_1 \right\} + \sup \left\{ m \dot{\chi}_2, -m' \dot{\chi}_2 \right\}$$

Et :

$$(5.9) \quad \pi(\underline{\dot{\theta}}) = \sup \left\{ m \dot{\theta}, -m' \dot{\theta} \right\}$$

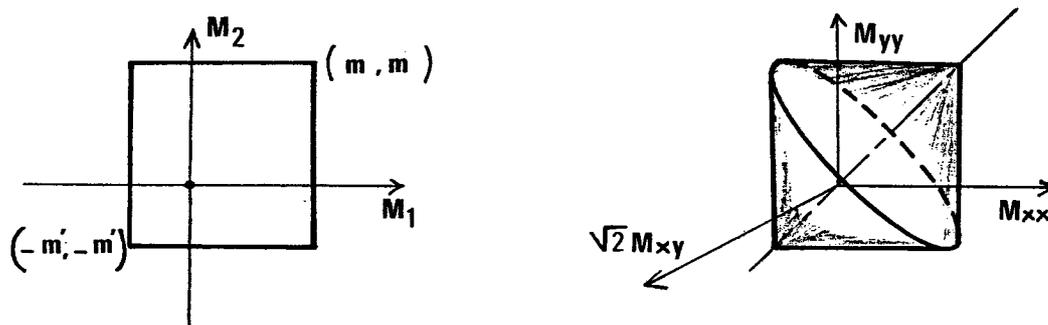


Figure 22 : Dalle "de Johansen" isotrope ; domaine de résistance :

- en axes principaux
- en axes  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ ,  $\sqrt{2}M_{xy}$  : deux cônes de révolution autour de  $(1,1,0)$ .

*chapitre III*

*analyse limite*

---

 1 - INTRODUCTION
 

---

La théorie du calcul à la rupture a permis de dégager la notion de chargement potentiellement supportable par un système dans une géométrie donnée, à partir de la seule connaissance du domaine de résistance qui y définit en chaque point les contraintes admissibles par l'élément de matière. Deux méthodes d'approche ont été mises en évidence pour déterminer l'ensemble des chargements potentiellement supportables, qui font appel soit à des champs de contrainte, soit à des champs de vitesse par dualisation du problème au moyen du principe des puissances virtuelles.

Comme on y a insisté, le résultat ainsi obtenu est le meilleur possible à partir de l'information fragmentaire utilisée au niveau de l'élément de matière. Il n'est toutefois que partiel : ainsi, en reprenant les notations du chapitre I et en désignant par  $G(\underline{x})$  le domaine de résistance du matériau au point  $\underline{x}$  et par  $K$  l'ensemble des chargements potentiellement supportables on a :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \blacklozenge \text{ localement (élément de matière)} \\ \underline{g}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \iff \underline{g}(\underline{x}) \text{ est supporté par l'élément de} \\ \text{matière en } \underline{x}. \\ \blacklozenge \text{ pour le système} \\ \underline{Q} \in K \iff \underline{Q} \text{ est supporté par le système dans} \\ \text{la géométrie donnée.} \end{array} \right.$$

Il est nécessaire, pour pouvoir préciser la signification de  $K$ , de disposer d'informations complémentaires sur le comportement du matériau : quelle est la signification physique du domaine de résistance, comment se déforme le matériau à l'intérieur de ce domaine et sur sa frontière ?

La théorie classique des charges limites qui constitue l'objet essentiel du présent chapitre complète les résultats de la théorie du calcul à la rupture dans l'hypothèse où le comportement du matériau constitutif est défini par le modèle linéairement élastique et parfaitement plastique obéissant au principe du travail plastique maximal. Dans ce cas le domaine de résistance  $G(\underline{x})$  n'est autre que le convexe de plasticité du matériau :  $C(\underline{x})$  ; on connaît alors

.../...

la signification physique du critère de résistance : il limite l'état de contrainte vis-à-vis de la plasticité, c'est-à-dire de la rupture ductile ; et aussi on connaît complètement la relation de comportement du matériau. Faisant le lien entre les résultats disponibles énoncés par ailleurs relatifs aux problèmes d'élasto-plasticité et la théorie du calcul à la rupture, on dégagera pour les chargements extrêmes, pour le domaine convexe  $K$ , pour les méthodes d'approche de ce convexe, et pour le coefficient de rupture, des significations et interprétations nouvelles.

On tentera ensuite de définir le concept de ruine plastique d'une structure en géométrie initiale, évoqué par ailleurs à propos des problèmes d'élasto-plasticité [cf. (Salençon et Halphen, 1981)] ; si l'on peut partir d'une idée simple qui tire ses origines dans le comportement des structures réticulées ou à barres fléchies, on verra par contre que sa généralisation, notamment pour les systèmes dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel, n'est pas toujours possible. C'est à ce propos que l'on utilisera le modèle de comportement rigide parfaitement plastique et que l'on introduira, en raisonnant sur le système rigide parfaitement plastique associé au système initial, le concept d'écoulement plastique libre et de chargement correspondant. Les propriétés des chargements d'écoulement plastique libre seront examinées dans le cadre des hypothèses initiales sur le comportement plastique du matériau (principe du travail plastique maximal) ; puis on sortira de ces hypothèses pour présenter les théorèmes de Drucker, Radenkovic, Palmer, établis pour les matériaux parfaitement plastiques à domaine de plasticité convexe et dont la règle d'écoulement dérive d'un potentiel différent du critère ; les applications essentielles de ces théorèmes concernant les interfaces et les sols de Coulomb avec la règle d'écoulement proposée par Brinch Hansen (1953).

Enfin, une étude particulière traitera de l'application de la théorie de l'analyse limite aux problèmes de formage des métaux, évoquant notamment certaines méthodes heuristiques auxquelles il est fait appel dans ce domaine.

---

## 2 - CHARGEMENT LIMITE D'UN SYSTÈME ÉLASTO-PLASTIQUE EN GÉOMÉTRIE INITIALE

---

### 2.1 - COMPORTEMENT D'UN SYSTÈME EN MATÉRIAU ÉLASTIQUE

#### ET PARFAITEMENT PLASTIQUE OBÉISSANT AU PRINCIPE DU TRAVAIL

#### PLASTIQUE MAXIMAL

On étudie, dans l'hypothèse de la géométrie invariable, le comportement dans un mode de chargement dépendant de  $n$  paramètres  $Q_j$  d'un système de volume  $V$  en matériau linéairement élastique et parfaitement plastique obéissant au principe du travail plastique maximal (P.T.P.M.).  $C(\underline{x})$  désigne le convexe d'élasticité du matériau au point  $\underline{x}$ .

On établit dans l'étude des problèmes d'élasto-plasticité [cf. (Salençon et Halphen, 1981)], le résultat essentiel suivant <sup>(1)</sup> :

si l'on considère un trajet de chargement à partir d'un état initial donné, la solution du problème d'évolution que constitue la détermination de l'état de ce système à chaque instant (temps cinématique), existe tant que l'ensemble  $L^{-1}(Q) \cap H$  est d'intérieur non vide dans  $L^{-1}(Q)$ . Ceci montre, d'après la définition et le mode de construction de l'ensemble  $K$  des chargements potentiellement supportables

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} K = L(H) \\ H = \left\{ \underline{\sigma} \mid \underline{\sigma} \text{ S.A. dans le mode et } \underline{\sigma}(\underline{x}) \in C(\underline{x}), \forall \underline{x} \in V \right\} \end{array} \right.$$

que l'état du système est déterminé tant que le trajet de chargement reste intérieur à  $K$ .

---

<sup>(1)</sup> On reprend ici les notations du chapitre I "Théorie du Calcul à la rupture" ; on rappelle que  $L$  désigne la correspondance linéaire qui à  $\underline{\sigma}$ , champ de contrainte statiquement admissible (S.A.) dans le mode de chargement, associe le chargement qu'il équilibre.

D'autre part la définition de  $K$  montre aussi que le trajet de chargement ne saurait être poursuivi à l'extérieur de  $K$  en respectant à la fois l'équilibre quasi-statique du système sous le chargement imposé et les capacités de résistance limitées ici par le critère de plasticité du matériau,  $C(\underline{x})$ .

Ainsi il apparaît que le chargement extrême  $\underline{Q}^+$  situé à l'intersection du trajet de charge imposé et de la frontière du convexe  $K$  <sup>(1)</sup> joue le rôle de chargement limite sur ce trajet (figure 1) ; même s'il n'est pas possible de décider du comportement du système sous  $\underline{Q}^+$  lui-même, on sait que :

- a) le trajet de chargement ne peut être poursuivi au-delà de  $\underline{Q}^+$
- b) jusqu'à  $\underline{Q}^+$  la réponse du système élasto-plastique est bien déterminée.

En conséquence, pour les systèmes satisfaisant les hypothèses ci-dessus, les chargements extrêmes seront appelés *chargements limites*.

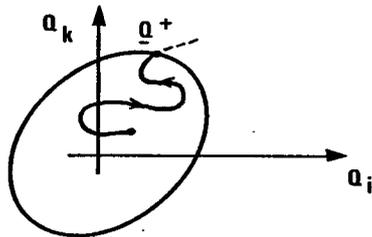


Figure 1 :  
Trajet de chargement et chargement limite.

Il convient de rappeler que l'étude, et le théorème d'existence et d'unicité auquel il est fait appel, supposent que la géométrie peut, tout au long du trajet de chargement, être confondue avec la géométrie initiale ; cette hypothèse devra être vérifiée dans chaque cas : dans l'éventualité contraire, l'interprétation des chargements extrêmes comme chargements limites s'en trouverait évidemment modifiée.

---

<sup>(1)</sup>  $K$  est convexe puisque  $G(\underline{x}) \equiv C(\underline{x})$  est convexe d'après le principe du travail plastique maximal, supposé vérifié par hypothèse.

## 2.2 - PROPRIÉTÉS DES CHARGEMENTS LIMITES

Sous réserve que les hypothèses nécessaires à la validité du théorème d'existence et d'unicité utilisé ci-dessus *demeurent satisfaites tout au long du trajet de chargement*, il résulte de l'identité entre chargements extrêmes et chargements limites que :

- 1° le chargement limite sur un trajet de chargement est *indépendant des contraintes initiales* ;
- 2° il est *indépendant du trajet*, en ce sens qu'un chargement extrême est chargement limite pour tous les trajets de chargement intérieurs à K qui y aboutissent ;
- 3° il est *indépendant des caractéristiques élastiques linéaires* du matériau constitutif ;
- 4° de plus, sa détermination peut donc être faite directement, par application des méthodes énoncées en théorie du Calcul à la rupture, c'est-à-dire sans nécessiter la résolution du problème d'élasto-plasticité pas-à-pas au long du trajet de chargement à partir de l'état initial connu.

On résume parfois les résultats ci-dessus en disant qu'il y a *unicité* des chargements limites (Mandel, 1966).

## 2.3 - NOUVELLE INTERPRÉTATION DU DOMAINE K

Dans la théorie du Calcul à la rupture le domaine K est apparu comme le domaine des chargements potentiellement supportables par le système sans qu'il fût possible, on l'a rappelé plus haut, d'aller au-delà de cette signification. Compte tenu des résultats énoncés au § 2.1, en s'appuyant sur le théorème d'existence de la solution du problème d'élasto-plasticité, on voit que sous réserve que les hypothèses nécessaires à la validité de ce théorème soient satisfaites, tout chargement intérieur à K sera *effectivement supporté* par le système quel que soit le trajet de chargement intérieur à K suivi pour l'atteindre, et quelles que soient les propriétés élastiques (linéaires) du matériau constitutif.

K peut donc, dans ce cas, être qualifié de *domaine des chargements "stables"* pour le système, ou encore *domaine de sécurité du système*. Il conviendrait de préciser ici, puisque la seule limitation introduite sur les capacités de résistance du matériau constitutif correspond à la plastification, que cette terminologie de "stabilité" ne se réfère qu'à la ruine plastique, notion sur laquelle on reviendra par la suite.

On peut aussi dire que le principe du travail plastique maximal, introduit au niveau du comportement du matériau, conduit à un "principe de bienveillance du système", car celui-ci ira toujours "jusqu'au bout de ses possibilités" du point de vue plastique.

Le schéma (1.1) se trouve maintenant complété :

$$(2.2) \left\{ \begin{array}{l} \diamond \text{ localement (élément de matière)} \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in C(\underline{x}) \iff \underline{\sigma}(\underline{x}) \text{ est supporté par l'élément de matière en } \underline{x} \\ \text{et le matériau est élastique-parfaitement} \\ \text{plastique, de domaine d'élasticité } C(\underline{x}), \\ \text{obéissant au P.T.P.M.} \\ \diamond \text{ pour le système} \\ \underline{Q} \in K \iff \underline{Q} \text{ est supporté par le système en géométrie} \\ \text{initiale, du point de vue plastique.} \end{array} \right.$$

## 2.4 - NOUVELLES INTERPRÉTATIONS DES APPROCHES DE K

### 2.4.1 - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR ; MÉTHODE STATIQUE

La nouvelle signification prise par K permet d'énoncer la méthode d'approche de K par l'intérieur au moyen de champs de contrainte sous la forme suivante :

Méthode statique : Le système supportera, du point de vue plastique, tout chargement tel que l'on puisse trouver un champ de contrainte statiquement admissible et plastiquement admissible <sup>(1)</sup> qui l'équilibre.

Un tel chargement sera parfois appelé "plastiquement stable".

<sup>(1)</sup> C'est à dire respectant en tout point le critère de plasticité.

2.4.2 - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR ; MÉTHODE CINÉMATIQUE

-----

L'approche de  $K$  par l'extérieur au moyen de champs de vitesse présentée dans la théorie du Calcul à la rupture nécessite, pour conduire à des résultats non triviaux, que l'on considère des champs de vitesse  $\underline{v}$  cinématiquement admissibles dans le mode de chargement, tels que

- ♦ il y ait déformation du système vis-à-vis du mode de chargement imposé, c'est à dire :

$$(2.3) \quad \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \neq 0$$

- ♦ la "puissance dissipable"  $P(\underline{v})$  soit finie :

$$(2.4) \quad P(\underline{v}) = \int_V \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} \pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket] d\Sigma < \infty .$$

Cette deuxième condition signifie, comme on l'a dit en théorie du Calcul à la rupture, que :

- a)  $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$  doit être finie en tout point où  $\underline{v}$  est continu,
- b)  $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket]$  doit être finie en tout point des surfaces de discontinuité de vitesse,  $\Sigma$  .

Les conditions pour qu'il en soit ainsi ont été données au chapitre I (§ 4.7) ;

- a) aux points où  $\underline{v}$  est continu la condition s'écrit :

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{\sigma}(\underline{x}) \text{ tel que :} \\ f[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})] = 0 \quad (\underline{\sigma}(\underline{x}) \text{ sur la frontière de } C(\underline{x})) \\ \underline{d}(\underline{x}) \in \dot{\lambda} \partial f[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})] \quad , \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad ; \end{array} \right.$$

autrement dit ici, puisque le principe du travail plastique maximal est vérifié,  $\underline{d}(\underline{x})$  doit être un tenseur vitesse de déformation qui puisse être associé, par la règle d'écoulement plastique du matériau constitutif, à un tenseur contrainte  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  à la limite d'écoulement :  $\underline{d}(\underline{x})$  doit être *plastiquement admissible*.

On voit que s'il en est ainsi,  $\pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})]$  s'identifie à la dissipation plastique par unité de volume en  $\underline{x}$  pour  $\underline{d}(\underline{x})$ , soit :

$$(2.6) \quad \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] \equiv \mathcal{D}[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] \quad .$$

[cf. (Salençon et Halphen, 1981)];

b) sur les surfaces de discontinuité de vitesse,  $\Sigma$ , la condition est obtenue en définissant le tenseur  $\underline{D}[\underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket]$  comme on l'a indiqué au chapitre I (§ 4.5.2., formule 4.22) et en reprenant (2.5) ; en comparant avec la définition du tenseur  $\underline{d}$  introduit lors de l'étude des discontinuités de vitesse en élasto-plasticité (Salençon et Halphen, 1981) on constate que l'on a :

$$(2.7) \quad \underline{d}(\underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket) \equiv \underline{D}(\underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket) \delta_{\Sigma} \quad ;$$

il en résulte que la condition imposée pour que  $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket]$  soit finie n'est autre que la condition imposée par la règle d'écoulement plastique du matériau à la discontinuité de vitesse  $\llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket$ , qui doit ainsi être *plastiquement admissible* ; alors, comme en a),  $\pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket]$  s'identifie à la dissipation plastique par unité de surface  $\Sigma$  en  $\underline{x}$  pour  $\llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket$  :

$$(2.8) \quad \pi(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket) \equiv \mathcal{D}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket) \quad .$$

Ainsi  $P(\underline{v})$ , lorsqu'elle est finie, s'identifie à la puissance dissipée dans le champ de vitesse  $\underline{v}$ , et l'on obtient une nouvelle interprétation de l'approche de K par l'extérieur au moyen de champs de vitesse :

Méthode cinématique : *Tout chargement dont la puissance dans un champ de vitesse cinématiquement et plastiquement admissible est supérieure à la puissance dissipée ne sera pas supporté par le système.*

#### 2.4.3. REMARQUES

-----

Les énoncés ci-dessus des deux méthodes ont un aspect très intuitif. Ce sont des énoncés de "bâtisseurs", confiants lorsqu'ils font des équilibres (méthode statique), méfiants lorsqu'ils imaginent des mécanismes (méthode cinématique).

Mais il importe de bien voir que ces énoncés ont été démontrés en s'appuyant sur le principe du travail plastique maximal. Sans cette hypothèse la méthode d'approche par l'intérieur par les contraintes conserve bien son caractère de méthode statique intuitive explorant les chargements que l'on peut équilibrer par des champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles, mais on n'est pas assuré que ces chargements seront stables ; quant à la méthode par les vitesses, elle permet toujours de déterminer des chargements dont on est assuré qu'ils seront instables mais, les champs de vitesse utiles n'ont pas alors de signification mécanique intuitive.

On pourrait d'autre part penser à utiliser les énoncés de méthodes statique et cinématique ci-dessus hors de l'hypothèse du principe du travail plastique maximal, par exemple dans le cas d'un critère convexe mais sans que la loi d'écoulement plastique ne soit associée au critère par la règle de normalité : cela ne présente aucune difficulté pour la méthode statique ; dans la méthode cinématique, la puissance dissipée serait calculée à partir de sa définition même, c'est-à-dire :

$$\int_V \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}^P(\underline{x}) \cdot dV + \int_{\Sigma} \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket d\Sigma ,$$

où  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  est défini à partir de  $\underline{d}^P(\underline{x})$ , ou de  $\llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket$  et  $\underline{n}(\underline{x})$ , par inversion de la loi d'écoulement plastique, ce qui peut parfois se faire sans ambiguïté. On a montré, sur des contre-exemples (Drucker, 1954 ; Salençon, 1972 a) qu'une telle application de ces énoncés, pouvait conduire à des résultats paradoxaux : un chargement "prouvé" stable par la méthode statique, était "démontré" instable par la méthode cinématique ! Ceci montre donc que ces énoncés ne sont pas vrais dans tous les cas de règles d'écoulement, mais leur condition nécessaire de validité n'est pas connue.

## 2.5 - COEFFICIENT DE SÉCURITÉ D'UN OUVRAGE SOUS UN CHARGEMENT DONNÉ VIS-A-VIS DE LA RUINE PLASTIQUE

La théorie du Calcul à la rupture a permis de dégager la notion de "coefficient de rupture" d'un ouvrage sous un chargement donné  $Q$ . On a alors insisté sur le fait que la terminologie choisie voulait rappeler la signification même du coefficient, à savoir que seule l'implication :

$$F(Q) < 1 \implies \text{rupture certaine de l'ouvrage sous le chargement } Q .$$

était établie, ceci ne correspondant pas aux propriétés "naturellement" souhaitables pour un coefficient de *sécurité*.

On voit maintenant avec la nouvelle signification prise par  $K$  que le coefficient  $F(\underline{Q})$  prend alors celle d'un véritable coefficient de *sécurité* puisque l'on a aussi :

$$F(\underline{Q}) > 1 \implies \text{"stabilité" de l'ouvrage assurée sous } \underline{Q} \text{ du point de vue plastique.}$$

On remarque de plus que les approches de  $F(\underline{Q})$  par les contraintes et par les vitesses peuvent recevoir, elles-aussi, de nouvelles interprétations homologues de celles dégagées au § 2.4.

---

### 3 - RUINE PLASTIQUE D'UN SYSTÈME EN GÉOMÉTRIE INITIALE

---

#### 3.1 - EXEMPLE D'UNE STRUCTURE

Pour introduire le concept de ruine plastique d'un système, nous examinerons d'abord l'exemple d'une structure à barres fléchies : il s'agit du portique représenté sur la figure 2a, soumis à un mode de chargement à un paramètre  $P$ , dont la réponse est étudiée dans un trajet de charge croissant à partir de l'état initial naturel ; le comportement en contrainte et déformation généralisées à une composante (moment  $M$  ; courbure  $\chi$ ) est modélisé selon le schéma élastique linéaire et parfaitement plastique (figure 2b) ; le problème est traité dans l'hypothèse des changements de géométrie négligeables. (On remarque que le système ainsi étudié vérifie toutes les hypothèses énoncées au § 2.1 pour la validité du théorème d'existence et d'unicité).

On se placera ici dans le cas où le paramètre géométrique  $n = BC/AB$  est égal à 3 [la solution dans le cas général est disponible dans (Salençon et Halphen, 1981)].

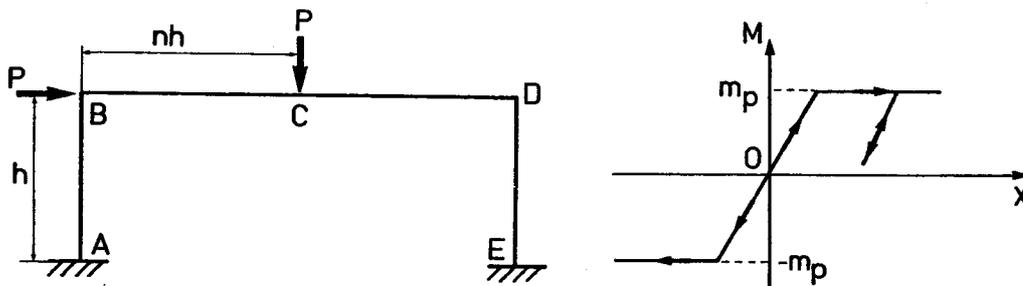


Figure 2 : a) Portique homogène 3 fois hyperstatique soumis à un mode de chargement à 1 paramètre ;  
 b) Schéma de comportement : diagramme "moment-courbure".

La réponse de la structure est représentée sur la figure 3 par le diagramme  $(Q, q)$  où  $Q = P$  et  $q = u_2 - v_3$  ( $u_2$  = déplacement horizontal du point B,  $v_3$  déplacement vertical ascendant du point C) ; on y met en évidence :

- ♦ la limite d'élasticité initiale de la structure,  
 $P_1 = 1,2235 m_p/h$
- ♦ la phase élasto-plastique avec "ramollissement" graduel de la structure par plastification d'un nombre croissant de sections
- ♦ la charge limite  $P_4 = 1,333 m_p/h$ .

Celle-ci possède les propriétés suivantes : le chargement de la structure est possible jusqu'à  $P = P_4$  et les déformations sont bien déterminées ; le chargement est impossible au-delà de  $P = P_4$  car il y a incompatibilité entre les équations d'équilibre statique et la condition  $|M| \leq m_p$  ; la charge  $P_4$  étant atteinte, si l'on maintient le chargement à cette valeur on constate qu'il y a possibilité d'une croissance monotone de  $q$ . Cette possibilité d'évolution monotone des déplacements sous charge constante  $P = P_4$  en géométrie supposée invariable est due à l'existence sous la charge  $P = P_4$  d'un mécanisme purement plastique (figure 4) indéterminé par un facteur  $\dot{\lambda}$  non-négatif (puisque le matériau est parfaitement plastique) qui vient se superposer aux déformations acquises en  $P = P_4$  à l'issue du trajet de charge (figure 5) ; cela signifie que pour  $P = P_4$ , il y a suffisamment de sections plastifiées pour que des déformations purement plastiques non nulles dans ces sections soient géométriquement compatibles.

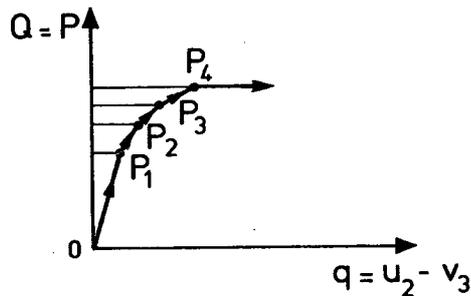


Figure 3 : Comportement du portique,  $q = u_2 - v_3$ , diagramme  $(Q, q)$ .

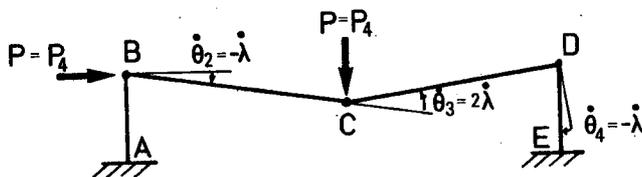


Figure 4 : Mécanisme purement plastique de déformation du portique.

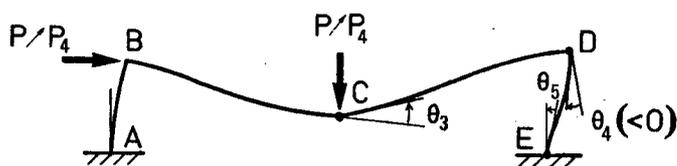


Figure 5 : Portique déformé pour  $P \neq P_4$  (les déplacements sont fortement agrandis).

On peut alors remarquer qu'en utilisant ce mécanisme dans l'approche par l'extérieur de la théorie du Calcul à la rupture, on obtient évidemment pour borne supérieure de la charge extrême de la structure la valeur exacte  $P_4$  (il suffit d'appliquer le théorème des puissances virtuelles) :

$$(3.1) \quad 3hP^+\dot{\lambda} \leq 4m_P \dot{\lambda} \quad \text{avec} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \implies \quad P^+ \leq \frac{4}{3} \frac{m_P}{h} = P_4 .$$

### 3.2 - APPROCHE INTUITIVE DU CONCEPT DE RUINE PLASTIQUE

#### EN GEOMETRIE INITIALE

Le résultat mis en évidence sur la structure précédente, qui n'a rien d'exceptionnel quand on se restreint à l'étude des structures, conduit à un concept de ruine plastique en géométrie initiale qui tente de répondre intuitivement à la question suivante : dans l'hypothèse de la géométrie invariable, puisque le chargement du système est possible pour toute charge "inférieure" sur un trajet de chargement donné à la charge limite de ce trajet, et impossible pour toute charge "supérieure", quel phénomène marque la charge limite ?

Généralisant la description précédente on évoque classiquement (Mandel, 1966) au long d'un trajet de chargement d'un système :

- ♦ la phase élastique où tous les éléments sont élastiques ;
- ♦ la phase élasto-plastique, à partir de l'apparition des premières zones plastiques lorsque l'on atteint la limite d'élasticité initiale du système, au cours de laquelle il y a possibilité de déformations plastiques dans les zones plastifiées du système mais qui restent *contenues* par le fait que les déformations des zones élastiques sont, elles, bien déterminées ; aucune différence si ce n'est un "ramollissement" du système, n'apparaît pendant cette nouvelle phase de trajet de chargement par rapport à la précédente, quant à la réponse du système à la solli-

citation qui lui est imposée (réponse  $\underline{q}(t)$  à  $\underline{Q}(t)$ ) ;

♦ la fin de la phase élasto-plastique marquée par le moment où les zones élastiques ne suffisent plus à contenir les possibilités de déformations illimitées des zones plastiques, en sorte que la réponse  $\underline{q}$  du système à  $\underline{Q}$  donné devient alors indéterminée par un terme additif dépendant (au moins) d'un facteur positif arbitraire non décroissant : ce qui sera défini comme le début de la ruine plastique en géométrie initiale du système.

Si cette description se révèle valable pour les structures composées d'un nombre fini d'éléments, divers exemples peuvent par contre être cités qui viennent l'infirmier dans le cas général : ainsi le problème de la flexion simple d'une poutre met en évidence l'existence d'une charge limite mais qui apparaît comme une asymptote et ne correspond donc pas au concept de ruine plastique tel que décrit ci-dessus.

On démontrera dans la suite (§ 4.5) les résultats suivants :

pour un système satisfaisant les conditions indiquées relatives au comportement du matériau constitutif, en géométrie initiale, dans un mode de chargement à  $n$  paramètres,

si  $\underline{Q}$  est un chargement tel que  
il existe un champ de contraintes  $\underline{\sigma}$  statiquement admissible qui l'équilibre et respecte le critère en tout point,  
il existe un champ de vitesse  $\underline{v}$  cinématiquement admissible associé à  $\underline{\sigma}$  par la règle d'écoulement (donc purement plastique), et tel que  $\dot{\underline{q}}(\underline{v}) \neq 0$ ,

1° alors  $\underline{Q}$  est *chargement extrême* et on dira que  $\underline{v}$  est un *champ de vitesse d'écoulement plastique libre* et  $(\underline{\sigma}, \underline{v})$  une *solution complète d'écoulement plastique libre* ;

2° de plus tous les champs de contraintes statiquement admissibles avec  $\underline{Q}$ , coïncident dans les zones déformées de toute solution complète d'écoulement plastique libre correspondant à ce chargement ; en particulier ils coïncident dans les zones déformées du champ  $\underline{v}$ .

Il en découle alors l'énoncé suivant :

*Si le chargement extrême limitant l'histoire de charge subie par le système est associé comme ci-dessus à une solution d'écoulement plastique libre, alors on peut affirmer que si ce chargement est effectivement atteint, il y aura pour le système apparition de l'écoulement plastique libre en ce sens que : sous ce chargement  $Q$  maintenu constant, le système pourra se déformer sans limitation, le champ de vitesse sous chargement constant sera purement plastique et sera arbitraire par au moins un facteur scalaire non négatif.*

On retrouve bien alors le concept de ruine plastique tel qu'évoqué au § 3.2 et mis en évidence au § 3.1.

Il convient de remarquer que les deux conditions successives indiquées dans l'énoncé ne sont pas de simples clauses de style ; il existe en effet des contre-exemples pour chacune d'elles :

le problème de la flexion circulaire d'un cylindre élasto-plastique déjà évoqué donne l'exemple d'un chargement extrême  $Q$ , associé à une solution d'écoulement plastique libre, mais qui n'est jamais effectivement atteint ;

le problème de la capacité portante d'une fondation superficielle sur un sol purement cohérent dont la cohésion, nulle en surface, croît linéairement avec la profondeur (Salençon, 1974), donne l'exemple d'un chargement extrême qui n'est pas associé à une solution d'écoulement plastique libre.

---

4 - CHARGEMENT D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE LIBRE ; SYSTÈME RIGIDE  
PARFAITEMENT PLASTIQUE ASSOCIÉ A UN SYSTÈME ÉLASTO-PLASTIQUE

---

4.1 - RETOUR SUR L'EXEMPLE DU § 3.1

Sur l'exemple du § 3.1, on a mis en évidence qu'au moment où la charge  $P_4$  est atteinte, la solution du problème d'évolution élasto-plastique devient indéterminée du point de vue des déplacements par un mécanisme purement plastique associé à la distribution de moments fléchissants statiquement admissible équilibrant  $P_4$ , trouvée dans cette évolution.

Considérons le portique identique au précédent du point de vue de la géométrie, soumis au même mode de chargement, et constitué de poutres rigides parfaitement plastiques de même moment limite que le précédent c'est à dire pour lesquelles le diagramme "moment-courbure" est celui représenté à la figure 6 avec possibilité de formation de rotules plastiques dans les sections plastifiées.

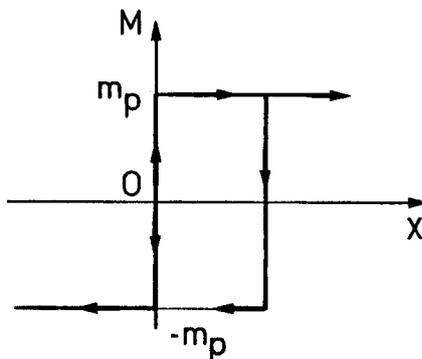


Figure 6 : Poutre rigide parfaitement plastique : diagramme "moment-courbure".

Pour ce portique la charge  $P_4$  apparaît comme une charge potentiellement supportable sous laquelle la déformation du portique est possible ; il existe en effet une distribution de moments fléchissants ( $M$ ) équilibrant  $P_4$  et respectant le critère de plasticité, à laquelle est associée, par le schéma de comportement de la figure 6, une distribution de vitesses de courbure et de vitesses de rotations de rotules ( $\dot{\chi}$ ,  $\dot{\theta}$ ) dans laquelle la puissance des forces extérieures est non nulle : il suffit de prendre pour ( $M$ ) la distribution trouvée au terme de l'évolution du portique élasto-plastique, et pour ( $\dot{\chi}$ ,  $\dot{\theta}$ ) le mécanisme purement plastique correspondant.

Ce lien avec la structure *rigide parfaitement plastique "associée"* apparaît aussi lorsque l'on a appliqué la méthode d'approche par l'extérieur pour démontrer que  $P_4 = P^+$ , si l'on se réfère à la remarque faite *in fine* au § 4.7 du chapitre I "Théorie du Calcul à la rupture".

#### 4.2 - SYSTÈME RIGIDE PARFAITEMENT PLASTIQUE ASSOCIÉ A

#### UN SYSTÈME ÉLASTIQUE PARFAITEMENT PLASTIQUE DONNÉ

De façon générale nous introduirons le système  $(s_r)$  rigide parfaitement plastique associé au système élastique parfaitement plastique  $(s)$ , défini comme le système géométriquement identique à  $(s)$  et constitué du matériau

- ♦ identique en chaque point à celui de  $(s)$  du point de vue des propriétés plastiques (critère de plasticité et règle d'écoulement plastique) ;
- ♦ indéformable hormis plastiquement.

Ce système  $(s_r)$  est soumis au même processus de chargement que  $(s)$ .

On peut énoncer immédiatement les résultats suivants :

1°  $(s_r)$  ne peut pas supporter un chargement  $\underline{Q}$  extérieur à  $K$  ;

2° Les contraintes dans  $(s_r)$  sous un chargement  $\underline{Q}$  au cours d'une histoire de charge donnée ne peuvent en général pas être complètement déterminées (en conséquence du comportement "rigide") ;

3° Il ne peut y avoir déformation de  $(s_r)$  que si l'on exerce un chargement  $\underline{Q}$  tel que :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \exists \underline{\sigma} \in H \text{ en équilibre avec } \underline{Q} \\ \exists \underline{v} \neq 0 \text{ cinématiquement admissible, associé à } \underline{\sigma} \\ \text{par la règle d'écoulement} \end{cases}$$

Il ne s'agit que de *possibilité* de déformation c'est à dire que l'on n'est pas assuré qu'il y ait effectivement, et toujours déformation sous un tel  $\underline{Q}$ .

Une solution  $(\underline{\sigma}, \underline{v})$  possédant les propriétés (4.1) sera appelée *solution d'écoulement plastique libre* <sup>(1)</sup> et le chargement  $\underline{Q}$  correspondant *chargement d'écoulement plastique libre* pour  $(s_r)$ .

Ainsi pour l'exemple ci-dessus  $P_4$  est une *charge d'écoulement plastique libre* pour le portique rigide parfaitement-plastique associé, la solution  $(M, \theta)$  correspondante, constituée de la distribution  $(M)$  trouvée au terme de l'évolution élasto-plastique et du mécanisme purement plastique, étant une *solution d'écoulement plastique libre*.

#### 4.3 - PROPRIÉTÉS DES CHARGEMENTS D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE LIBRE DANS L'HYPOTHÈSE DU PRINCIPE DU TRAVAIL PLASTIQUE MAXIMAL

Soit alors  $\underline{Q}_\ell$  un chargement d'écoulement plastique libre pour  $(s_r)$  et soit  $(\underline{\sigma}, \underline{v})$  une solution d'écoulement plastique libre correspondante (par définition il en existe au moins une), qui possède donc les propriétés (4.1).

On a évidemment  $\underline{Q}_\ell \in K$  puisque  $\underline{\sigma} \in H$  ;

d'autre part en appliquant le principe des puissances virtuelles aux champs  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{v}$  il vient :

$$\int_V \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) dV + \int_\Sigma \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket d\Sigma = \underline{Q}_\ell \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v})$$

d'où, compte tenu de (4.1) et par application de (2.6) et (2.8) :

$$(4.2) \quad P(\underline{v}) = \underline{Q}_\ell \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}).$$

En rapprochant ces deux résultats on voit que  $\underline{Q}_\ell$  est sur la frontière de  $K$  :

dans l'hypothèse du principe du travail plastique maximal les chargements d'écoulement plastique libre pour  $(s_r)$  sont des chargements extrêmes de  $(s)$  ;

---

<sup>(1)</sup> Ou, pour plus de précision : solution complète d'écoulement plastique libre, en prolongeant la terminologie de Bishop (1953).

de plus le plan d'équation :

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - P(\underline{v}) = 0$$

est tangent en  $\underline{Q}_\ell$  à  $K$  ;  $\dot{\underline{q}}(\underline{v})$  est normale extérieure à  $K$  en  $\underline{Q}_\ell$  et on a :

$$(\underline{Q}_\ell - \underline{Q}) \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \geq 0, \quad \forall \underline{Q} \in K,$$

propriété appelée parfois "théorème du travail maximal" (Mandel, 1966).

#### 4.4 - "UNICITÉ" DES CHAMPS DE CONTRAINTE D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE LIBRE

Les théorèmes "d'association" et d'unicité énoncés dans la théorie du calcul à la rupture prennent une forme et une signification nouvelles compte tenu de ce que la règle de normalité qui était apparue mathématiquement alors, définit maintenant la règle d'écoulement plastique du matériau.

##### Théorème d'association :

Soit  $\underline{Q}$  un chargement de  $K$ , équilibré par  $\underline{\sigma} \in H$ ,

Soit  $\underline{v} \neq 0$  un champ cinématiquement admissible, et tel que :

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - P(\underline{v}) = 0,$$

alors on peut affirmer que :

- ♦  $\underline{Q}$  est sur la frontière de  $K$ , et  $\dot{\underline{q}}(\underline{v})$  y est normal extérieur à  $K$ ,
- ♦ le champ  $\underline{v}$  est plastiquement admissible,
- ♦ le champ statiquement et plastiquement admissible  $\underline{\sigma}$  et le champ cinématiquement et plastiquement admissible  $\underline{v}$  sont associés par la règle d'écoulement normale.

♦  $(\underline{\sigma}, \underline{v})$  constitue une solution complète d'écoulement plastique libre pour  $(s_r)$  et  $\underline{Q}$  est chargement d'écoulement plastique libre pour  $(s_r)$ .

Théorème d'unicité :

Soit  $\underline{Q}_\ell$  un chargement d'écoulement plastique libre pour  $(s_r)$  :

il n'y a pas nécessairement unicité pour les champs  $\underline{\sigma} \in H$  et équilibrant  $\underline{Q}_\ell$  ; de même il peut exister plusieurs champs  $\underline{v}$  cinématiquement admissibles pour l'écoulement plastique libre sous  $\underline{Q}_\ell$  c'est-à-dire tels que :

$$\underline{Q}_\ell \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - P(\underline{v}) = 0$$

et il n'y a pas nécessairement unicité de  $\dot{\underline{q}}(\underline{v})$  (figure 7) ; mais en appliquant à ces champs le théorème d'association on démontre que :

il y a unicité du champ de contrainte dans la réunion des zones déformées de tous les champs  $\underline{v}$  <sup>(1)</sup>.

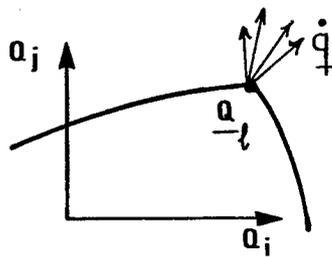


Figure 7 : Plusieurs  $\dot{\underline{q}}$  pour un même  $\underline{Q}_\ell$  .

Le théorème peut aussi prendre maintenant une autre forme, en considérant non plus  $\underline{Q}_\ell$  mais la vitesse de déformation du système,  $\dot{\underline{q}}$  .

Soit  $\dot{\underline{q}}^\circ$  une valeur donnée de la vitesse de déformation du système ; l'écoulement plastique libre de  $(s_r)$  sous la condition  $\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}^\circ$  peut se produire selon diverses solutions complètes (champs  $\underline{\sigma}$ , champs  $\underline{v}$ ), et éventuellement pour diverses valeurs de  $\underline{Q}$  (figure 8) ; mais il y a unicité <sup>(1)</sup> des champs  $\underline{\sigma}$  de ces diverses solutions dans la réunion de leurs zones déformées.

Remarquons que cette deuxième forme du résultat d'unicité n'a pas été énoncée pour le calcul à la rupture car elle ne présente évidemment que peu d'intérêt pratique lorsque la règle de normalité n'est que mathématique et ne définit pas la loi d'écoulement plastique du matériau.

---

<sup>(1)</sup> Unicité sans condition supplémentaire si  $C(\underline{x})$  est strictement convexe. Si  $C(\underline{x})$  n'est pas strictement convexe les conditions supplémentaires ont été évoquées au chapitre I "Théorie du Calcul à la rupture" avec en particulier les résultats dus à Hill (1951) et à Mandel (1965).

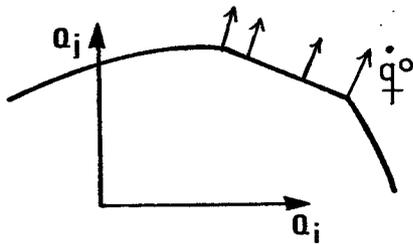


Figure 8 :  
Plusieurs  $\underline{Q}$  pour un même  $\dot{\underline{q}}_0$

La démonstration en est aisée :

toute solution complète d'écoulement plastique libre telle que  $\dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}_0$  permet de définir à partir de son champ  $\underline{v}$  un hyperplan d'appui de  $K$ , d'équation :

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}_0 - P(\underline{v}) = 0 ;$$

cette équation sera indépendante de la solution choisie car il s'agira toujours du même hyperplan de normale  $\dot{\underline{q}}_0$  tangent à  $K$  ; et elle sera vérifiée par tous les chargements  $\underline{Q}_\rho$  pour lesquels il y a écoulement plastique libre dans la direction  $\dot{\underline{q}}_0$  ; alors par application du théorème des puissances virtuelles, on pourra écrire pour tout champ  $\underline{\sigma}$  d'une solution complète d'écoulement plastique libre pour  $(s_r)$  correspondant à la vitesse de déformation  $\dot{\underline{q}}_0$ , et pour tout champ  $\underline{v}$  d'une autre telle solution :

$$\int_V \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) dV + \int_\Sigma \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket d\Sigma = P(\underline{v})$$

dont on déduit le résultat d'unicité comme précédemment.

En ce qui concerne les champs de vitesse des solutions d'écoulement plastique libre, il n'y a évidemment aucun résultat d'unicité : pour un même chargement d'écoulement plastique libre les champs de vitesse d'écoulement plastique libre constituent un cône convexe. Il n'y a pas non plus unicité à  $\dot{\underline{q}}$  donné.

#### 4.5 - CONSÉQUENCES POUR LES CHARGEMENTS LIMITES

Comme annoncé au § 3.2, les résultats ci-dessus ont des conséquences importantes en ce qui concerne les chargements limites.

Supposons en effet que le chargement limite  $Q_\ell$  sur un trajet de chargement pour (s), soit aussi un chargement d'écoulement plastique libre pour ( $s_r$ ), c'est-à-dire qu'il existe une solution d'écoulement plastique libre correspondante ; supposons de plus que ce chargement soit effectivement atteint lorsqu'on effectue un processus de charge pour (s) suivant ce trajet de chargement. Alors il résulte des théorèmes d'unicité et d'association, que le champ de contraintes déterminé par la résolution élasto-plastique au long du trajet de charge pour ce chargement  $Q_\ell$ , coïncide nécessairement avec celui de la solution d'écoulement plastique libre dans les zones déformées de celle-ci (<sup>1</sup>), et qu'il est associé par la règle d'écoulement plastique au champ de vitesse de la solution d'écoulement plastique libre.

En conséquence, lorsque sur le trajet de charge du système (s) on atteindra la valeur  $Q_\ell$ , le champ de déplacement pourra continuer à évoluer sous charge constante : le champ de vitesse correspondant sera l'un quelconque des champs d'écoulement plastique libre appartenant au cône convexe décrit plus haut et ne sera donc, en particulier, pas déterminé du point de vue de son amplitude.

La réponse  $q$  du système (s) au chargement  $Q$  devient alors indéterminée par (au moins) un terme additif dépendant d'un facteur positif arbitraire non décroissant : c'est ainsi que nous avons tenté de définir le concept de ruine plastique.

Comme indiqué au § 3.2, les deux hypothèses faites ci-dessus concernant  $Q_\ell$  sont importantes. Il n'y a pas toujours identité entre les concepts de chargement limite et de chargement d'écoulement plastique libre, et de plus le chargement limite ne peut pas toujours être effectivement atteint. Elles ont été implicitement admises par beaucoup d'auteurs qui, généralisant au milieu continu

---

(<sup>1</sup>) Sous les conditions supplémentaires éventuelles déjà indiquées.

les résultats mis en évidence sur les structures discrètes, considèrent que l'existence, sur tout trajet de chargement pour (s), d'un chargement pour lequel il y ait poursuite de la déformation de (s) dans un champ de vitesse purement plastique sous charge constante, est une question de pur bon sens <sup>(1)</sup> : les notions de chargements extrêmes, chargements d'écoulement plastique libre pour (s<sub>r</sub>), chargements de ruine plastique, sont alors confondues sous la dénomination de chargements limites.

Les études entreprises dans ce domaine ont permis de dégager des hypothèses suffisantes pour pouvoir affirmer l'existence des chargements d'écoulement plastique libre (Nayroles, 1972 ; Frémond et Friaà, 1978). En reprenant les notations du chapitre I, cette existence est équivalente aux deux propositions :

$$K = \bar{K} \quad \text{et} \quad \Pi(\dot{q}) = \underset{\underline{v}}{\text{Min}} \left\{ P(\underline{v}) \mid \underline{v} \text{ C.A. avec } \dot{q} \right\}$$

#### 4.6 - SIGNIFICATION DU MODÈLE DE COMPORTEMENT

##### RIGIDE PARFAITEMENT PLASTIQUE

Après avoir fait allusion au schéma de comportement rigide parfaitement plastique au chapitre I (§ 4.7), en le traitant comme une "image" pour illustrer le choix des champs de vitesse dans l'utilisation de l'approche par l'extérieur de la théorie du calcul à la rupture, nous l'avons présenté et utilisé dans le présent chapitre au § 4.2 à partir de l'exemple du § 4.1. On remarquera que la définition de ce schéma est ici faite dans l'absolu sans avoir recours au passage à la limite qui est souvent présenté à partir du système en matériau élastique linéaire parfaitement-plastique (Drucker, Greenberg et Prager, 1951 ; Drucker, Prager et Greenberg, 1952 ; Hill, 1952 ; Lee, 1952 ; Mandel, 1966). Les résultats qui ont ensuite été présentés (§ 4.3 à 4.5) ont précisé la signification pratique de ce schéma qui, par nature, ignore tout ce qui n'est pas plasticité dans le système initial.

---

<sup>(1)</sup> On vérifiera d'ailleurs aisément que, dans le cas d'un critère de plasticité sans point singulier, il suffit qu'il y ait poursuite de la déformation sous chargement constant pour pouvoir affirmer que le champ de vitesse correspondant est purement plastique.

On a ainsi mis en évidence que dans l'hypothèse où la déformation sous charge constante est possible pour (s) -écoulement plastique libre pour (s)- c'est à dire lorsqu'il y a existence de l'écoulement plastique libre pour ( $s_r$ ) et possibilité pour le chargement correspondant d'être effectivement atteint sur le trajet de charge pour (s), il y a équivalence entre ( $s_r$ ) et (s) du point de vue de l'étude de la ruine plastique : ce sont les théorèmes d'unicité pour les chargements et pour les champs de contrainte .

En particulier, l'équivalence vis-à-vis de l'étude de la ruine plastique entre le rigide parfaitement plastique défini *ex abrupto* et les rigides parfaitement-plastiques définis par passage à la limite, se trouve alors démontrée. (Il est bon de remarquer en effet que la définition par passage à la limite conduit à autant de systèmes ( $s_r$ ) que de systèmes (s) différents les uns des autres au départ en particulier par leurs propriétés élastiques).

---

## 5 - APPLICATION A L'ÉTUDE DES PROBLÈMES DE MISE EN FORME DES MÉTAUX

---

### 5.1 - POSITION DU PROBLÈME

L'utilisation de la théorie de la plasticité pour l'analyse des problèmes de mise en forme des métaux est loin d'être une idée récente. Les problèmes classiques (tels que le poinçonnement, l'écrasement, etc.) ont été étudiés par les grands auteurs, et on peut dire que l'ouvrage de Hill (1950), qui est en grande partie à l'origine de la formulation actuelle de la théorie de la plasticité, est issu des travaux nombreux de son auteur dans le domaine des procédés de formage des métaux.

Le but de l'analyse d'un problème de mise en forme est, en règle générale, double : d'une part déterminer de façon plus ou moins exacte les efforts nécessaires à la mise en oeuvre du procédé, d'autre part tenter de comprendre le déroulement même du procédé de façon "intime". Il est clair que sur le premier point, les théorèmes de l'analyse limite permettront, sous certaines hypothèses, d'obtenir une réponse. Par contre, on verra dans la suite que les réponses susceptibles d'être obtenues sur le second point n'ont qu'un caractère heuristique.

### 5.2 - DÉTERMINATION DES EFFORTS

Le matériau constituant le système étudié est en général modélisé en ce qui concerne son comportement plastique, comme un matériau de von Mises (critère de von Mises et règle d'écoulement normale associée) ; les conditions aux interfaces sont en général du type "frottement de Tresca" appelé aussi frottement de couche : cet interface a été présenté au chapitre II (§ 3.3) en ce qui concerne son critère de résistance, qui est convexe, il est de plus "standard" pour ce qui est de sa règle d'écoulement (cf § 6.4.3.). Le principe du travail plastique maximal est ainsi satisfait en tout point du système.

En faisant l'hypothèse que le matériau n'est pas écrouissable on obtient par application directe des méthodes statique et cinématique de l'analyse limite des approximations par défaut et par excès des efforts nécessaires à la mise en oeuvre du procédé. Bien que l'hypothèse de *parfaite plasticité* ne soit qu'exceptionnellement réalisée, cette méthode d'étude conduit souvent à des résultats très intéressants. Des améliorations ont été envisagées pour tenter, à partir d'un premier calcul de ce type, d'effectuer des itérations permettant de prendre en compte l'écrouissage d'une certaine manière : les résultats obtenus par ces variantes n'ont, au plus, qu'une valeur qualitative car il se pose à leur sujet les questions qui seront évoquées au § 5.3.

Les procédés sont le plus souvent étudiés en régime stationnaire et donc dans une géométrie invariable (problème de filage ou d'extrusion par exemple) ; on pourra aussi être intéressé à suivre le procédé tout au long, ce qui se fera pas à pas sur la succession des géométries depuis la pièce dans sa forme initiale jusqu'à la forme achevée.

On utilise couramment la méthode cinématique, en imaginant des modes de déformation plastique possibles pour le procédé. Ces modes de déformation seront par exemple, dans le cas d'un problème de déformation plane :

- des mécanismes par blocs indéformables où la déformation du système provient des discontinuités de vitesse (glissement) entre les blocs,
- des champs de vitesse construits par assemblage de blocs se déformant de façon simple : blocs de Kudo (1960, 1961), utilisés par exemple par Oudin et Ravalard (1978),
- des champs de vitesse construits par la méthode dite "des lignes de glissement"
- des champs de vitesse obtenus analytiquement ou construits numériquement par la méthode des éléments finis, respectant l'invariance du volume.

Pour les problèmes axisymétriques la gamme est à peu près identique : blocs de Kudo, lignes de glissement <sup>(1)</sup>, champs analytiques (Shield, Avitzur), champs obtenus par les éléments finis. On se reportera par exemple à (Delbecq et col., 1977 ; Frémond, Pecker et Salençon, 1974 ; Johnson et Kudo, 1962 ; Kobayashi, 1965 ; Salençon, 1975 ; etc.).

---

<sup>(1)</sup> Le champ de vitesse construit par la méthode "des lignes de glissement" axisymétrique, pour le matériau de Tresca dans l'hypothèse de Haar-Karman, est évidemment valable pour le matériau de von Mises.

### 5.3 - PROBLÈME DE CONVERGENCE

L'information obtenue quant aux efforts, par l'utilisation classique de la méthode cinématique se révèle souvent intéressante mais, comme on l'a dit, le problème posé dans l'étude du procédé de formage vise souvent à la compréhension même du procédé du point de vue "intime", le but étant par exemple de déterminer la cause d'apparition de certains défauts dans les pièces produites. On fait alors une utilisation purement heuristique de la méthode cinématique qui, sous le nom de "méthode de la borne supérieure", peut se résumer de la façon suivante (Baqué et col., 1973) :

*Parmi les modes de déformation plastique possibles que l'on a imaginés pour le procédé, celui qui donne la plus petite valeur à la puissance dissipée, est celui qui représente le mieux ce procédé de mise en forme.*

Il est clair que cette interprétation de la méthode cinématique ne découle pas des résultats qui ont été établis jusqu'ici. Elle suppose évidemment que le processus de mise en forme résulte de l'apparition de l'écoulement plastique libre dans le système en matériau élasto-plastique : c'est l'hypothèse d'existence de l'écoulement plastique libre pour (s) évoquée au § 4.6 et qui sera ici considérée comme une "évidence physique". Mais de plus elle sous-entend, pour le système ( $s_r$ ), une idée de convergence des solutions cinématiques vers la solution "exacte" au fur et à mesure que la puissance dissipée décroît, à propos de laquelle rien n'a été démontré jusqu'à ce jour. De plus, il est évident qu'un théorème mathématique de convergence ne serait certainement pas applicable au niveau du choix entre quelques modes de déformation.

Le problème ainsi posé n'est en tout cas pas sans intérêt :

d'abord parce que, même s'il est facile de fournir des contre-exemples à la "méthode de la borne supérieure", on doit remarquer que l'utilisation qui en a été faite pratiquement s'est, en général, révélée fructueuse ;  
ensuite parce que l'utilisation de la méthode des éléments finis amène à choisir parmi des modes de déformation qui dépendent d'un grand nombre de paramètres ;

enfin parce que cette question a une portée plus vaste que le domaine des problèmes de formage des métaux et alliages : il est à remarquer en effet que les ingénieurs constructeurs, utilisateurs de la méthode cinématique pour l'étude des plaques et dalles minces, se sont en général bien gardés de tirer toute conclusion allant au-delà de l'approximation par excès de la capacité portante.

Du point de vue de la convergence, compte tenu de la forme des théorèmes d'unicité démontrés ci-dessus et des contre-exemples connus mettant en évidence la non unicité du mode de déformation et du champ de contrainte hors des zones déformées dans des solutions complètes d'écoulement plastique libre, on peut penser que le théorème porterait d'une manière ou d'une autre sur les zones déformées et sur le champ de contrainte dans celles-ci.

D'autre part, en ce qui concerne l'utilisation d'un tel théorème au niveau du choix entre quelques modes de déformation, l'idée intuitive est que si l'on a imaginé des modes de déformation faisant intervenir tous les mécanismes potentiellement critiques pour le problème posé, (par exemple : mécanisme "de compression", "du trou" "de l'angle", de "l'emporte-pièce", du "poinçonnement", du "bipoinçonnement",...), la valeur de la puissance dissipée peut constituer un critère de choix entre ceux-ci indiquant la tendance du mode de déformation réel. Ceci correspond d'ailleurs à l'utilisation que l'on fait spontanément de la méthode cinématique et met bien en relief l'importance de l'imagination que l'on sait déployer dans l'invention de modes de déformation possibles.

---

## 6 - THÉORÈMES DE DRUCKER, RADENKOVIC, PALMER

---

### 6.1 - POSITION DU PROBLÈME

On a, au § 4, introduit le système  $(s_r)$  rigide parfaitement plastique associé au système  $(s)$  élastique parfaitement plastique, et on a défini pour ce système les notions d'écoulement plastique libre, de solution complète d'écoulement plastique libre et de chargement d'écoulement plastique libre. Toutes ces notions sont indépendantes du principe du travail plastique maximal. Par contre, les théorèmes énoncés ensuite et leurs conséquences sont évidemment directement liés à cette hypothèse.

Le résultat essentiel du § 4.3 a consisté à démontrer que les chargements d'écoulement plastique libre pour  $(s_r)$ , qui en tout état de cause sont bornés extérieurement par la frontière de  $K$ , sont en fait sur cette frontière. La question que l'on va maintenant se poser est de savoir si, hors du principe du travail plastique maximal mais sous certaines hypothèses concernant le critère de plasticité du matériau et sa règle d'écoulement plastique, il est possible de mettre en évidence une frontière intérieure pour les chargements d'écoulement plastique libre pour  $(s_r)$ , c'est à dire de montrer que ces chargements sont nécessairement compris dans une couronne.

### 6.2 - THÉORÈME DE RADENKOVIC

Dans cet esprit un théorème a été énoncé d'abord dans le cas du matériau de Coulomb d'angle de frottement interne  $\varphi$  dont la règle d'écoulement est définie par un angle de dilatation  $\nu$ , ( $0 \leq \nu \leq \varphi$ ), puis généralisé (Radenkovic, 1961, 1962 ; voir aussi Chen, 1975).

Nous le présentons sous sa forme générale (Salençon, 1972 b), qui inclut entre autres cas particuliers, les problèmes d'interfaces à frottement de Coulomb qui avaient fait l'objet de deux théorèmes antérieurs dus à Drucker (1954).

On considère des matériaux dont le comportement plastique est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{un critère de plasticité convexe } f[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})] \\ \text{une fonction } g[\underline{x} ; \underline{\sigma}'(\underline{x})] \text{ convexe de } \underline{\sigma}'(\underline{x}) \text{ et telle que :} \\ \text{si } \underline{\sigma}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^6 \text{ vérifie } f[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})] = 0 , \\ \text{si } \underline{d}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^6 \text{ est associé à } \underline{\sigma}(\underline{x}) \text{ par la règle d'écoulement,} \\ \text{alors } \exists \underline{\sigma}'(\underline{x}) \in \mathbb{R}^6 \text{ vérifiant } g[\underline{x} ; \underline{\sigma}'(\underline{x})] = 0 \\ \text{et tel que } \underline{d}(\underline{x}) \in \lambda' \partial g[\underline{x} ; \underline{\sigma}'(\underline{x})] , \lambda' \geq 0 \\ \text{avec de plus : } \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \geq \underline{\sigma}'(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) ; \end{array} \right.$$

des propriétés homologues de celles-ci seront obtenues pour les discontinuités de vitesse en introduisant le tenseur  $\underline{d}[\underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket]$  comme il a été rappelé au § 2.4.2.

Soit maintenant une solution complète  $(\underline{\sigma}, \underline{v})$  d'écoulement plastique libre pour le système  $(s_r)$  constitué de ce matériau ;  $\underline{Q}$  est le chargement correspondant et  $\dot{\underline{q}}$  la vitesse de déformation.

Le théorème des puissances virtuelles s'écrit :

$$(6.2) \quad \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} = \int_V \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) dV + \int_{\Sigma} \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket d\Sigma .$$

En faisant intervenir en chaque point  $\underline{x}$  où  $\underline{d}(\underline{x}) \neq 0$  ou  $\llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket \neq 0$ , le tenseur  $\underline{\sigma}'(\underline{x})$  défini par (6.1), il vient :

$$(6.3) \quad \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} \geq \int_V \underline{\sigma}'(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) dV + \int_{\Sigma} \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}'(\underline{x}) \cdot \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket d\Sigma .$$

Soit compte tenu des correspondances entre  $\underline{d}(\underline{x})$  et  $\underline{\sigma}'(\underline{x})$  et  $[[\underline{v}(\underline{x})]]$  et  $\underline{\sigma}'(\underline{x})$  :

$$(6.4) \quad \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} \geq \int_V \pi_g [\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_\Sigma \pi_g [\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; [[\underline{v}(\underline{x})]]] d\Sigma$$

ou encore :

$$(6.5) \quad \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} \geq P_g(\underline{v})$$

dans lesquels  $\pi_g[\underline{x} ; \cdot]$  désigne la fonction d'appui du convexe  $G_g(\underline{x})$  défini par  $g[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0$ , d'où la signification de  $\pi_g[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \cdot]$  comme indiqué au chapitre I (§ 4.5), et  $P_g(\underline{v})$  est donc la puissance dissipable vis-à-vis de ce convexe.

Par application des résultats du "calcul à la rupture", (6.5) implique que  $\underline{Q}$  n'est pas intérieur au convexe  $K_g$  des chargements potentiellement supportables pour le système identique à (s) et de critère  $g[\underline{x} ; \underline{\sigma}'(\underline{x})]$  en chaque point  $\underline{x}$ .

La frontière de  $K_g$  constitue donc une frontière intérieure pour les chargements d'écoulement plastique libre de  $(s_r)$ . Les chargements d'écoulement plastique libre de  $(s_r)$  sont dans la couronne fermée  $\overline{K - K_g}$  <sup>(1)</sup> (figure 9).

On dispose alors d'une méthode par les contraintes permettant d'approcher par l'intérieur la couronne permise pour les chargements d'écoulement plastique libre de  $(s_r)$  : la construction de champs de contrainte statiquement et plastiquement admissibles vis-à-vis du critère  $g$ , fournit une approche par l'intérieur de la frontière intérieure de la couronne (figure 9).

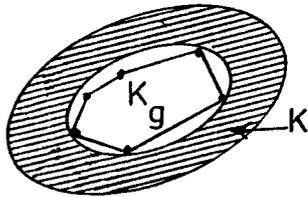


Figure 9 :  
Théorème de Radenkovic.

---

<sup>(1)</sup> On remarquera que (6.1) implique que :  $G_g(\underline{x}) = \left\{ \underline{\sigma}(\underline{x}) \mid g[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0 \right\} \subset G(\underline{x})$   
d'où on retrouve que  $K_g \subset K$ .

### 6.3 - REMARQUES - THÉORÈME DE PALMER

6.3.1 Le théorème de Radenkovic est évidemment applicable aux systèmes dont le matériau constitutif vérifie l'hypothèse de normalité : il suffit de prendre  $g \equiv f$  et  $\underline{\sigma}'(\underline{x}) \equiv \underline{\sigma}(\underline{x})$  dans (6.1).

6.3.2 Pour un matériau de Coulomb dont la règle d'écoulement est définie par un angle de dilatation  $\nu$  ( $0 \leq \nu \leq \varphi$ ) selon les formules :

$$\diamond \text{ si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (\text{contraintes principales})$$

et :

$$\sigma_1(1 + \sin \varphi) - \sigma_3(1 - \sin \varphi) - 2 C \cos \varphi = 0$$

alors :

$$(6.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1 = \dot{\lambda}(1 + \sin \nu), \quad d_2 = 0, \quad d_3 = -\dot{\lambda}(1 - \sin \nu) \\ \dot{\lambda} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\diamond \text{ si } \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$$

et (6.6), alors :

$$(6.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1 = \dot{\lambda}(1 + \sin \nu), \quad d_2 = \dot{\mu}(1 + \sin \nu), \quad d_3 = -(\dot{\lambda} + \dot{\mu})(1 - \sin \nu) \\ \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\mu} \geq 0, \end{array} \right.$$

etc..

alors on pourra prendre pour  $g$  la fonction de Coulomb définie par l'angle  $\nu$  et la cohésion  $C_g = C \operatorname{tg} \nu / \operatorname{tg} \varphi$  (figure 10).

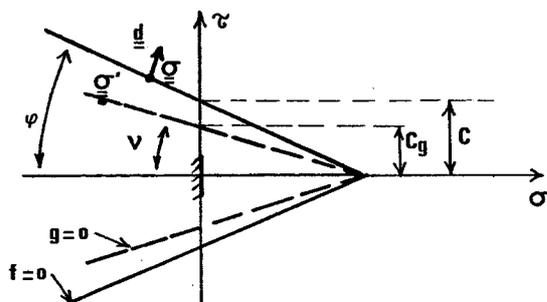


Figure 10 : Matériau de Coulomb d'angle de dilatation  $\nu$  (représentation de Mohr).

### 6.3.3 L'existence d'une fonction $g$ et d'une correspondance

$\underline{\sigma}(\underline{x}) \rightarrow \underline{\sigma}'(\underline{x})$ , telles que (6.1) soit vérifiée, n'est évidemment pas assurée pour toute règle d'écoulement plastique.

D'autre part, lorsqu'il y a existence il n'y a pas unicité : c'est ainsi que si  $g$  et  $\underline{\sigma}(\underline{x}) \rightarrow \underline{\sigma}'(\underline{x})$  satisfont (6.1), alors  $g_m$  définie par  $g_m(\underline{x}; \underline{\alpha}) = g(\underline{x}; m\underline{\alpha})$ ,  $\forall \underline{\alpha}$ , avec  $m > 1$ , et la correspondance  $\underline{\sigma}(\underline{x}) \rightarrow \underline{\sigma}''(\underline{x})/m$  satisfont aussi (6.1) ;

de même on peut effectuer sur  $g$  et  $\underline{\sigma}'(\underline{x})$  certaines translations etc.; dans le cas du matériau de Coulomb cité plus haut, l'indétermination serait encore beaucoup plus grande.

Le théorème du § 6.2, appliqué pour chaque fonction  $g$ , montre alors que  $\underline{Q}$ , chargement d'écoulement plastique libre pour  $(s_r)$ , n'est pas intérieur à la réunion des divers  $K_g$  :

$$\underline{Q} \in \overline{K - \cup K_g}$$

6.3.4 Mais de plus on voit que si  $g_1$  et  $g_2$  sont deux fonctions  $g$  satisfaisant (6.1) avec des correspondances  $\underline{\sigma}(\underline{x}) \rightarrow [\underline{\sigma}'(\underline{x})]^1$  et  $\underline{\sigma}(\underline{x}) \rightarrow [\underline{\sigma}'(\underline{x})]^2$ , alors l'enveloppe convexe des surfaces  $g^1[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})] = 0$  et  $g^2[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})] = 0$  définit une fonction  $g[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})]$  qui satisfait aussi (6.1) avec la correspondance  $\underline{\sigma}(\underline{x}) \rightarrow \underline{\sigma}'(\underline{x})$  évidente. Il en résulte alors par application du théorème du § 6.2, que  $\underline{Q}$ , chargement d'écoulement plastique libre pour  $(s_r)$ , n'est pas intérieur à l'enveloppe convexe de  $K_{g_1} \cup K_{g_2}$ .

D'où :

$$(6.9) \quad \underline{Q} \in \overline{K - (U K_g)^{co}} .$$

6.3.5. - THÉORÈME DE PALMER (1966)

Le mode de construction de la fonction  $g$  enveloppe convexe de toutes les fonctions  $g$  satisfaisant (6.1), a été donné par Palmer, qui a ainsi obtenu la condition nécessaire et suffisante d'applicabilité du théorème de Radenkovic.

La figure 11 représente géométriquement cette construction : par chaque point  $\underline{\sigma}$  de la surface  $f(\underline{x}; \underline{\sigma}) = 0$  dans l'espace  $\mathbb{R}^6$ , on trace les hyperplans orthogonaux à toutes les directions permises pour la vitesse de déformation plastique en ce point. Si ces hyperplans ont une enveloppe, c'est la surface  $g(\underline{x}; \underline{\sigma}') = 0$  avec la fonction  $g$  optimale vérifiant (6.1), le point  $\underline{\sigma}'$  correspondant à  $\underline{\sigma}$  étant un point de contact de l'hyperplan avec son enveloppe. Si ces hyperplans n'ont pas d'enveloppe il n'existe aucune fonction  $g$  satisfaisant (6.1); en effet l'absence d'enveloppe signifie que le domaine limité par la fonction  $g$  enveloppe convexe de toutes les  $g$  possibles est vide !

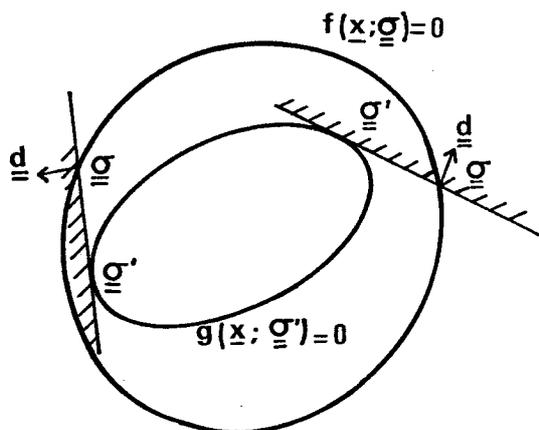


Figure 11 :  
Théorème de Palmer.  
Construction de  $g$ .

## 6.4 - CONDITIONS DE FROTTEMENT AUX INTERFACES

### THÉORÈMES DE DRUCKER

#### 6.4.1. - GÉNÉRALITÉS

Les interfaces ont déjà été étudiées au chapitre II (§ 3) du point de vue du calcul à la rupture ; on en a présenté les divers critères de résistance et les fonctions  $\pi( . )$  associées.

Pour faire l'étude du point de vue de l'analyse limite il convient d'examiner en outre la règle d'écoulement de l'interface, c'est-à-dire que l'on est conduit à considérer complètement la condition de frottement de façon à déterminer si le principe du travail plastique maximal est, ou non, satisfait : en fait, les critères de plasticité des interfaces étant tous convexes comme on l'a déjà vu (chapitre II, § 3), il s'agira de vérifier la règle de normalité.

Les notations sont presque identiques à celles du chapitre II (§ 3) : la seule différence tenant au fait que, puisque l'on n'étudiera que des interfaces isotropes, on se restreindra à des représentations bidimensionnelles du type  $(\sigma, \tau)$  et  $(u_n, u_t)$  dont les composantes tangentielles  $\tau$  et  $u_t$  seront, ici algébriques.

$\underline{n}$  : vecteur unitaire normal à l'interface, dirigé du milieu (1) vers le milieu (2)

$\underline{t}$  : vecteur unitaire tangent à l'interface, situé dans le plan du vecteur contrainte appliquée, et du vecteur discontinuité de vitesse

$\underline{T} = (\sigma, \tau)$  : vecteur contrainte sur la facette de normale  $\underline{n}$ , de composantes normale et tangentielle  $\sigma$  et  $\tau$

$\underline{V} = \llbracket \underline{v} \rrbracket = \underline{v}^{(2)} - \underline{v}^{(1)} = (u_n, u_t)$  : vecteur discontinuité de vitesse de composantes normale et tangentielle  $u_n$  et  $u_t$ .

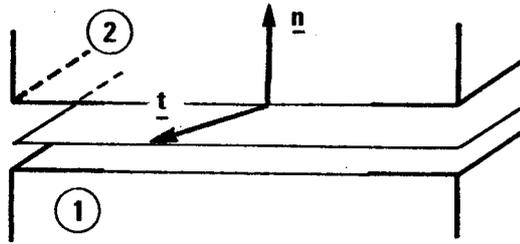


Figure 12 :  
Interface entre les milieux  
(1) et (2).

#### 6.4.2 - INTERFACE LISSE OU SANS FROTTEMENT

---

Le convexe de plasticité est défini par :

$$(6.10) \quad f(\underline{T}) = \text{Sup} \{ \sigma, |\tau| \} \leq 0 ;$$

la règle d'écoulement :

$$(6.11) \quad \begin{cases} \sigma < 0, \tau = 0 \implies u_n = 0 \\ \sigma = 0, \tau = 0 \implies u_n \geq 0. \end{cases}$$

Le principe du travail plastique maximal est satisfait (figure 13).

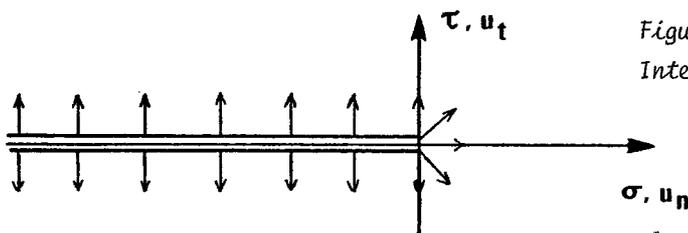


Figure 13 :  
Interface lisse.

6.4.3. - INTERFACE A FROTTEMENT "DE TYPE TRESCA"

---

Le convexe de plasticité est défini par :

$$(6.12) \quad f(\underline{T}) = \text{Sup} \left\{ \sigma, |\tau| - k_i \right\} \leq 0 ;$$

la règle d'écoulement s'écrit :

pour le glissement

$$(6.13) \quad \sigma < 0, |\tau| = k_i \implies u_n = 0, \tau \cdot u_t \geq 0 ,$$

pour le décollement

$$(6.14) \quad \begin{cases} \sigma = 0, |\tau| < k_i \implies u_n \geq 0, u_t = 0 & (1) \\ \sigma = 0, |\tau| = k_i \implies u_n \geq 0, \tau \cdot u_t \geq 0 \end{cases}$$

Le principe du travail plastique maximal est satisfait (figure 14).

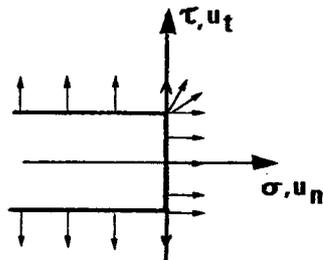


Figure 14 : Interface à frottement "de type Tresca".

6.4.4. - INTERFACE A FROTTEMENT "DE TYPE COULOMB"

---

Le convexe de plasticité est défini par :

$$(6.15) \quad f(\underline{T}) = \left( |\tau| + \sigma \text{tg} \varphi_i \right) \leq 0 ;$$

la règle d'écoulement :

$$(6.16) \quad \begin{cases} \sigma < 0, |\tau| = -\sigma \text{tg} \varphi_i \implies u_n = 0, \tau \cdot u_t \geq 0 \\ \sigma = 0, |\tau| = 0 \implies u_n \geq 0 \end{cases}$$

Ce comportement est représenté à la figure 15.

---

(1) Composante tangentielle nulle si  $|\tau| < k_i$ .

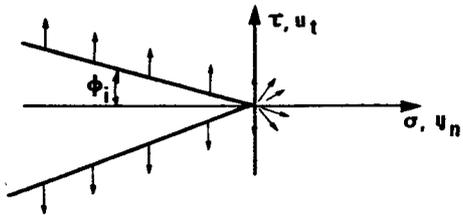


Figure 15 : Interface à frottement  
"de type Coulomb"

Il y a bien convexité du critère mais l'hypothèse de normalité n'est pas satisfaite. On voit que dans ce cas la fonction  $g$  optimale à utiliser dans le théorème de Radenkovic-Palmer est celle de l'interface lisse.

#### 6.4.5. - INTERFACES "PARFAITEMENT RUGUEUSE" et "COLLÉE"

-----

L'interface "à adhérence totale" ou "collée" est une idéalisation correspondant au convexe de plasticité défini par :

$$f(\underline{T}) = -C \leq 0$$

où  $C$  est une constante positive, c'est-à-dire que  $\sigma$  et  $\tau$  peuvent prendre des valeurs quelconques. En ce qui concerne la règle d'écoulement : il n'y a aucune discontinuité de vitesse dans l'interface :

$$u_n = 0 \quad u_t = 0 .$$

Le principe du travail plastique maximal est satisfait !

L'interface parfaitement rugueuse peut être décrite comme une interface à frottement "de type Tresca" où  $k_i = \infty$  :

convexe de plasticité défini par :

$$f(\underline{T}) = \sigma \leq 0$$

règle d'écoulement :

$$\sigma = 0 \implies u_n \geq 0, \quad u_t = 0 ,$$

le principe du travail plastique maximal est satisfait.

Ces deux idéalizations interviennent dans les théorèmes établis par Drucker.

#### 6.4.6. - REMARQUE

-----

Rappelons que l'on a évoqué au chapitre II (§ 3.7) comment il y avait lieu de traiter l'interface du point de vue global en calcul à la rupture, en faisant intervenir les critères de résistance des matériaux constitutifs des milieux (1) et (2).

#### 6.4.7. - THÉORÈMES

-----

On s'intéresse maintenant au rôle des interfaces du point de vue de l'analyse limite en supposant que les matériaux constitutifs proprement dits sont parfaitement plastiques standards.

6.4.7.1. Pour les interfaces lisses ou à frottement de "type Tresca" les théorèmes de l'analyse limite classique sont valables puisque pour ceux-ci la règle de normalité est vérifiée.

6.4.7.2. Pour l'interface à frottement de "type Coulomb", la règle de normalité n'étant plus vérifiée, on a recours au théorème de Radenkovic-Palmer (6.9). Il en résulte de façon immédiate, compte tenu du § 6.4.4., que :

les chargements d'écoulement plastique libre sont, quelle que soit la condition de frottement de "type Coulomb", bornés intérieurement par les chargements extrêmes du même système avec interfaces lisses.

D'autre part, toujours en application de (6.9), les chargements d'écoulement plastique libre sont, quelle que soit la condition de frottement de "type Coulomb", bornés extérieurement par les chargements extrêmes du même système.

Le premier de ces résultats a été énoncé par Drucker (1954) sous la forme dite de minoration des chargements "stables" : *tout chargement stable pour le système avec interfaces lisses est "stable" s'il y a frottement aux interfaces ;* En fait, comme on y reviendra au § 6.5, cette terminologie de chargement "stable" pour (s) est abusive.

Le second peut être qualifié de majoration des chargements stables en énonçant que (Collins, 1969 ; Salençon, 1969) : *tout chargement instable pour le système dont les interfaces vérifieraient la règle de normalité, est instable si elles ne la vérifient pas* (remarquer qu'il n'y a pas, ici, abus de langage). Cette majoration est la meilleure possible.

Le théorème énoncé par Drucker fournit une majoration plus large en considérant les chargements instables pour le système à interfaces "collés" : il s'agit là purement et simplement d'une surestimation des capacités de résistance des interfaces qui implique donc une surestimation des potentialités de résistance du système.

On peut aussi considérer le système à interface "parfaitement rugueuse" qui conduit à une majoration meilleure que la précédente.

Il est à signaler que dans certains problèmes, les minorations et majorations ainsi obtenues sont égales ce qui prouve que les chargements d'écoulement plastique libre sont indépendants de la condition de frottement. Il suffit pour cela que l'on puisse *déterminer* exactement les chargements extrêmes pour le système à *interfaces lisses* par des champs de vitesse sans discontinuité aux interfaces (cf par exemple : chapitre VI, § 2.5 et § 3.5).

#### 6.5 - CONSEQUENCES POUR LE SYSTEME ELASTO-PLASTIQUE

-----

En ce qui concerne le système élasto-plastique (s), les conséquences du théorème du § 6.2 sont réduites par le fait que l'on ne dispose plus du principe du travail plastique maximal. C'est ainsi en particulier que rien ne permet d'affirmer que sur un trajet de charge donné pour (s), l'intérieur de  $K_g$  est domaine de "chargements stables". Si l'on *admet l'hypothèse d'existence* d'un chargement d'écoulement plastique libre sur tout trajet de charge pour (s), chargement limite pour lequel apparaît la ruine plastique, alors il est clair que les résultats du théorème de Radenkovic s'appliquent à (s) : la couronne  $\overline{K - K_g}$  constitue la zone des chargements limites possibles pour (s) ; mais les propriétés d'indépendance des chargements limites vis-à-vis du trajet de charge, des caractéristiques élastiques du matériau, des auto-contraintes initiales etc., regroupées dans la propriété "d'unicité" des chargements limites ne sont désormais plus établies.

---

## 7 - PROBLÈMES RELATIFS AUX SOLS DE COULOMB ( $\varphi \neq 0$ )

---

### 7.1 - APPLICATION DU THÉORÈME DE RADENKOVIC

---

La figure 10 où on a tracé la fonction  $g$  optimale pour un sol de Coulomb d'angle de dilatation  $\nu$ , montre l'importance de la valeur de  $\nu$ . On sait que les calculs de poussées et butées de terres ou de capacité portante de fondations introduisent des coefficients qui varient comme des exponentielles de la tangente de l'angle de frottement interne ; aussi l'écart entre les deux bornes obtenues -borne intérieure avec  $\nu$ , borne extérieure avec  $\varphi$  - sera vite très grand. En particulier, si l'on admet que la déformation plastique du sol s'effectue sans variation de volume,  $\nu$  est nul, et la borne intérieure est triviale : poussée ou butée d'un liquide, capacité portante d'un liquide !

Aussi certains chercheurs ont tenté de proposer des variantes du théorème de Radenkovic-Palmer, dont l'esprit consiste à imposer que (6.1) soit satisfaite non pour tous les  $\underline{\sigma}$  vérifiant  $f = 0$  mais seulement dans un domaine vraisemblable compte tenu du problème posé : on obtient alors une "meilleure" fonction  $g$  optimale, c'est à dire que le  $K_g$  correspondant est plus grand. On citera à ce propos les travaux de Josselin de Jong (1964, 1973).

### 7.2. - RÉCAPITULATION DES RÉSULTATS DISPONIBLES

---

Compte tenu de l'importance pratique des problèmes où interviennent des matériaux obéissant au critère de Coulomb ( $\varphi \neq 0$ ) sans que la règle d'écoulement plastique satisfasse la condition de normalité (sols), on récapitule ci-dessous les résultats disponibles d'abord du point de vue du "calcul à la rupture" (3 premiers points), puis du point de vue de l'analyse limite, en prenant pour fixer les idées, l'exemple du problème de la détermination de la capacité portante d'une fondation :

♦ L'utilisation de la méthode par les vitesses pour la détermination de  $K$ , c'est à dire la construction d'un champ de vitesse pour le système en matériau *fictif* de même critère que le matériau réel et satisfaisant l'hypothèse de normalité, fournit une *majoration* de la capacité portante de la fondation.

♦ Si l'on sait construire pour ce même matériau *fictif*, une solution complète d'écoulement plastique libre (combinaison des deux méthodes), la valeur obtenue pour la capacité portante est la meilleure majoration qui soit valable quels que soient la règle d'écoulement, les propriétés élastiques et viscoélastiques, le trajet de charge, etc.

♦ Si connaissant une telle solution complète pour le matériau fictif, connaissant la règle d'écoulement du matériau réel, il n'est pas possible de construire un mode de déformation pour le matériau réel, qui soit associé au champ de contrainte de la solution complète du matériau fictif dans les zones déformées de celle-ci, alors on peut affirmer que la capacité portante réelle sera *strictement* inférieure à la majoration fournie par la solution complète construite avec l'hypothèse de normalité <sup>(1)</sup>.

♦ Si l'on est dans les conditions d'application du théorème de Radenkovic, et si le convexe qui y intervient n'est pas trivial, alors l'utilisation de la méthode par les contraintes pour le matériau fictif de critère  $g[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})]$ , c'est à dire la construction d'un champ de contrainte statiquement et plastiquement admissible vis à vis de ce critère, fournit une *minoration* de la capacité portante.

♦ Si l'on sait construire une solution complète d'écoulement plastique libre pour le matériau réel, elle fournit une valeur possible de la capacité portante du système réel, mais l'absence de théorème d'unicité ne permet pas d'affirmer qu'elle sera toujours atteinte.

---

<sup>(1)</sup> Résultat fin mais d'intérêt pratique négligeable.

---

 8 - TABLEAU RÉCAPITULATIF
 

---

 8.1 - CALCUL A LA RUPTURE
 

---

Définition :

- ♦  $\underline{\sigma}$  S.A.  $\xrightarrow{L}$   $\underline{Q} = L(\underline{\sigma}) \in \mathbb{R}^n$
- ♦  $H = \left\{ \underline{\sigma} \mid \underline{\sigma} \text{ S.A. et } \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in V \right\}$
- ♦  $K = L(H) \subset \mathbb{R}^n$  est l'ensemble des chargements *potentiellement supportables*.
- ♦  $\underline{Q}$  est chargement extrême  $\iff \underline{Q} \in$  frontière de  $K$ .

Propriétés :

- $\underline{Q} \in K \iff H(\underline{Q}) = L^{-1}(\underline{Q}) \cap H$  est non vide
- $\underline{Q}$  intérieur à  $K \implies H(\underline{Q})$  est d'intérieur non vide dans  $L^{-1}(\underline{Q})$ .

 8.2 - ANALYSE LIMITE POUR LE MATÉRIAU ÉLASTIQUE PARFAITEMENT  
 PLASTIQUE "STANDARD"
 

---

Théorème : problème d'évolution élasto-plastique pour le matériau standard <sup>(1)</sup> :

- ♦ existence et unicité de  $\underline{\sigma}(t)$  tant que  $H(\underline{Q}(t))$  est d'intérieur non vide dans  $L^{-1}(\underline{Q}(t))$   
 $\implies$  (définition)
- ♦ il existe sur le trajet de chargement, un chargement  $\underline{Q}$  limite, c'est le 1er chargement extrême rencontré par ce trajet.

---

<sup>(1)</sup> Matériau obéissant au principe du travail plastique maximal.

Définition :

- ♦ pour le système rigide parfaitement plastique associé,  $\underline{Q}$  est chargement d'écoulement plastique libre si  $\exists(\underline{\sigma}, \underline{v})$  solution d'écoulement plastique libre correspondante.

Théorèmes :

- ♦  $\underline{Q}$  est chargement d'écoulement plastique libre  $\implies \underline{Q}$  est chargement extrême
- ♦ Si  $\underline{Q}_\ell$ , limite sur un trajet de charge, est chargement d'écoulement plastique libre, et s'il peut être effectivement atteint lors de la charge du système élasto-plastique, alors quand  $\underline{Q}(t)$  atteint  $\underline{Q}_\ell$ , il peut y avoir déformation du système sans limitation sous charge constante.

**8.3 - MATERIAU PARFAITEMENT PLASTIQUE NON STANDARD**(THÉORÈME DE RADENKOVIC)Définition :

- ♦ pour le système rigide parfaitement plastique,  $\underline{Q}$  est chargement d'écoulement plastique libre si  $\exists(\underline{\sigma}, \underline{v})$  solution d'écoulement plastique libre correspondante.

Théorème :

- ♦  $\underline{Q}$  est chargement d'écoulement plastique libre  $\implies \underline{Q} \in \overline{K_f - K_g}$ .

---

## 9 - CONCLUSION

---

Si la théorie du Calcul à la rupture peut être établie hors de toute connaissance du comportement du matériau constitutif du système étudié hormis l'existence d'un domaine de résistance, il est clair que l'intérêt pratique des résultats qui sont ainsi établis, quelle que soit leur puissance, est lui directement dépendant de ce comportement. On l'a montré sur un exemple au chapitre I (§ 7.7.2.) en considérant en particulier le cas où le domaine de résistance se trouve limité par le comportement fragile du matériau constitutif : la charge extrême d'une structure sous cette hypothèse se révèle sans utilité pratique.

L'Analyse limite apparaît évidemment comme la meilleure justification théorique pour l'emploi du Calcul à la rupture : toutefois on a vu qu'elle a été établie sous des hypothèses précises concernant le comportement du matériau constitutif. Il paraît vraisemblable que certaines de ces hypothèses pourraient être dépassées, par exemple en ce qui concerne la linéarité dans le domaine élastique (une hyperélasticité à potentiel convexe devrait se révéler suffisante), mais on ne connaît pas actuellement les conditions minimales pour que le domaine des chargements potentiellement supportables puisse être identifié au domaine de sécurité pour le système.

Il est essentiel de remarquer que l'expérience de la mécanique des sols a montré que les résultats obtenus par la théorie du Calcul à la rupture, peuvent, dans de nombreux problèmes de première importance tels que la stabilité des pentes et des remblais et la capacité portante des fondations superficielles, servir de bases valables pour des dimensionnements. Ceci est certainement, pour le praticien, une bonne justification.

*chapitre IV*

*Calcul à la rupture  
et Dimensionnement*

---

 I - LES OBJECTIFS DE L'ÉTUDE
 

---

Le point de vue adopté dans toutes les analyses présentées dans les chapitres précédents, tant en calcul à la rupture qu'en analyse limite, suppose :

- ♦ donnée la géométrie du système étudié,
- ♦ donné le mode de chargement définissant les paramètres dont dépend la sollicitation imposée au système,
- ♦ fixées, en chaque point, les capacités de résistance du matériau constitutif.

Le système est ainsi entièrement déterminé et les résultats qui ont été obtenus dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture (resp. analyse limite) aboutissent à la connaissance des chargements qui sont, pour lui, potentiellement (resp. certainement) supportables.

Il va de soi, et il suffit pour s'en convaincre de reprendre les raisonnements faits par exemple au chapitre I (§ 2.2.4...), que ces chargements dépendent des capacités de résistance du matériau constitutif du système : plus précisément, pour deux systèmes identiques géométriquement et soumis au même mode de chargement, l'ensemble K des chargements potentiellement supportables dépend des domaines de résistance  $G(\underline{x})$  du matériau constitutif comme le montre la formule fondamentale (chap. I, formules 2.24 et 2.25) :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = \left\{ \underline{\sigma} \mid \underline{\sigma} \text{ S.A. dans le mode, } \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in V \right\} \\ K = L(H) . \end{array} \right.$$

Il apparaît bien aussi sur (1.1) que la dépendance de K vis-à-vis du champ de domaines  $G(\underline{x})$  défini sur V est complexe, et qu'en particulier il peut se faire que des modifications de  $G(\underline{x})$  en certains points, voire dans certaines zones, n'aient aucune influence sur K. Dans la pratique de nombreux exemples de ce type sont connus, notamment lorsque les capacités de résistance dans certaines zones d'un système croissent au-delà d'un certain niveau on constate que le domaine des chargements potentiellement supportables n'est plus sensible à cette variation [par exemple : poinçonnement d'une couche reposant sur une couche plus résistante (Salençon, 1969)].

La relation existant ainsi entre l'ensemble des chargements potentiellement supportables et les capacités de résistance conduit alors naturellement à se poser le problème inverse où, se donnant le système par sa géométrie, le mode de chargement et un chargement de celui-ci, on cherche à *déterminer pour quelles capacités de résistance ce chargement sera potentiellement supportable.*

En fait, pour que ce problème puisse conduire à une utilisation pratique, c'est-à-dire à dimensionner le système pour supporter le chargement donné, il conviendra, tout comme on l'a déjà signalé au chapitre I (§ 7.7) à propos de l'applicabilité des résultats du calcul à la rupture, que l'on ait des indications complémentaires permettant de situer les possibilités *réelles* du système par rapport à ses potentialités ; rappelons que la théorie de l'analyse limite, dans le cas où ses conditions de validité sont remplies, permet d'identifier les unes et les autres. On laissera de côté cette question dans toute la suite comme on l'a fait au chapitre I (§ 1 à 7.6) car elle n'interfère pas avec la partie théorique qui peut être développée sur les bases du calcul à la rupture, le passage à l'application pratique se référant ensuite à des considérations analogues à celles du chapitre I, § 7.7.

La démarche suivie, qui rappelle par plusieurs aspects un travail antérieur (Salençon, 1975), s'appuiera d'abord sur l'étude de quelques exemples simples qui permettront d'introduire le concept de *dimensionnement* d'une structure et de mettre en évidence la relation entre le dimensionnement et les chargements potentiellement supportables qui leur sont associés.

On présentera ensuite d'une façon plus générale la notion de paramètres de résistance d'un système, et de dimensionnement dépendant d'un nombre fini de paramètres de résistance.

A partir de celle-ci sera faite la théorie générale du calcul à la rupture pour un système soumis à un mode de chargement à  $n$  paramètres et dont le dimensionnement dépend de  $m$  paramètres de résistance, généralisant notamment l'approche présentée par Gavarini (1972) pour les systèmes de poutres. On définira les dimensionnements *potentiellement stables* d'un système sous un chargement donné, on étudiera les propriétés de l'ensemble de ces dimensionnements et l'on donnera les méthodes pour l'approcher par l'intérieur et par l'extérieur.

On terminera par une ouverture sur deux types d'applications :

♦ le dimensionnement optimal d'un tel système, pour un ensemble de charges donné ; le but de ce chapitre étant de constituer une introduction et un guide pour la lecture de nombreux travaux qui ont été consacrés à ce type de problèmes ;

♦ l'approche probabiliste dans laquelle les paramètres de résistance et-ou les chargements ont un caractère aléatoire. Là, on se proposera de montrer comment la théorie présentée permet la prise en compte d'un caractère aléatoire tant au niveau des charges qu'à celui du matériau constitutif, et la définition précise de concepts tels que la probabilité de "stabilité" ou la probabilité de ruine d'un système dans de telles conditions.

---

2 - EXEMPLES SIMPLES : STRUCTURES DONT LE DIMENSIONNEMENT  
DÉPEND D'UN PARAMÈTRE

---

2.1 - STRUCTURE SOUMISE A UN MODE DE CHARGEMENT

A UN PARAMÈTRE

On considère le portique représenté à la figure 1 soumis à un mode de chargement dépendant du seul paramètre  $Q$ . Mise à part la longueur, toutes les barres constituant ce portique sont supposées de caractéristiques géométriques et mécaniques identiques.

Cette structure est étudiée du point de vue du calcul à la rupture en ne prenant en compte comme contrainte généralisée que le moment fléchissant  $M(s)$ . Le domaine de résistance, identique pour toutes les sections  $s$ , est défini par les inégalités

$$(2.1) \quad -\alpha m \leq M(s) \leq \alpha m$$

dans laquelle  $m$  désigne le moment limite de résistance, supposé égal en flexion positive et négative, d'une section de référence à laquelle on convient de rapporter toutes les barres constitutives de la structure.

$\alpha$ , coefficient positif sans dimension, apparaît comme définissant le dimensionnement de la structure par rapport à la structure géométriquement identique qui serait constituée de barres identiques à la barre de référence. C'est le paramètre de résistance de la structure.

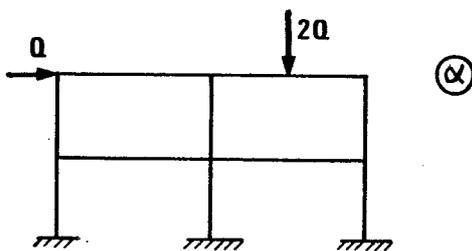


Figure 1 : Portique à un paramètre de résistance, soumis à un mode de chargement à un paramètre.

La théorie du calcul à la rupture permet d'énoncer que : il existe, pour chaque valeur de  $\alpha$ , un segment de chargements potentiellement supportables  $K(\alpha) \subset R$ . Ce domaine est obtenu par la formule homologue de (1.1) dans la transposition aux structures à barres fléchies :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} H(\alpha) = \left\{ M \mid M \text{ S.A.}, |M(s)| \leq \alpha m \quad \forall s \right\} \\ K(\alpha) = L[H(\alpha)] \end{array} \right.$$

Il est clair sur (2.2) que  $H(\alpha)$  dépend linéairement de  $\alpha$  positif ; on a les propriétés :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } H(0) = 0 \\ \text{b) } H(\alpha) = \alpha H(1) \quad \forall \alpha \geq 0 \\ \text{c) } H(1) = \left\{ M \mid M \text{ S.A.}, |M(s)| \leq m \quad \forall s \right\} \end{array} \right.$$

D'où :

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(0) = 0 \\ K(\alpha) = \alpha K(1) \quad \forall \alpha \geq 0 \end{array} \right.$$

Les chargements extrêmes  $Q^+(\alpha)$  et  $Q^-(\alpha)$ , extrémités du segment  $K(\alpha)$ , sont ainsi proportionnels à  $\alpha$ .

Il est commode, pour représenter ces résultats, de se placer dans le plan  $\{Q\} \times \{\alpha\}$  <sup>(1)</sup>, en suivant l'idée générale de Gavarini et Veneziano (1970, 1971). On y construit le domaine  $K$  défini par :

$$(2.5) \quad (Q, \alpha) \in K \iff Q \in K(\alpha).$$

Compte tenu de (2.4), c'est un angle de sommet 0 contenant la direction  $(Q = 0, \alpha \geq 0)$ . Sa section à chaque cote  $\alpha \geq 0$  est un segment dont la projection sur l'axe  $\{Q\}$  est  $K(\alpha)$ .

<sup>(1)</sup> Evidemment, seul le demi-plan  $\alpha \geq 0$  sera utile.

Ainsi, tout point  $(Q, \alpha)$  de  $K$  correspond au fait qu'une structure dimensionnée par la valeur  $\alpha$  du paramètre de résistance sera potentiellement stable sous la charge  $Q$  ; par contre tout point  $(Q, \alpha)$  extérieur à  $K$  signifie que la structure dimensionnée par la valeur  $\alpha$  sera certainement instable sous le chargement  $Q$ .

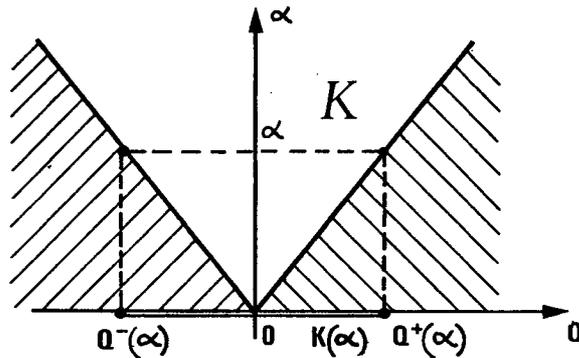


Figure 2 :  
Domaine  $K$  dans l'espace  
{chargement} x  
{résistance}

On voit aussi que, à  $Q$  donné, il existe toute une demi-droite de dimensionnements pour lesquels  $Q$  sera potentiellement supportable par la structure, soit :

$$(2.6) \quad \Delta(Q) = \left\{ \alpha \mid \alpha \geq \alpha(Q) \right\} ,$$

On dira aussi que  $\Delta(Q)$  est l'ensemble des dimensionnements *potentiellement stables* pour la structure sous  $Q$  :

$$(2.7) \quad \alpha \in \Delta(Q) \iff Q \in K(\alpha)$$

Il existe dans ce cas, pour chaque valeur de  $Q$ , un dimensionnement *minimal* qui peut de ce point de vue apparaître comme le dimensionnement optimal de la structure pour cette charge ; c'est  $\alpha(Q)$ , il correspond au cas où  $Q$  est chargement extrême :

$$(2.8) \quad \begin{cases} Q > 0 : \alpha = \alpha(Q) \iff Q = Q^+(\alpha) \\ Q < 0 : \alpha = \alpha(Q) \iff Q = Q^-(\alpha) \end{cases}$$

Si l'on se pose le problème du dimensionnement pour plusieurs charges  $Q^1, Q^2, \dots, Q^k$ , il est clair que les dimensionnements potentiellement stables pour l'ensemble des charges sont :

$$(2.9) \quad \alpha \in \Delta(Q^1) \cap \Delta(Q^2) \dots \cap \Delta(Q^k) ,$$

ce qui s'écrit :

$$(2.10) \quad \alpha \geq \text{Max}_{\ell=1, \dots, k} \{ \alpha(Q^\ell) \}$$

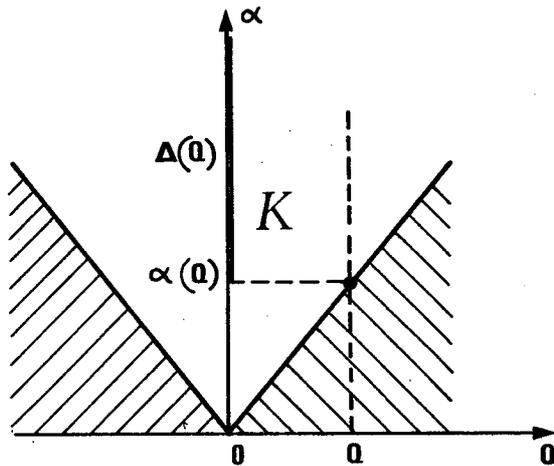
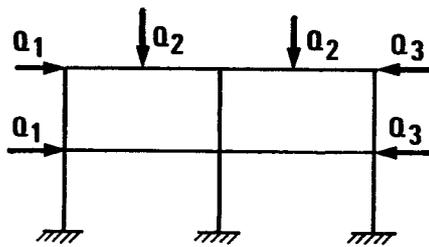


Figure 3 :  
Domaine K et dimensionnements potentiellement stables.

## 2.2 - STRUCTURE SOUMISE A UN MODE DE CHARGEMENT A PLUSIEURS PARAMÈTRES

On reprend la même structure qu'au § 2.1, en modifiant uniquement l'hypothèse relative au mode de chargement qui cette fois dépend de  $n$  paramètres  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), comme cela est représenté symboliquement sur la figure 4.



⊗

Figure 4 :  
Portique à un paramètre de résistance, soumis à un mode de chargement à  $n$  paramètres.

Les résultats obtenus au § 2.1 se transposent sans difficulté.

Pour chaque valeur de  $\alpha$  il existe, dans l'espace des chargements un ensemble  $K(\alpha)$  des chargements potentiellement supportables, obtenu par la formule (2.2). Celui-ci possède encore les propriétés (2.3).  $K(\alpha)$  est convexe en raison de la convexité de (2.1) par rapport à  $M(s)$ .

Dans l'espace  $\{Q\} \times \{\alpha\}$  de dimension  $(n + 1)$  on construit le domaine  $K$ , homologue de celui introduit au § précédent, défini par :

$$(2.11) \quad (\underline{Q}, \alpha) \in K \iff \underline{Q} \in K(\alpha) .$$

Compte tenu de (2.4), et de la convexité de  $K(\alpha) \quad \forall \alpha \geq 0$ ,  $K$  est un cône convexe de sommet 0, contenant la direction  $(\underline{Q} = 0, \alpha \geq 0)$ . La section de  $K$  à chaque cote  $\alpha \geq 0$  est un convexe qui se projette sur le sous-espace  $\{Q\}$  selon  $K(\alpha)$ .

Les propriétés des points de  $\{Q\} \times \{\alpha\}$  relativement à  $K$  sont homologues de celles énoncées au § 2.1 :

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\underline{Q}, \alpha) \in K \iff \text{La structure dimensionnée par } \alpha \text{ est} \\ \text{potentiellement stable sous } \underline{Q} \\ (\underline{Q}, \alpha) \notin K \iff \text{La structure dimensionnée par } \alpha \text{ est} \\ \text{certainement instable sous } \underline{Q} \end{array} \right.$$

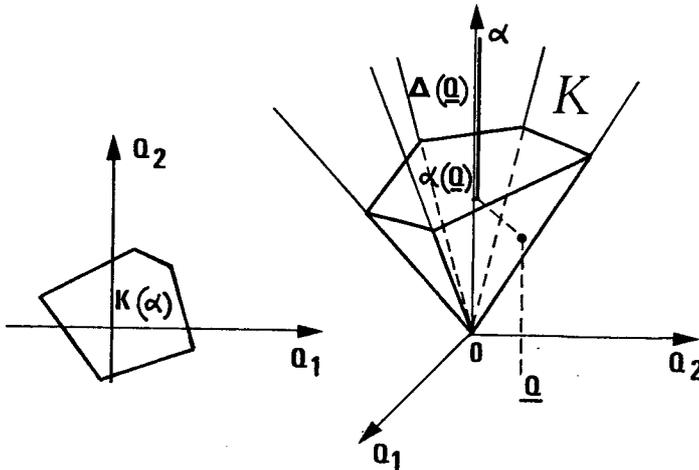


Figure 5 : Ensembles  $K = \{Q\} \times \{\alpha\}$ ,  $K(\alpha) \subset \{Q\}$ ,  $\Delta(Q) \subset \{\alpha\}$ . <sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Pour la commodité de la représentation on a supposé  $n = 2$  ;  $K$  est ici une pyramide car les  $K(\alpha)$  sont des polygones.

Pour  $\underline{Q}$  donné, il existe encore une demi-droite de dimensionnements potentiellement stables pour la structure sous  $\underline{Q}$ , soit :

$$(2.13) \quad \Delta(\underline{Q}) = \{ \alpha \mid \alpha \geq \alpha(\underline{Q}) \}$$

Pour le dimensionnement *minimal*,  $\alpha(\underline{Q})$ ,  $\underline{Q}$  est chargement extrême :

$$(2.14) \quad \alpha = \alpha(\underline{Q}) \iff \underline{Q} \in \{ \underline{Q}^+(\alpha) \}$$

$\{ \underline{Q}^+(\alpha) \}$  désignant la frontière de  $K(\alpha)$ .

Le dimensionnement de la structure pour un ensemble de chargements  $\underline{Q}^1, \underline{Q}^2, \dots, \underline{Q}^k$ , conduit au résultat homologue de (2.9) : les dimensionnements potentiellement stables pour l'ensemble des chargements sont définis par :

$$(2.15) \quad \alpha \in \Delta(\underline{Q}^1) \cap \Delta(\underline{Q}^2) \cap \dots \cap \Delta(\underline{Q}^k)$$

soit encore :

$$(2.16) \quad \alpha \geq \max_{\ell=1, \dots, k} \alpha(\underline{Q}^\ell) .$$

---

 3 - SYSTÈMES DONT LE DIMENSIONNEMENT DÉPEND D'UN NOMBRE FINI DE PARAMÈTRES
 

---

 3.1 - EXEMPLE D'UNE STRUCTURE SIMPLE
 

---

On reprend le portique étudié à la figure 4 en supposant maintenant que son dimensionnement dépend de plusieurs paramètres : par exemple les poutres (horizontales) sont toutes identiques entre elles et leur dimensionnement est défini par le paramètre  $\alpha_1$  en sorte que leur moment limite est :

$$(3.1) \quad m_1 = \alpha_1 m$$

tandis que les poteaux (verticaux), identiques entre eux, ont pour moment limite :

$$(3.2) \quad m_2 = \alpha_2 m .$$

D'une façon plus générale on peut, pour cette structure, introduire un paramètre de résistance par barre, soit au total  $m = 10$  paramètres  $\alpha_j$ , composantes du vecteur dimensionnement  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ .

Dans le mode de chargement à  $n$  paramètres, tel que celui considéré plus haut, le convexe des chargements potentiellement supportables par la structure est alors fonction de  $\underline{\alpha}$ , soit  $K(\underline{\alpha})$ .

On se place dans l'espace  $\{Q\} \times \{\underline{\alpha}\}$  introduit dans ce cas par Gavarini et Veneziano (1970, 1971), et on y définit le domaine  $K$  homologue de ceux rencontrés dans les paragraphes précédents (équations (2.5) et (2.12)). Il conviendrait d'en étudier les propriétés pour en tirer des conclusions relatives aux dimensionnements potentiellement stables sous un chargement donné ou sous un ensemble de chargements, ainsi qu'à l'optimisation, ... Cette étude sera faite dans la suite dans le cas général d'un système dont le dimensionnement dépend d'un nombre fini de paramètres.



Ainsi le domaine de résistance du matériau constitutif varie en chaque point de  $V_j$  de façon homothétique proportionnellement à l'unique paramètre  $\alpha_j$ .

Le dimensionnement du système est donc défini par le vecteur dimensionnement  $\underline{\alpha}$  dont les composantes sont les  $m$  paramètres de résistance :

$$(3.9) \quad \underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) .$$

On remarquera que compte tenu de la condition de positivité des  $\alpha_j$ ,  $\underline{\alpha}$  sera toujours un élément de  $(\mathcal{R}^+)^m$ , toutefois la terminologie de "vecteur" dimensionnement n'introduira aucune ambiguïté.

### 3.2.2. - COMMENTAIRES

-----

♦ Il est clair que cette formulation plus générale contient bien les exemples simples de structures présentés auparavant. De plus, ne supposant pas l'homogénéité dans chaque zone, elle recouvre aussi les cas de structures constituées de barres de section variable pourvu que sur chaque barre le moment limite  $m(s)$  varie dans chaque section proportionnellement au seul paramètre de résistance de la barre.

♦ De façon analogue à ce qui a été dit au chapitre I (§ 2.3.4) à propos des paramètres de chargement, il peut paraître que la formulation adoptée pour les paramètres de résistance laisse de côté le cas du système dont seules certaines zones verraient leur dimensionnement dépendre de paramètres de résistance, le dimensionnement du reste du système étant fixé. Evidemment, un moyen de faire entrer un tel système dans le cadre présenté ci-dessus, consiste à introduire un paramètre de résistance supplémentaire pour la zone du système dont le dimensionnement est fixé et à imposer ensuite à ce paramètre la valeur qui lui est prescrite. Malgré son caractère artificiel, cette méthode nous a paru préférable à l'introduction d'une formulation qui prît directement en compte les systèmes du type ci-dessus, en raison de la présentation plus claire qui lui correspond pour les résultats de la théorie du calcul à la rupture.

♦ Par contre le concept de dimensionnement dépendant d'un nombre fini de paramètres ne saurait en aucune manière recouvrir le cas des systèmes dont le dimensionnement est défini par un champ scalaire quelconque sur  $V$  ( par exemple : poutre de section variable de façon quelconque, plaque d'épaisseur continûment variable, ... ). De nombreux travaux ont été consacrés à l'étude de tels systèmes, qu'il ne saurait être question de citer ici. Nous renvoyons notamment à (Save, 1972 ; Save et Massonnet, 1972 et 1973).

---

4 - THÉORIE DU CALCUL A LA RUPTURE POUR LES SYSTÈMES DONT LE DIMENSIONNEMENT  
DÉPEND D'UN NOMBRE FINI DE PARAMÈTRES : APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR

---

4.1 - DOMAINE DE STABILITÉ POTENTIELLE

Le système étudié est soumis à un mode de chargement à  $n$  paramètres ; son dimensionnement dépend de  $m$  paramètres de résistance  $\alpha_j$  selon la définition donnée au § 3.2.1.

De plus, on fait l'hypothèse que les paramètres de chargement et de dimensionnement sont des variables indépendantes. Celle-ci est évidemment souvent en défaut, notamment pour les structures, mais la théorie bâtie dans cette hypothèse permettra ensuite d'aborder les cas où une relation fonctionnelle existera entre certains paramètres de chargement et les paramètres de résistance du système (§6.5).

Pour les domaines de résistance  $G_j(\underline{x})$ , la propriété (3.5) est supposée toujours vérifiée et on introduira, au fur et à mesure des raisonnements, les hypothèses (3.6 à 3.8).

Afin de simplifier les notations on pose :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \alpha_j) \\ \forall \underline{x} \in V_j, \quad \forall j = 1, \dots, m \end{array} \right\} \Leftrightarrow \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \underline{\alpha}), \quad \forall \underline{x} \in V .$$

Ainsi, pour chaque valeur de  $\underline{\alpha}$ , le domaine  $K(\underline{\alpha})$  des chargements potentiellement supportables par le système est défini par :

$$(4.2) \quad \underline{Q} \in K(\underline{\alpha}) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{\sigma} \text{ S.A. avec } \underline{Q} \quad (\text{c'est-à-dire } \underline{\sigma} \in L^{-1}(\underline{Q})) \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \underline{\alpha}), \quad \forall \underline{x} \in V . \end{array} \right.$$

Généralisant la démarche suivie par Gavarini et Veneziano (1970, 1971) pour les systèmes de poutres et comme indiqué dans Salençon (1975), on se place alors dans l'espace  $\{\underline{Q}\} \times \{\underline{\alpha}\}$ . On y construit le domaine  $K$  défini par :

$$(4.3) \quad (\underline{Q}, \underline{\alpha}) \in K \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Q} \in K(\underline{\alpha}) .$$

Celui-ci possède les propriétés homologues de (2.12) :

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\underline{Q}, \underline{\alpha}) \in K \iff \text{le système dimensionné par } \underline{\alpha} \\ \text{est potentiellement stable sous } \underline{Q} \\ (\underline{Q}, \underline{\alpha}) \notin K \iff \text{le système dimensionné par } \underline{\alpha} \\ \text{est certainement instable sous } \underline{Q} . \end{array} \right.$$

Pour cette raison  $K$  sera appelé *domaine de stabilité potentielle du système*.

De plus, il est clair que,  $\underline{\alpha}$  étant fixé ( $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}^d$ ), l'intersection de  $K$  et de la variété linéaire d'équation  $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}^d$  donne par projection sur le sous-espace vectoriel  $\{\underline{Q}\}$  le domaine  $K(\underline{\alpha}^d)$ . De même,  $\underline{Q}$  étant donné égal à  $\underline{Q}^d$ , l'intersection de  $K$  et de la variété linéaire  $\underline{Q} = \underline{Q}^d$  fournit par projection sur le sous-espace vectoriel  $\{\underline{\alpha}\}$ , le domaine  $\Delta(\underline{Q}^d)$  des *dimensionnements potentiellement stables* pour le système sous  $\underline{Q}^d$ .

Les dimensionnements potentiellement stables pour un ensemble de chargements  $\underline{Q}^1, \underline{Q}^2, \dots, \underline{Q}^k$  sont alors définis par :

$$(4.5) \quad \underline{\alpha} \in \Delta(\underline{Q}^1, \underline{Q}^2, \dots, \underline{Q}^k) = \Delta(\underline{Q}^1) \cap \Delta(\underline{Q}^2) \cap \dots \cap \Delta(\underline{Q}^k) .$$

## 4.2 - PROPRIÉTÉS DE $K$

### 4.2.1 -

A partir de la définition (3.4) on démontre que  $K$  est un *cône de sommet 0*, c'est-à-dire que l'on a :

$$(4.6) \quad (\underline{Q}, \underline{\alpha}) \in K \Rightarrow (\lambda \underline{Q}, \lambda \underline{\alpha}) \in K, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

En effet on remarque que si  $\underline{\sigma}$  satisfait (4.2) avec  $\underline{Q}$  et  $\underline{\alpha}$ ,  $\lambda \underline{\sigma}$  satisfait la même relation avec  $\lambda \underline{Q}$  et  $\lambda \underline{\alpha}$ ,  $\forall \lambda \geq 0$  car, en conséquence de (3.4) on a :

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{x} \in V_j, \forall j = 1, \dots, m, \forall \alpha_j \geq 0, \forall \lambda \geq 0 \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \alpha_j) = \alpha_j G_j(\underline{x}) \Rightarrow \lambda \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \lambda \alpha_j) = \lambda \alpha_j G_j(\underline{x}) . \end{array} \right.$$

4.2.2 -

On adopte la notation suivante :

$$(4.8) \quad \underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha} \iff \alpha'_j \geq \alpha_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, m .$$

On a alors, en conséquence de (3.4), (3.5), (4.2) et (4.3), la propriété suivante :

$$(4.9) \quad (0, \underline{\alpha}) \in K \quad \forall \underline{\alpha} \geq 0 ,$$

c'est-à-dire que  $K$  contient le cône convexe de sommet 0 :  $\{(Q, \underline{\alpha}) \mid Q = 0, \alpha \geq 0\}$  .

En effet,  $\underline{\sigma} = 0$  vérifie (4.2) avec  $\underline{Q} = 0, \alpha \geq 0$  .

4.2.3 -

Compte tenu de (3.4), on a :

$$(4.10) \quad (Q, 0) \in K \Rightarrow \underline{Q} = 0 .$$

En effet, dans l'hypothèse (3.8), le seul champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  satisfaisant (4.2) pour  $\underline{\alpha} = 0$  est le champ nul d'où  $\underline{Q} = 0$ .

4.2.4 -

Si les  $G_j(\underline{x})$  sont étoilés de centre 0 (propriété (3.6)), on a :

$$(4.11) \quad (Q, \underline{\alpha}) \in K \Rightarrow (Q, \underline{\alpha}') \in K \quad \forall \underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha}$$

c'est-à-dire que  $K$  contient le cône convexe  $\{(Q', \underline{\alpha}') \mid Q' = Q, \underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha}\}$ , de sommet  $(Q, \underline{\alpha})$ .

La démonstration s'appuie sur le fait que  $\underline{\sigma}$  satisfaisant (4.2) avec  $\underline{Q}$  et  $\underline{\alpha}$ , satisfait cette même relation avec  $\underline{Q}$  et  $\underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha}$  ; en effet, en conséquence de (3.6), on a :

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{x} \in V_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad \forall \alpha_j \geq 0, \quad \forall \alpha'_j \geq \alpha_j \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \alpha_j) = \alpha_j G_j(\underline{x}) \Rightarrow \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \alpha'_j) = \alpha'_j G_j(\underline{x}) \end{array} \right.$$

4.2.5 -

Sous la même hypothèse on a aussi :

$$(4.13) \quad (\underline{Q}, \underline{\alpha}) \in K \Rightarrow (\lambda \underline{Q}, \underline{\alpha}) \in K, \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Cette propriété est évidente à partir de (4.3) puisque (3.6) implique que  $K(\underline{\alpha})$  est étoilé de centre 0  $\forall \underline{\alpha} \geq 0$ , (théorie du calcul à la rupture).

4.2.6 -

Si les  $G_j(\underline{x})$  sont convexes (3.7),  $K$  est convexe, c'est-à-dire que :

$$(4.14) \quad \left. \begin{array}{l} (\underline{Q}^1, \underline{\alpha}^1) \in K \\ (\underline{Q}^2, \underline{\alpha}^2) \in K \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in (0,1), (\underline{Q}, \underline{\alpha}) \in K \\ \text{où} \\ \underline{Q} = \lambda \underline{Q}^1 + (1-\lambda) \underline{Q}^2, \quad \underline{\alpha} = \lambda \underline{\alpha}^1 + (1-\lambda) \underline{\alpha}^2. \end{array} \right.$$

Pour démontrer cette propriété, on considère  $\underline{\sigma}^1$  et  $\underline{\sigma}^2$ , champs de contrainte satisfaisant (4.2) respectivement avec  $\underline{Q}^1$  et  $\underline{\alpha}^1$ ,  $\underline{Q}^2$  et  $\underline{\alpha}^2$ , et on construit le champ  $\underline{\sigma} = \lambda \underline{\sigma}^1 + (1-\lambda) \underline{\sigma}^2$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Ce champ est S.A. avec  $\underline{Q}$ ; de plus, dans chaque zone  $V_j$ ,  $j = (1, 2, \dots, m)$  on a,  $\forall \underline{x} \in V_j$  :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}^1(\underline{x}) \in \alpha_j^1 G_j(\underline{x}) \iff \frac{\underline{\sigma}^1(\underline{x})}{\alpha_j^1} \in G_j(\underline{x}) \iff \frac{\lambda \underline{\sigma}^1(\underline{x})}{\lambda \alpha_j^1} \in G_j(\underline{x}) \\ \underline{\sigma}^2(\underline{x}) \in \alpha_j^2 G_j(\underline{x}) \iff \frac{\underline{\sigma}^2(\underline{x})}{\alpha_j^2} \in G_j(\underline{x}) \iff \frac{(1-\lambda) \underline{\sigma}^2(\underline{x})}{(1-\lambda) \alpha_j^2} \in G_j(\underline{x}) \end{array} \right.$$

(conséquence de (3.4)).

La convexité de  $G_j(\underline{x})$  implique alors,  $\forall \mu \in (0,1)$  :

$$\mu \frac{\lambda \underline{\sigma}^1(\underline{x})}{\lambda \alpha_j^1} + (1-\mu) \frac{(1-\lambda) \underline{\sigma}^2(\underline{x})}{(1-\lambda) \alpha_j^2} \in G_j(\underline{x})$$

d'où en choisissant  $\mu = \lambda \alpha_j^1 / [\lambda \alpha_j^1 + (1-\lambda) \alpha_j^2]$ ,

$$(4.16) \quad \frac{\lambda \underline{\sigma}^1(\underline{x}) + (1 - \lambda) \underline{\sigma}^2(\underline{x})}{\lambda \alpha_j^1 + (1 - \lambda) \alpha_j^2} \in G_j(\underline{x})$$

soit encore :

$$(4.17) \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \alpha_j)$$

ce qui démontre que, en tout point  $\underline{x}$  de toute zone  $V_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ )  $\underline{\sigma}$  vérifie bien (4.2) avec  $\underline{Q}$  et  $\underline{\alpha}$  définis dans (4.14) (Carmasol, 1983).

4.2.7 -

La figure 6 représente un domaine de stabilité potentielle dans le cas  $n = 1, m = 2$  pour une structure à barres fléchies (donc à domaines de résistance convexes) ;  $K$  est alors une pyramide.

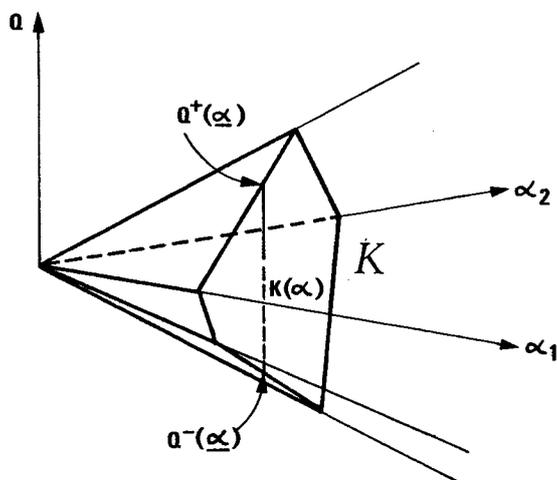


Figure 6 :  
Exemple de domaine  
de stabilité potentielle.

#### 4.3 - PROPRIÉTÉS DE $K(\underline{\alpha})$

##### 4.3.1 - GÉNÉRALITÉS

Comme on l'a dit au § 4.1, les ensembles  $K(\underline{\alpha})$  et  $\Delta(\underline{Q})$  s'obtiennent aisément à partir de  $K$  par intersection avec la variété linéaire correspondant à la valeur fixée pour  $\underline{\alpha}$  ou  $\underline{Q}$ , et projection. Les propriétés démontrées ci-dessus pour

$K$  permettent donc de déduire, sans que de nouvelles démonstrations soient nécessaires, des propriétés de  $K(\underline{\alpha})$  et  $\Delta(Q)$ .

Concernant  $K(\underline{\alpha})$ , certaines de ces propriétés ne seront mentionnées que pour mémoire, qui ont déjà été établies au chapitre I (propriétés à  $\underline{\alpha}$  fixé).

4.3.2 - CONSÉQUENCE DE (4.6)  
-----

$$(4.18) \quad K(\lambda \underline{\alpha}) = \lambda K(\underline{\alpha}) \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall \underline{\alpha} \geq 0$$

4.3.3 - CONSÉQUENCE DE (4.9)  
-----

$$(4.19) \quad 0 \in K(\underline{\alpha}) \quad \forall \underline{\alpha} \geq 0$$

4.3.4 - CONSÉQUENCE DE (4.10)  
-----

Si les  $G_j(\underline{x})$  sont bornés :

$$(4.20) \quad K(0) = \{0\}.$$

Si les  $G_j(\underline{x})$  ne sont pas tous bornés, il peut se faire que  $K(0) \neq \{0\}$

4.3.5 - CONSÉQUENCE DE (4.11)  
-----

Si les  $G_j(\underline{x})$  sont étoilés de centre 0 :

$$(4.21) \quad K(\underline{\alpha}) \subset K(\underline{\alpha}') \quad \forall \underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha}$$

4.3.6 - CONSÉQUENCES DE (4.13) et (4.14)  
-----

Pour mémoire :  $\forall \underline{\alpha} \geq 0$ ,  $K(\underline{\alpha})$  est étoilé de centre 0 (resp. convexe) si les  $G_j(\underline{x})$  sont étoilés de centre 0 (resp. convexes).

## 4.3.7 - REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Les propriétés nouvelles énoncées ci-dessus pour  $K(\underline{\alpha})$  sont représentées sur la figure 7 dans le cas  $n = 2$ .

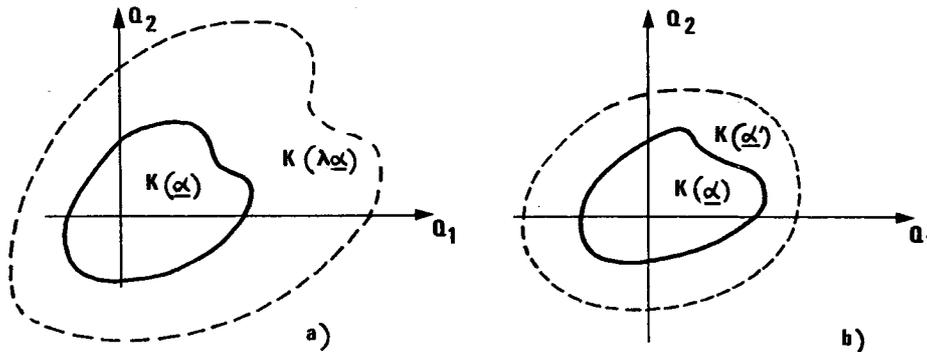


Figure 7 : Propriétés de  $K(\underline{\alpha})$  : a)  $K(\lambda\underline{\alpha}) \supseteq K(\underline{\alpha})$ ,  $\forall \lambda \geq 0$  ;  
b)  $\underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha} \Rightarrow K(\underline{\alpha}) \subset K(\underline{\alpha}')$

4.4 - PROPRIÉTÉS DE  $\Delta(\underline{Q})$ 

## 4.4.1 - CONSÉQUENCE DE (4.6)

$$(4.22) \quad \Delta(\lambda\underline{Q}) = \lambda\Delta(\underline{Q}) \quad \forall \lambda \geq 0, \forall \underline{Q}$$

## 4.4.2 - CONSÉQUENCE DE (4.9)

$$(4.23) \quad \Delta(0) = \{\underline{\alpha} \geq 0\}$$

## 4.4.3 - CONSÉQUENCE DE (4.10)

Si les  $G_j(\underline{x})$  sont bornés :

$$(4.24) \quad \underline{Q} \neq 0 \Rightarrow 0 \notin \Delta(\underline{Q})$$

4.4.4 - CONSÉQUENCE DE (4.11)

Si les  $G_j(\underline{x})$  sont étoilés de centre 0 :

$$(4.25) \quad \underline{\alpha} \in \Delta(Q) \Rightarrow \underline{\alpha}' \in \Delta(Q) \quad \forall \underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha}$$

ce qui signifie que si  $\underline{\alpha}$  est potentiellement stable pour  $Q$ ,  $\Delta(Q)$  contient tout le cône convexe de sommet  $\underline{\alpha}$  défini par  $\underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha}$ .

4.4.5 - CONSÉQUENCE DE (4.13)

Si les  $G_j(\underline{x})$  sont étoilés de centre 0 :

$$(4.26) \quad \Delta(Q) \subset \Delta(\lambda Q) \quad , \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

4.4.6 - CONSÉQUENCE DE (4.14)

Si les  $G_j(\underline{x})$  sont convexes, alors  $\Delta(Q)$  est convexe  $\forall Q$ .

$$(4.27) \quad \left. \begin{array}{l} \underline{\alpha}^1 \in \Delta(Q) \\ \underline{\alpha}^2 \in \Delta(Q) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \underline{\alpha}^1 + (1-\lambda) \underline{\alpha}^2 \in \Delta(Q) \\ \forall \lambda \in (0,1) \end{array} \right.$$

4.4.7 - REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Les propriétés énoncées ci-dessus pour  $\Delta(Q)$  sont représentées sur la figure 8 dans le cas  $m = 2$ .

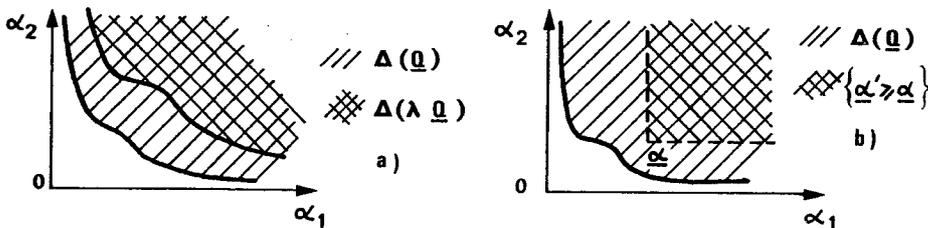


Figure 8 : Propriétés de  $\Delta(Q)$  : a)  $\Delta(\lambda Q) = \lambda \Delta(Q)$ ,  $\forall \lambda \geq 0$  ;

$$b) \quad \underline{\alpha} \in \Delta(Q) \Rightarrow \underline{\alpha}' \in \Delta(Q) \quad \forall \underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha}$$

#### 4.5 - DIMENSIONNEMENTS EXTRÊMES ET DIMENSIONNEMENTS

##### SURABONDANTS

Par analogie de langage avec les chargements, les dimensionnements définis par un point de la frontière de  $\Delta(Q)$  seront appelés *dimensionnements extrêmes* sous le chargement  $Q$ . Ils correspondent au fait que, pour un tel dimensionnement,  $Q$  est chargement extrême pour le système. Les dimensionnements intérieurs à  $\Delta(Q)$  pourront être qualifiés de *surabondants*.

On remarque que si l'on explore les dimensionnements par trajets radiaux c'est-à-dire en considérant des dimensionnements  $\underline{\alpha}$ , proportionnels à un même dimensionnement  $\underline{\alpha}^1$ , de la forme  $\lambda \underline{\alpha}^1$ ,  $\lambda \geq 0$ , en conséquence de (4.25) il n'existe sur chaque trajet radial qu'un dimensionnement extrême : la valeur de  $\lambda$  correspondante est la valeur minimale pour que  $\lambda \underline{\alpha}^1$  soit potentiellement stable sous  $Q$  (figure 9) <sup>(1)</sup>.

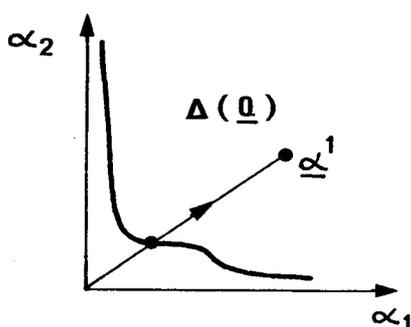


Figure 9 :  
Trajet de dimensionnement radial.

<sup>(1)</sup> Cette propriété est évidemment homologue de celle rencontrée dans la théorie du calcul à la rupture pour les trajets de charge radiaux.

4.6 - TABLEAU RÉCAPITULATIF DES RÉSULTATS DE  
L'APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR

| HYPOTHESES                                                                                               | PROPRIETES DE $K$                                                                                                                               | PROPRIETES DE $K(\underline{\alpha})$                                                                                                                                                                        | PROPRIETES DE $\Delta(\underline{Q})$                                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $G(\underline{x}, \underline{\alpha}_j) = \alpha_j G_j(\underline{x})$<br><br>$0 \in G_j(\underline{x})$ | $K$ cône de<br>sommet 0<br><br>$(0, \underline{\alpha} \geq 0) \subset K$                                                                       | $K(\lambda \underline{\alpha}) = K(\underline{\alpha})$<br>$\forall \lambda \geq 0$ .<br><br>$0 \in K(\underline{\alpha})$<br>$\forall \underline{\alpha} \geq 0$ .                                          | $\Delta(\lambda \underline{Q}) = \lambda \Delta(\underline{Q})$<br>$\forall \lambda \geq 0$ .<br><br>$\Delta(0) = \{\underline{\alpha} \geq 0\}$                                                                                                                                    |
| $G_j(\underline{x})$ bornés                                                                              |                                                                                                                                                 | $K(0) = \{0\}$                                                                                                                                                                                               | $\underline{Q} \neq 0 \Rightarrow 0 \notin \Delta(\underline{Q})$                                                                                                                                                                                                                   |
| $G_j(\underline{x})$ étoilés<br>de centre 0                                                              | $(\underline{Q}, \underline{\alpha}) \in K$<br>$(\lambda \underline{Q}, \underline{\alpha}) \in K$<br>$\forall \lambda : 0 \leq \lambda \leq 1$ | $K(\underline{\alpha})$ étoilé de<br>centre 0,<br>$\forall \underline{\alpha} \geq 0$ .<br>$K(\underline{\alpha}) \subset K(\underline{\alpha}')$<br>$\forall \underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha}$ . | $\Delta(\underline{Q}) \subset \Delta(\lambda \underline{Q})$<br>$\forall \lambda : 0 \leq \lambda \leq 1$ .<br>$\underline{\alpha} \in \Delta(\underline{Q}) \Rightarrow \underline{\alpha}' \in \Delta(\underline{Q})$<br>$\forall \underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha}$ . |
| $G_j(\underline{x})$ convexes                                                                            | $K$ convexe                                                                                                                                     | $K(\underline{\alpha})$ convexe,<br>$\forall \underline{\alpha} \geq 0$ .                                                                                                                                    | $\Delta(\underline{Q})$ convexe, $\forall \underline{Q}$ .                                                                                                                                                                                                                          |

#### 4.7 - CONSTRUCTION DE $\Delta(Q)$ PAR L'INTÉRIEUR

$Q$  étant donné, on s'intéresse ici à la construction de  $\Delta(Q)$  à partir des résultats démontrés ci-dessus.

Il est clair, par définition même de  $K$  et de  $\Delta(Q)$  que tout champ de contrainte  $\underline{\sigma}$ , S.A. avec  $Q$ , permet de connaître une famille de dimensionnements  $\underline{\alpha}$  de  $\Delta(Q)$  à savoir : tous les dimensionnements  $\underline{\alpha}$  tels que :

$$(4.28) \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \underline{\alpha}) \quad \forall \underline{x} \in V.$$

Dans l'hypothèse, en pratique toujours vérifiée, où (3.6) est satisfaite, les  $G_j(\underline{x})$  étant tous étoilés de centre 0, la connaissance d'un tel dimensionnement  $\underline{\alpha}$  dans  $\Delta(Q)$  implique que tout le cône convexe de sommet  $\underline{\alpha}$ ,  $\{\underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha}\}$ , appartient aussi à  $\Delta(Q)$  d'après (4.25). Ainsi, lorsque l'on connaît  $k$  dimensionnements potentiellement stables  $\underline{\alpha}^1, \underline{\alpha}^2, \dots, \underline{\alpha}^k$ , la réunion des cônes convexes  $(\underline{\alpha} \geq \underline{\alpha}^1), (\underline{\alpha} \geq \underline{\alpha}^2), \dots, (\underline{\alpha} \geq \underline{\alpha}^k)$  est une approche par l'intérieur de  $\Delta(Q)$  :

$$(4.29) \quad (\underline{\alpha} \geq \underline{\alpha}^1) \cup (\underline{\alpha} \geq \underline{\alpha}^2) \cup \dots \cup (\underline{\alpha} \geq \underline{\alpha}^k) \subset \Delta(Q).$$

La figure 10 schématise l'approche par l'intérieur de  $\Delta(Q)$  dans ce cas pour  $m = 2$ .

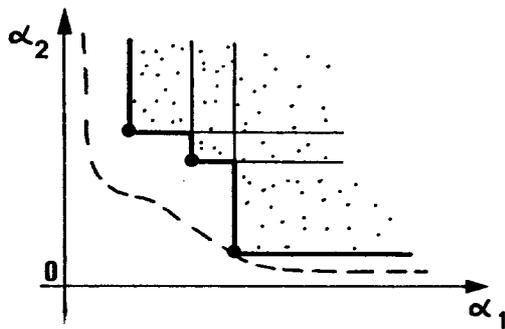


Figure 10 :  
Approche par l'intérieur  
de  $\Delta(Q)$ .

Si (3.7) est vérifiée, les  $G_j(\underline{x})$  étant convexes, on doit tenir compte de la convexité démontrée de  $\Delta(Q)$  (4.27) : l'enveloppe convexe des cônes convexes de (4.29) est une approche par l'intérieur de  $\Delta(Q)$  comme cela est représenté à la figure 11.

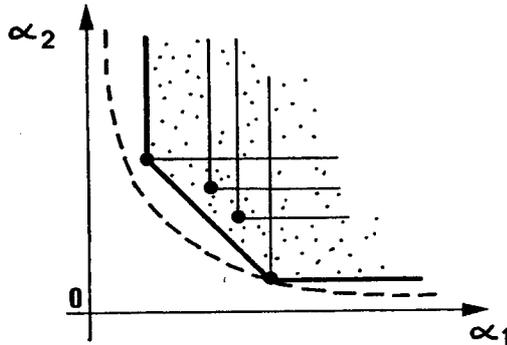


Figure 11 :  
Approche par l'intérieur  
de  $\Delta(Q)$  dans le cas  
de convexité.

#### 4.8 - CONSTRUCTION DE $\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$ PAR L'INTÉRIEUR

La formule (4.5) donne l'expression de l'ensemble  $\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$  des dimensionnements potentiellement stables pour les chargements  $Q^1, Q^2, \dots, Q^k$ . Il en résulte de façon immédiate que si l'on dispose pour chacun des ensembles  $\Delta(Q^l)$  d'une approche par l'intérieur, l'intersection de toutes celles-ci constitue une approche par l'intérieur de  $\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$ .

On remarquera aussi qu'il découle de (4.5) que  $\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$  vérifie les mêmes propriétés que  $\Delta(Q)$  sous les mêmes hypothèses. Ainsi en particulier (on se reportera au tableau du § 4.6 pour les hypothèses correspondantes sur les  $G_j(x)$ ) :

$$(4.30) \quad \Delta(\lambda Q^1, \lambda Q^2, \dots, \lambda Q^k) = \lambda \Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k) \quad \forall \lambda \geq 0 ;$$

$$(4.31) \quad \Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k) \subset \Delta(\lambda Q^1, \lambda Q^2, \dots, \lambda Q^k) \quad \forall \lambda : 0 \leq \lambda \leq 1 ;$$

$$(4.32) \quad \underline{\alpha} \in \Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k) \Rightarrow \underline{\alpha}' \in \Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k), \quad \forall \underline{\alpha}' \geq \underline{\alpha} ;$$

$$(4.33) \quad \Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k) \text{ convexe.}$$

La propriété (4.32), toujours vérifiée en pratique puisque, comme on l'a dit, les  $G_j(x)$  sont en règle générale toujours étoilés de centre 0, conduit alors à la formulation suivante pour une approche par l'intérieur du  $\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$ :

Si  $\underline{\alpha}^1, \underline{\alpha}^2, \dots, \underline{\alpha}^k$  sont des dimensionnements potentiellement stables respectivement pour les chargements  $\underline{Q}^1, \underline{Q}^2, \dots, \underline{Q}^k$ , alors le dimensionnement  $\underline{\alpha}^M$  défini par les composantes  $\alpha_j^M$  :

$$(4.34) \quad \alpha_j^M = \text{Sup} \{ \alpha_j^\ell, \ell = 1, 2, \dots, k \}, \quad j = 1, \dots, m$$

est potentiellement stable pour l'ensemble des chargements  $\underline{Q}^1, \dots, \underline{Q}^k$  et par suite on a :

$$(4.35) \quad \{ \underline{\alpha} \mid \underline{\alpha} \geq \underline{\alpha}^M \} \subset \Delta(\underline{Q}^1, \underline{Q}^2, \dots, \underline{Q}^k) .$$

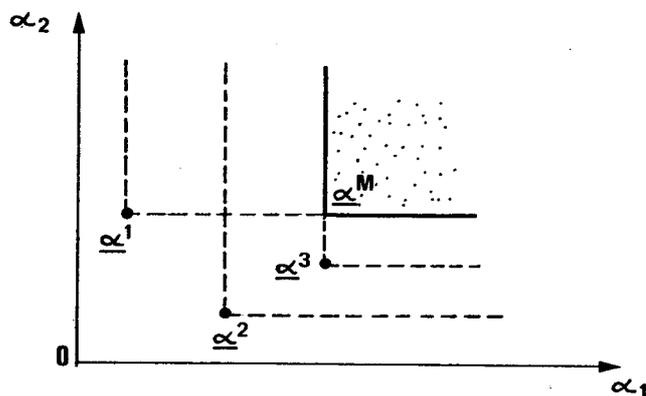


Figure 12 :  
Approche par l'intérieur  
de  $\Delta(\underline{Q}^1, \underline{Q}^2, \dots, \underline{Q}^k)$   
(ici  $k=3$ ).

---

5 - THÉORIE DU CALCUL A LA RUPTURE POUR LES SYSTÈMES DONT LE DIMENSIONNEMENT  
DÉPEND D'UN NOMBRE FINI DE PARAMÈTRES : APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR PAR  
LES VITESSES

---

5.1 - FORMULE FONDAMENTALE

On s'appuie sur la théorie de l'approche par l'extérieur par les vitesses du calcul à la rupture développée au chapitre I (§ 4) ; les notations utilisées ici sont identiques à celles employées dans ce chapitre, ou s'en déduisent de façon évidente.

En application de la formule (4.10) du chapitre I, lorsque le dimensionnement  $\underline{\alpha}$  du système est fixé, on peut écrire :

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{v} \text{ C.A. dans le mode,} \\ K(\underline{\alpha}) \subset \{ \underline{Q} \mid \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - P(\underline{\alpha}; \underline{v}) \leq 0 \} \end{array} \right.$$

Ici, compte tenu de la définition du système,  $P(\underline{\alpha}, \underline{v})$  se décompose selon (5.2) :

$$(5.2) \quad P(\underline{\alpha}; \underline{v}) = \sum_{j=1}^{j=m} \left[ \int_{V_j} \pi[\underline{x}, \alpha_j; \underline{d}(\underline{x})] dV_j + \int_{\Sigma_j} \pi[\underline{x}, \alpha_j, \underline{n}(\underline{x}); \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket] d\Sigma_j \right]$$

où  $\Sigma_j$  désigne les surfaces de discontinuité de vitesse dans la zone  $V_j$ , et où, évidemment :

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi[\underline{x}, \alpha_j; \underline{d}(\underline{x})] = \text{Sup} \left\{ \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \alpha_j) \right\} \\ \pi[\underline{x}, \alpha_j, \underline{n}(\underline{x}); \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket] = \text{Sup} \left\{ \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \alpha_j) \right\} . \end{array} \right.$$

D'après la définition (3.4) de  $G(\underline{x}, \alpha_j)$ , ces fonctions se mettent sous la forme :

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi[\underline{x}, \alpha_j ; \underline{d}(\underline{x})] = \alpha_j \pi_j[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] \\ \pi[\underline{x}, \alpha_j, \underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket] = \alpha_j \pi_j[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket] \end{array} \right.$$

où les  $\pi_j$  sont les fonctions  $\pi$  relatives à  $G_j(\underline{x})$  :

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_j[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] = \text{Sup} \left\{ \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G_j(\underline{x}) \right\} \\ \pi_j[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket] = \text{Sup} \left\{ \underline{n}(\underline{x}) \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G_j(\underline{x}) \right\} . \end{array} \right.$$

Revenant à (5.2) on voit que l'on peut alors écrire  $P(\underline{\alpha} ; \underline{v})$  comme un produit scalaire :

$$(5.6) \quad P(\underline{\alpha} ; \underline{v}) = \sum_{j=1}^{j=m} \alpha_j P_j(\underline{v}) = \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v})$$

ce qui transforme (5.1) en :

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{v} \text{ C.A. dans le mode} \\ K(\underline{\alpha}) \subset \left\{ \underline{Q} \mid \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \end{array} \right.$$

Cette formule étant valable,  $\forall \underline{\alpha} \geq 0$ , on a ainsi la formule fondamentale de l'approche par l'extérieur de  $(K)$ :

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \underline{v} \text{ C.A. dans le mode} \\ K \subset \left\{ (\underline{Q}, \underline{\alpha}) \mid \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \end{array} \right.$$

## 5.2 - COMMENTAIRES

On remarquera que, comme pour le calcul à la rupture, rien ne permet d'affirmer que cette approche par l'extérieur conduise, si l'on explore tous les champs  $\underline{v}$  C.A. dans le mode, à la détermination exacte de  $K$ . Il faut évidemment,

pour qu'il en soit ainsi que les  $G_j(\underline{x})$  soient convexes ; on pourra, pour l'étude de cette question, s'appuyer sur les résultats de Nayroles (1970), Frémond et Friaà (1978) et Friaà (1979) déjà cités ; toutefois certaines difficultés nouvelles pourraient apparaître dues à la nullité éventuelle des  $\alpha_j$ . En tout état de cause, ce résultat n'est aucunement essentiel à l'intérêt présenté par l'approche par l'extérieur par les vitesses que traduit clairement (5.7) ; il est vrai pour les structures à barres classiques.

La formule (5.7) permet de déduire les méthodes d'approche par l'extérieur, tant pour les domaines  $K(\underline{\alpha})$  que pour les domaines  $\Delta(\underline{Q})$ . Il est inutile d'évoquer la première sur laquelle on s'est appuyé au début du § 5.1, et l'on ne s'intéressera ici qu'à  $\Delta(\underline{Q})$ .

### 5.3 - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR DE $\Delta(\underline{Q})$ , PAR LES VITESSES

L'approche de  $\Delta(\underline{Q})$  par l'extérieur par les vitesses résulte directement de la formule (5.8) où l'on fixe  $\underline{Q}$ .

Comme cela est schématisé sur la figure 13, chaque champ de vitesse  $\underline{v}$ , C.A. dans le mode et dans lequel

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\underline{P}(\underline{v})| < \infty \\ \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \neq 0 \end{array} \right. ,$$

permet de délimiter de façon non triviale le domaine  $\Delta(\underline{Q})$  par la formule :

$$(5.10) \quad \Delta(\underline{Q}) \subset \left\{ \underline{\alpha} \mid \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} .$$

On remarquera que, à la différence de l'approche par l'extérieur de  $K(\underline{\alpha})$ , chaque champ de vitesse élimine toujours ici un domaine contenant l'origine.

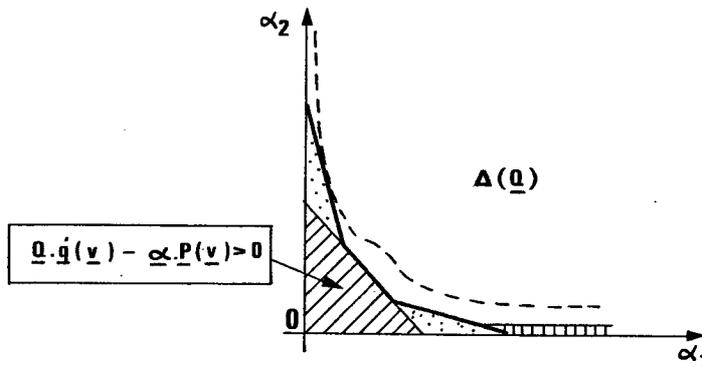


Figure 13 : Approche par l'extérieur de  $\Delta(Q)$  par les vitesses ( $m = 2$ ).

#### 5.4 - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR DE $\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$ PAR LES VITESSES

Dans le cas d'un ensemble de chargements  $Q^1, Q^2, \dots, Q^k$ , pour lesquels on cherche les dimensionnements potentiellement stables, les formules (4.5) exprimant  $(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$ , et (5.10) conduisent à l'approche par l'extérieur par les vitesses :

$$(5.11) \quad \Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k) = \left\{ \underline{\alpha} \mid (\text{Sup } Q^{\ell} \cdot \dot{q}(\underline{v}), \ell = 1, 2, \dots, k) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} .$$

---

 6 - APPLICATION AU DIMENSIONNEMENT DES OUVRAGES
 

---

 6.1 - GÉNÉRALITÉS
 

---

De très nombreux travaux ont été consacrés à l'optimisation du dimensionnement des structures en s'appuyant soit sur des règlements élastiques, soit sur des considérations du type de celles développées plus haut. D'une façon générale ces dernières sont le plus souvent regroupées sous le terme de dimensionnement *plastique*, eu égard au fait qu'il s'agit très fréquemment de structures métalliques (barres, poutres, plaques) et à ce que, comme on l'a déjà indiqué, une certaine ductilité (plasticité) du matériau constitutif est, en tout état de cause, nécessaire pour que les potentialités de résistance de la structure ne soient pas trop éloignées de ses possibilités réelles.

Le but de ce qui va être présenté dans la suite est essentiellement de constituer un fil conducteur pour la lecture de la littérature abondante afférente à ce sujet, et dont on trouvera quelques références dans la bibliographie. Toutefois sera nécessairement laissé de côté (§ cf § 3.2.2.) tout ce qui a trait à l'optimisation des structures (notamment plaques et dalles minces) dont le dimensionnement est défini par un champ scalaire ; à ce propos on se reportera avec profit à Save (1972), Save et Massonnet (1972, 1973).

 6.2 - UTILISATION DU DOMAINE DES DIMENSIONNEMENTS
 

---

 POTENTIELLEMENT STABLES
 

---

On a vu dans les paragraphes précédents (4.1, 4.4 à 4.8, 5.2, 5.3) la définition et les propriétés du domaine  $\Delta(Q)$  des dimensionnements potentiellement stables sous un chargement donné  $Q$ , et du domaine  $\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$  pour plusieurs chargements donnés  $Q^1, \dots, Q^k$ , ainsi que la possibilité d'utiliser des approches par l'intérieur et l'extérieur pour les construire.

Une propriété importante du domaine  $\Delta(Q)$  est représentée par (4.25) qui indique que  $\Delta(Q)$ , et en conséquence  $\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$ , n'est pas borné dans les

directions  $\underline{\alpha} \geq 0$ . Ceci implique que si l'on désire dimensionner ou prédimensionner un système, ou le plus souvent une structure, à partir de la connaissance de l'ensemble des dimensionnements potentiellement stables pour l'ensemble des chargements imposés, il sera nécessaire de faire intervenir un critère de choix qui sera concrétisé par la minimisation d'une fonction scalaire du vecteur dimensionnement. Dans de nombreux cas l'objectif visé sera la minimisation de la masse de matériau constituant la structure (structure de "poids minimal"), soit que cette condition provienne directement de l'usage auquel la structure est destinée (aéronautique par exemple), soit que la recherche du coût minimal puisse en première approximation être considérée comme s'identifiant à celle de la masse minimale. On reviendra sur cette question dans la suite (§ 6.3).

Précisons immédiatement que dans la majorité des cas, il ne s'agira là que d'un prédimensionnement ; en effet, si comme on l'a dit, la ductilité du matériau constitutif est une nécessité pour que les possibilités réelles de la structure ne soient pas trop éloignées de ses potentialités que met en évidence le calcul à la rupture, il faut également que dans les conditions de service les plus sévères les déformations de la structure ne dépassent pas certaines valeurs imposées : aussi le dimensionnement de la structure devra-t-il se référer à ce type de conditions de même qu'il tiendra compte des règles destinées à se garantir contre le flambement, le déversement et autres types d'instabilité pour les structures.

### 6.3 - LES FONCTIONS "ÉCONOMIQUES"

Souvent la fonction "économique" dont la minimisation sert de critère pour le prédimensionnement est une fonction linéaire du vecteur dimensionnement  $\underline{\alpha}$  :

$$(6.1) \quad \phi(\underline{\alpha}) = \underline{c} \cdot \underline{\alpha} \quad .$$

C'est le cas lorsque l'on considère une structure réticulée : si l'on cherche à construire la structure de masse minimale on aboutit rigoureusement à une fonction économique de la forme (6.1), la résistance de chaque barre étant, comme sa masse, proportionnelle à sa section si le matériau constitutif est fixé. On est alors conduit à un problème de *programmation linéaire* car le domaine  $\Delta(Q)$  est, pour ce type de structures, limité par une ligne polygonale convexe.

Pour d'autres structures, telles que les structures à barres fléchies, le choix d'une fonction économique de la forme (6.1) sera fait dans un but de simplification ; il permettra, éventuellement avec d'autres approximations (cas des charges réparties), de se ramener encore à un problème de programmation linéaire.

C'est ainsi que si l'on considère une structure à barres fléchies constituée de profilés métalliques standards, Lescouarc'h et Brozzetti (1972) rappellent que si les profilés d'une même série étaient géométriquement semblables alors, pour des raisons évidentes d'analyse dimensionnelle, la masse d'un tel élément varierait comme la puissance 2/3 de son moment limite, ce qui, conduirait en adoptant la masse de la structure comme fonction économique, à une fonction  $\phi(\underline{\alpha})$  de la forme :

$$(6.2) \quad \phi(\underline{\alpha}) = \underline{c} \cdot \underline{\alpha}^{2/3}$$

( $\underline{\alpha}^{2/3}$  étant le vecteur de composantes  $\alpha_j^{2/3}$ ). Ils indiquent que bien que les profilés commerciaux d'une même série *IPE, IAP, ..., HEC*, ne soient pas parfaitement géométriquement semblables, cette relation demeure vérifiée en première approximation ; Heyman (1975), indique quant à lui, la puissance 0,6. La linéarisation de la fonction  $\phi(\underline{\alpha})$  se fera en assimilant chacun des monômes  $c_j \alpha_j^{2/3}$  à sa "tangente" pour une certaine valeur de  $\alpha_j$  ; il va de soi qu'elle conduira à un résultat d'autant meilleur qu'elle aura été effectuée au voisinage de la solution optimale (d'où, éventuellement, le recours à un processus itératif).

Certains auteurs ont fait remarquer que pour les structures courantes, la validité du choix de la masse de la structure comme critère de prédimensionnement devait être discutée. S'il paraît clair que pour ces structures, le coût de la construction pourra constituer un critère valable, il n'est en effet pas évident que celui-ci doive se référer uniquement ou même principalement à la masse de la structure.

a) Dans le cas de structures à barres fléchies, constituées de profilés métalliques, on devra évidemment tenir compte du fait que la gamme des profilés dans une série n'est pas continue. Le problème peut alors être envisagé de deux façons équivalentes quant aux résultats :

. soit, directement, comme la minimisation de la fonction économique de la forme (6.1) (voire (6.2)) sur l'ensemble discret des valeurs des paramètres de résistance disponibles (Toakley, 1968),

. Soit en procédant à la minimisation, sur tout l'espace des paramètres de résistance, d'une fonction  $\phi(\alpha)$  de la forme (6.1) (voire (6.2)) pour les valeurs des paramètres de résistance disponibles, et modifiée de façon à conduire à un coût très élevé pour les valeurs non disponibles, ce qui aboutit pratiquement à exclure celles-ci de la minimisation (pénalisation).

b) Il y aurait aussi lieu de faire intervenir le coût des assemblages, tant du point de vue de la matière que de la main d'oeuvre et de la faisabilité de certains d'entre eux.

c) Pour les structures en béton armé, Palmer (1975) a attiré l'attention sur le fait que tout calcul qui ne tendrait qu'à minimiser les masses de matières (essentiellement, la masse de l'acier de ferrailage) risquait de passer à côté de son objectif réel, à savoir la minimisation du coût, s'il aboutissait à trop compliquer le travail tant au bureau d'étude qu'au chantier.

#### 6.4 - ÉTUDE D'UN EXEMPLE

##### 6.4.1. - PRÉSENTATION

A titre d'exemple nous examinerons la structure représentée à la fig.14, utilisée par Heyman (1975) pour illustrer son propos : poutre continue à 2 travées d'égale longueur  $2l$ , de sections constantes, dont les paramètres de résistance sont  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (respectivement) ; cette poutre est soumise aux charges d'intensité  $2Q$  et  $Q$  ( $Q \geq 0$ ), verticales descendantes, appliquées au milieu des travées. On désigne par  $m$  le moment de référence pour les moments limites des travées :

$$m_1 = \alpha_1 m \quad , \quad m_2 = \alpha_2 m \quad .$$

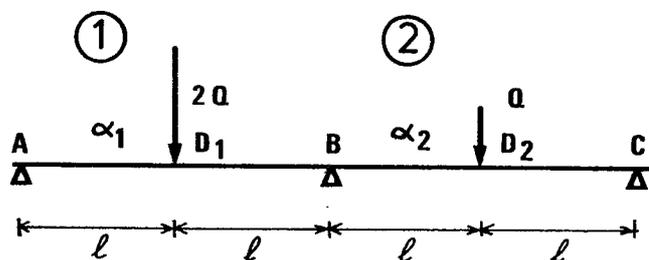


Figure 14 :  
Dimensionnement d'une  
poutre continue à  
2 travées.

6.4.2 - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR DU DOMAINE DES  
DIMENSIONNEMENTS POTENTIELLEMENT STABLES

-----

On désigne par  $\mu$  le moment fléchissant au droit de l'appui central B.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un dimensionnement  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$  soit potentiellement stable s'obtiennent en considérant les moments fléchissants au droit des points  $D_1$ , B et  $D_2$ . Il vient sans difficulté :

$$(6.3) \quad |Ql/m + \mu/2m| \leq \alpha_1$$

$$(6.4) \quad |\mu/m| \leq \alpha_1$$

$$(6.5) \quad |\mu/m| \leq \alpha_2$$

$$(6.6) \quad |Ql/2m + \mu/2m| \leq \alpha_2 .$$

En exprimant la compatibilité de ces inégalités par rapport à  $\mu$ , à  $Q$  donné, on obtient les conditions sur  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  pour que  $\underline{\alpha}$  appartienne à  $\Delta(Q)$ . Nous n'écrirons que celles qui ne sont pas trivialement vérifiées en raison de la positivité de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

$$(6.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 \geq 2Ql/3m & (*) \\ 2\alpha_2 + \alpha_1 \geq Ql/m & \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2Ql/m & (*) \\ \alpha_2 \geq Ql/3m & (*) \\ 2(\alpha_1 + \alpha_2) \geq Ql/m & \end{array} \right.$$

qui permettent de tracer le domaine  $\Delta(Q)$  représenté à la figure 15.

On remarque que ce domaine, qui possède bien les propriétés générales énoncées au § 4.4, est limité par une ligne polygonale en conséquence de (6.7). Cela correspond au fait que  $K$ , qui est lui-même défini dans l'espace  $\{Q\} \times \{\underline{\alpha}\}$  par les inégalités (6.7), est ici un polyèdre.

Parmi les inégalités (6.7), seulement trois, marquées d'un (\*), interviennent de façon effective dans la détermination de  $\Delta(Q)$ .

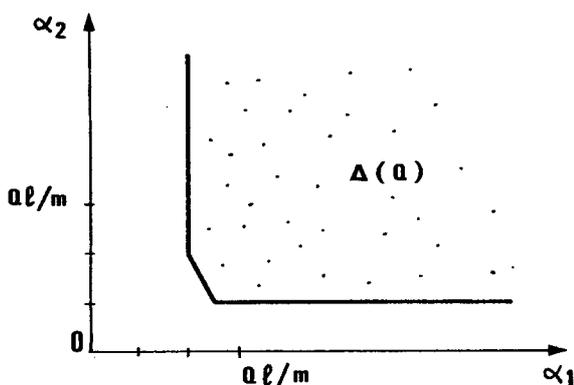


Figure 15 :  
 Domaine  $\Delta(Q)$  pour  
 la structure de la  
 figure 14.

#### 6.4.3 - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR DU DOMAINE DES DIMENSIONNEMENTS POTENTIELLEMENT STABLES

##### 6.4.3.1 - Généralités

Pour une structure à barres fléchies telle que celle étudiée ici, soumise à des charges concentrées, l'approche par l'extérieur dans la recherche des chargements extrêmes s'appuie sur la considération des sections *potentiellement critiques* [cf. p. ex. : (Massonnet et Save, 1967)].

Le principe de la méthode est le suivant :

On sait, par application du théorème d'association (chapitre I, §5.2), que le (ou les) mécanisme de déformation de la structure correspondant à un chargement extrême est nécessairement associé à la (ou les) distribution de moment fléchissant équilibrant ce chargement extrême. En conséquence, pour un tel mécanisme, il n'y aura déformation que dans les sections où le moment fléchissant atteindra, dans une distribution statiquement admissible, sa valeur *maximale permise* en flexion positive ou négative.

Si la structure étudiée est constituée de barres le long desquelles la "résistance est constante" (c'est-à-dire : valeurs limites constantes imposées au moment fléchissant), alors on peut affirmer que le (ou les) mécanisme de déformation correspondra à des déformations des poutres dans les sections où le moment fléchissant sera *extrémal* dans une distribution statiquement admissible (avec le chargement extrême concerné) :

si ces sections sont isolées, on aura affaire à des rotations concentrées,

si le moment fléchissant est constant et extrémal sur un segment, il y aura déformation par courbure de la poutre.

On voit donc que, pour une structure soumise à des charges concentrées et dont les poutres sont de résistance constante, il est possible de connaître à l'avance les sections en lesquelles la déformation de la structure est susceptible de se produire : ce sont les sections *potentiellement critiques*<sup>(1)</sup>, qui ne sont autres que les sections où les distributions de moment fléchissant statiquement admissibles sont susceptibles de présenter leurs extrémums, c'est-à-dire les sections correspondant aux *points d'application des forces concentrées* (on notera que dans le cas où en un tel point il y a assemblage de deux poutres de résistances différentes, on devra introduire deux sections potentiellement critiques, une par poutre ; il en sera évidemment de même dès qu'il y aura assemblage de plus de deux poutres).

Ceci permet alors de réduire à un sous-espace vectoriel de dimension finie l'ensemble des mécanismes sur lesquels on procède à la minimisation de " $P(\underline{v})$ ". Une méthode systématique d'exploration de ce sous-espace vectoriel s'appuie sur la construction d'une base de mécanismes types dits "*de poutre*", "*de panneau*" (pour les portiques), et "*de noeud*" [(cf. par ex. : (Massonnet et Save, 1967)].

On peut démontrer, par application du principe des puissances virtuelles, que pour une structure dont le degré d'hyperstaticité est  $s$  et qui possède  $p$  sections potentiellement critiques, la dimension du sous-espace vectoriel des mécanismes correspondants est *supérieure ou égale* à  $(p-s)$ . Plus précisément, si l'on désigne par  $r$  le nombre de sections potentiellement critiques en lesquelles les moments fléchissants sont linéairement indépendants dans toute distribution auto-équilibrée, la dimension du sous-espace vectoriel des mécanismes est *exactement égale* à  $(p-r)$ .

#### 6.4.3.2 - Application

L'approche par l'extérieur pour la structure de la figure 14 se fait donc en introduisant 4 sections potentiellement critiques en  $D_1$ , B et  $D_2$ , et les 3 mécanismes de base (2 mécanismes de poutre et 1 mécanisme de noeud) correspondants représentés sur la figure 16, et définis respectivement par les paramètres  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$ .

---

(1) terminologie classique

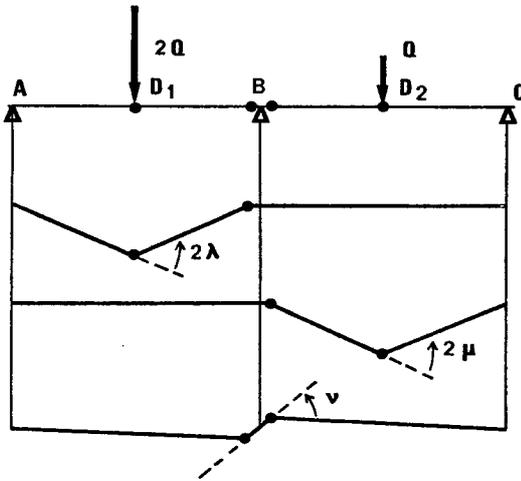


Figure 16 :

Sections potentiellement critiques et mécanismes de base correspondants pour la structure de la figure 14.

En application de (5.10) on peut alors écrire en considérant un mécanisme quelconque de l'espace vectoriel ainsi défini :

$$(6.8) \left\{ \begin{array}{l} \Delta(Q) \subset \left\{ \underline{\alpha} \mid \frac{Q\ell}{m} (2\lambda + \mu) - \alpha_1 (|2\lambda| + |\lambda - \nu|) - \alpha_2 (|2\mu| + |\mu + \nu|) \leq 0 \right\} \\ \forall \lambda, \mu, \nu \end{array} \right.$$

On a ainsi directement, sous forme paramétrique, des inégalités que doivent satisfaire  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  pour que  $\underline{\alpha}$  appartienne à  $\Delta(Q)$ .

L'étude de (6.8) en faisant varier  $\lambda, \mu, \nu$  permet de dégager les inégalités "dominantes" :  $Q$  étant positif on sait que le coefficient de  $Q$  doit être maintenu positif (on le fixera par exemple égal à 1) ; les inégalités qui contribueront à délimiter  $\Delta(Q)$  seront nécessairement obtenues lors des annulations des valeurs absolues dans (6.8), d'où les quatre inégalités indiquées en (6.9) parmi lesquelles certaines pourront se révéler surabondantes.

$$(6.9) \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 + 2\alpha_2 \geq Q\ell/m & \text{qui correspond à } \lambda = 0, \mu = 1, \nu = -1 \\ \alpha_1 \geq 2Q\ell/3m & (*) \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \lambda = \frac{1}{2}, \mu = 0, \nu = 0 \\ \alpha_2 \geq Q\ell/3m & (*) \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \lambda = 0, \mu = 1, \nu = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2Q\ell/m & (*) \quad \quad \quad \text{"} \quad \quad \lambda = \frac{1}{2}, \mu = 0, \nu = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

En fait, trois seulement des inégalités (6.9) interviennent effectivement dans la délimitation de  $\Delta(Q)$  : elles sont marquées d'un (\*).

On constate qu'elles sont identiques à celles qui dans (6.7) interviennent effectivement pour délimiter  $\Delta(Q)$  par l'approche statique.

Cela signifie, comme on pouvait le prévoir à partir des propriétés connues pour le calcul à la rupture de ce type de structures <sup>(1)</sup>, que l'approche par l'extérieur fondée sur (6.8) permet de déterminer exactement  $\Delta(Q)$ .

De plus cela permet d'interpréter "physiquement" les droites qui déterminent  $\Delta(Q)$  ; chacune d'elles correspond, comme indiqué dans (6.9) par les valeurs des paramètres correspondantes, à un mécanisme. Ces mécanismes sont représentés sur la figure 17 : ce sont les mécanismes *actifs* dans la détermination de  $\Delta(Q)$  ; à chaque sommet de la frontière de  $\Delta(Q)$  correspond évidemment une famille de mécanismes obtenue par combinaison linéaire convexe des mécanismes actifs (figure 17) qui déterminent ce sommet.

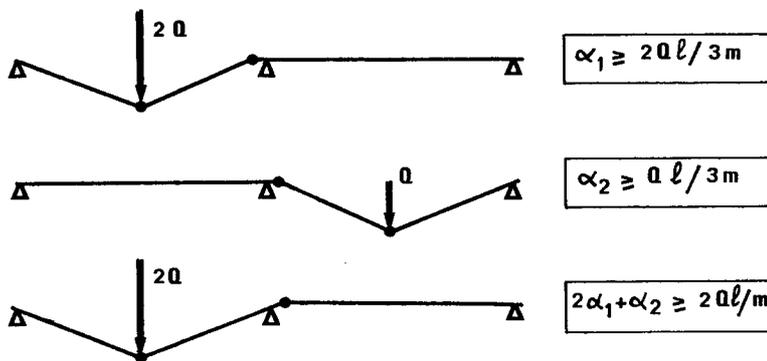


Figure 17 : Mécanismes actifs dans la détermination de  $\Delta(Q)$ .

<sup>(1)</sup> A  $Q$  fixé, l'approche par l'extérieur fondée sur les mécanismes de base de la figure 16 permet de déterminer exactement  $K(Q)$  : il s'ensuit, d'une façon générale, que l'inégalité paramétrique du second membre de (6.8) permet de déterminer exactement  $K$ .

## 6.4.4 - OPTIMISATION DE LA STRUCTURE

## 6.4.4.1 - Fonction économique linéaire

On suppose que l'on adopte pour la relation entre la masse linéique de la poutre et son moment limite de résistance une expression linéaire. Les travées étant de longueurs égales, l'optimisation de la structure se ramène alors à la minimisation sur  $\Delta(Q)$  de :

$$(6.10) \quad \phi(\underline{\alpha}) = \alpha_1 + \alpha_2$$

d'où le problème de programmation linéaire :

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } (\alpha_1 + \alpha_2) \\ \alpha_1 \geq 2Q\ell/3m \\ \alpha_2 \geq Q\ell/3m \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2Q\ell/m \end{array} \right.$$

La solution en est élémentaire : les lignes d'égale valeur de  $\phi$  dans le plan  $(\alpha_1, \alpha_2)$  sont des droites parallèles à la seconde bissectrice des axes ; le minimum de  $\phi$  sur  $\Delta(Q)$  est atteint sur la frontière de  $\Delta(Q)$  au point où  $(-\text{grad } \phi)$  est normal extérieur à  $\Delta(Q)$  c'est-à-dire au "sommet" de coordonnées :

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 5Q\ell/6m \\ \alpha_2 = Q\ell/3m \end{array} \right.$$

On dit aussi qu'en ce point "la fonction économique est une combinaison linéaire convexe des mécanismes actifs correspondants".

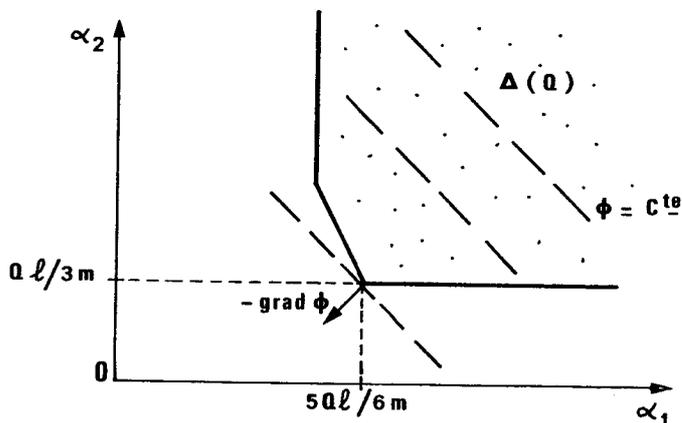


Figure 18 :  
Optimisation de la structure avec une fonction économique linéaire

## 6.4.4.2 - Fonction économique non linéaire

On adopte maintenant pour  $\phi$  la forme en puissance proposée en (6.2) qui, compte tenu des caractéristiques géométriques du problème étudié ici, conduit, pour l'optimisation de la structure, à la minimisation sur  $\Delta(Q)$  de :

$$(6.13) \quad \phi(\underline{\alpha}) = \alpha_1^{2/3} + \alpha_2^{2/3}$$

La figure 19 présente quelques lignes d'égale valeur de cette fonction "faiblement concave".

Le problème de minimisation correspondant :

$$(6.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } (\alpha_1^{2/3} + \alpha_2^{2/3}) \\ \alpha_1 \geq 2Ql/3m \\ \alpha_2 \geq Ql/3m \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2Ql/m \end{array} \right.$$

admet encore pour solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 5Ql/6m \\ \alpha_2 = Ql/3m \end{array} \right.$$

déjà obtenue dans le cas de la fonction économique linéaire (6.10).

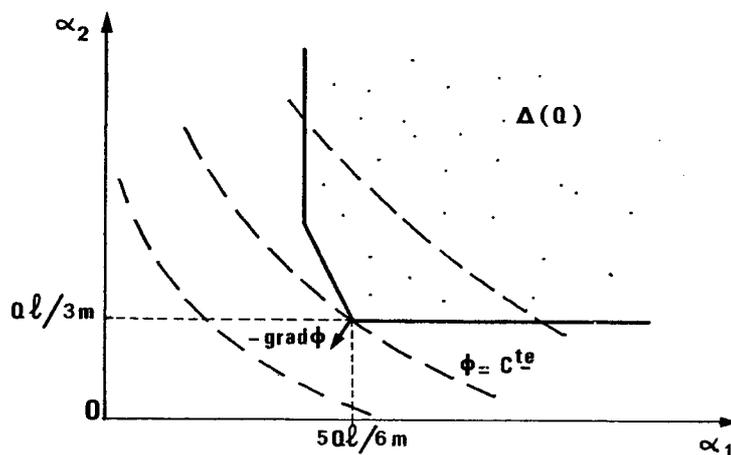


Figure 19 :  
Optimisation de la  
structure avec  
fonction économique  
non linéaire.

Cette solution est atteinte lorsqu'une courbe d'égale valeur de  $\phi$  vient tangenter la frontière de  $\Delta(Q)$  en un sommet, qui est ici le même que dans le cas linéaire. On remarquera d'ailleurs que sur cet exemple ce dernier résultat serait maintenu pour toute fonction  $\phi$  de la forme :

$$\phi(\underline{\alpha}) = \alpha_1^k + \alpha_2^k \quad 0 < k \leq 1$$

Heyman (1975) attire l'attention sur le fait que, si la frontière de  $\Delta(Q)$  avait eu une forme différente, plus semblable à celle des lignes d'égale valeur de  $\phi$ , un résultat différent aurait pu être obtenu : optimum atteint pour un sommet autre que celui correspondant au cas linéaire ; il indique toutefois qu'en règle générale dans de tels cas, la différence de "coût" entre le dimensionnement optimal ainsi obtenu et celui déterminé par la théorie linéarisée est faible, et il justifie ainsi le recours à la théorie linéarisée (ceci étant évidemment lié à la "faible" concavité des fonctions  $\phi$  de la forme (6.13)).

L'intérêt de procéder à une telle linéarisation est évidemment de permettre de recourir à tous les algorithmes classiques de la programmation linéaire pour l'optimisation de la structure.

#### 6.4.4.3 - Remarque

On peut souhaiter que le dimensionnement de la structure soit optimisé par rapport à plusieurs chargements. Dans ce cas il sera d'abord nécessaire d'introduire un espace des chargements,  $\{Q\}$ , de dimension suffisante ; on construira les  $\Delta(Q^i)$  correspondants à chacun des chargements imposés et on procédera à la minimisation de la fonction économique  $\phi$  sur leur intersection  $\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$ .

### 6.5 - AUTRE PROBLEME D'OPTIMISATION DU DIMENSIONNEMENT

La théorie qui vient d'être présentée a été bâtie en supposant que les paramètres de chargement et les paramètres de résistance sont des variables indépendantes.

En toute rigueur cette hypothèse est souvent en défaut, notamment pour les structures : en effet, comme on l'a dit plus haut, la résistance d'un élément de structure est, lorsque le matériau constitutif est fixé, liée à la masse de cet élément ; aussi est-il clair que, lorsque le poids de la structure ne peut être négligé devant les autres éléments du chargement, on trouve parmi les paramètres de chargement des paramètres, en nombre égal à celui des paramètres de résistance, liés à ceux-ci par la relation linéaire ou "puissance" qui est à la base de la construction de  $\phi(\underline{\alpha})$  au § 6.3.

On peut, pour traiter ce problème de façon simple, utiliser la théorie précédente : on fixera *a priori* les paramètres de chargement liés aux paramètres de résistance à des valeurs plausibles, et on effectuera ensuite, si nécessaire, des itérations sur ces valeurs.

On peut aussi examiner directement l'optimisation avec paramètres liés. On s'appuiera sur les résultats démontrés précédemment pour  $K$  en supposant tous les paramètres indépendants et on fera ensuite intervenir la dépendance :

désignant par  $\underline{Q}'$  le vecteur des paramètres de chargement indépendants de  $\underline{\alpha}$ , et par  $\underline{Q}''$  celui des paramètres liés à  $\underline{\alpha}$  (on imaginera ici, comme exemple de paramètre dans  $\underline{Q}''$ , la masse linéique pour une poutre de section constante), on travaillera d'abord dans l'espace  $\{\underline{Q}'\} \times \{\underline{Q}''\} \times \{\underline{\alpha}\}$  où sera construit le domaine  $K$  ; l'optimisation sera faite, pour une ou plusieurs valeurs de  $\underline{Q}'$  fixées - soit  $\underline{Q}'^1, \underline{Q}'^2, \dots$  - par rapport à  $\underline{\alpha}$  à qui  $\underline{Q}''$  est lié : on devra donc minimiser  $\phi(\underline{\alpha})$  sur  $\Delta(\underline{Q}'^1)$ , projection sur l'espace  $\{\underline{\alpha}\}$  de l'intersection de  $K$  avec la variété définie par les équations (pour la première valeur de  $\underline{Q}'$  fixée :  $\underline{Q}'^1$ ) :

$$(6.15) \left\{ \begin{array}{l} \underline{Q}' = \underline{Q}'^1 \\ \underline{Q}'' = \underline{\alpha} \text{ (ou } \underline{Q}'' = \underline{\alpha}^{2/3} \text{)} ; \end{array} \right.$$

en particulier si la relation linéaire est adoptée entre  $\underline{Q}'$  et  $\underline{\alpha}$  on voit que si les hypothèses énoncées au début de l'étude qui permettent de démontrer la convexité de  $K$  sont satisfaites (ce qui sera le cas généralement), on sera encore conduit à un problème de programmation convexe ( $\phi(\underline{\alpha})$  étant évidemment linéaire et  $\Delta(\underline{Q}'^1)$  convexe).

---

 7 - APPROCHE PROBABILISTE
 

---

7.1 - GÉNÉRALITÉS

Dans l'étude d'un système mécanique, un aspect probabiliste peut s'introduire à deux niveaux :

dans la définition du système lui-même,

dans celle des sollicitations auxquelles il est soumis.

Puisque l'on se place ici du point de vue du calcul à la rupture (ou de l'analyse limite), en ce qui concerne le système lui-même, on supposera *déterminée la géométrie*, et on introduira le caractère aléatoire pour les *paramètres de résistance* ; en ce qui concerne les sollicitations, le caractère aléatoire s'introduira pour les paramètres de chargement.

Comme dans l'approche déterministe précédente et suivant la remarque faite au § 6.5, les deux catégories de paramètres pourront apparaître soit comme indépendantes les unes des autres, soit comme liées par une relation fonctionnelle du type (avec les notations du § 6.5) :

$$(7.1) \quad \underline{Q} = (\underline{Q}', \underline{Q}'') \quad \underline{Q}'' = \varphi(\underline{\alpha})$$

telles que celles présentées dans la formule (6.15). Mais on peut aussi imaginer que  $\underline{Q}$  et  $\underline{\alpha}$  soient des variables aléatoires stochastiquement dépendantes.

L'objet de la présentation qui va être faite n'est pas de donner une théorie probabiliste entrant dans tous les détails que nécessiterait la rigueur mathématique (notamment, seront passées sous silence toutes les hypothèses sur la mesurabilité des ensembles en cause, etc.), ni d'exposer l'intégralité des résultats acquis dans le domaine ; on se propose simplement de dégager, à partir des idées exposées dans les parties 1 à 5 du présent chapitre, les voies d'approche possibles.

## 7.2 - PROBABILITÉ DE STABILITÉ ET

## PROBABILITÉ DE RUINE D'UN SYSTÈME

### 7.2.1 - GÉNÉRALITÉS

Les données du problème ayant maintenant un caractère aléatoire, il va de soi que l'on ne saurait en déduire, en ce qui concerne la stabilité du système, une réponse déterministe. Laissant de côté, pour la commodité du langage, l'aspect "potentiel" lié à l'approche calcul à la rupture, c'est de *probabilité de stabilité* <sup>(1)</sup> ou de *probabilité de ruine* que l'on va être amené à traiter.

Ce sujet a été abordé par de nombreux auteurs. Il apparaît que le point crucial dans la majorité de ces études consiste à appréhender la notion même de probabilité de ruine : on pourra en particulier se reporter au travail de Carmasol (1983) dans lequel on trouvera une analyse des démarches suivies par divers auteurs à ce propos (Augusti et Baratta, 1972 ; Krée et Met, 1973 ; Augusti, 1975 ; Trézos, 1977 ; Parimi et Cohn, 1978).

En se plaçant ici dans le cadre du calcul à la rupture, on va voir comment il est possible, à partir des notions introduites dans les parties 3 et 4, de définir sans ambiguïté la probabilité de stabilité et la probabilité de ruine d'un système ; la démarche proposée s'inspire de celle de Gavarini (1972, 1977).

### 7.2.2 - CHARGEMENT ALÉATOIRE ET DIMENSIONNEMENT DÉTERMINISTE

Le dimensionnement du système étudié est déterminé : on désignera par  $\alpha^1$  la valeur correspondante du vecteur dimensionnement.

---

<sup>(1)</sup> Il conviendrait évidemment, en toute rigueur, de parler de probabilité de stabilité potentielle.

Le chargement est aléatoire. Cela signifie que les paramètres de chargement  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  sont connus par leur loi de probabilité conjointe (ils peuvent être indépendants ou non), c'est-à-dire que sur l'espace  $\{Q\} = \mathcal{R}^n$  est définie une mesure de probabilité qui sera notée  $\mu_Q$ . A titre d'exemples :

♦ on peut imaginer que seules quelques valeurs discrètes de chargement, soit  $Q^1, Q^2, \dots, Q^k$  puissent être imposées au système avec des probabilités respectivement égales à  $p^1, p^2, \dots, p^k$  ; la mesure  $\mu_Q$  est ainsi constituée de masses de Dirac aux points  $Q^1, Q^2, \dots, Q^k$  d'intensités  $p^1, p^2, \dots, p^k$ .

♦ on peut imaginer pour chacun des paramètres de chargement, supposés indépendants, des répartitions continues définies par des densités de probabilité  $f_1, f_2, \dots, f_n$  ; la mesure  $\mu_Q$  est alors la mesure produit correspondante, c'est-à-dire que la mesure d'une partie  $A$  de  $\mathcal{R}^n$  s'écrit :

$$(7.2) \quad \mu_Q(A) = \int_A f_1(Q_1) f_2(Q_2) \dots f_n(Q_n) dQ_1 dQ_2 \dots dQ_n, \quad A \subset \mathcal{R}^n.$$

♦ on peut imaginer aussi pour  $Q$ , si les paramètres de chargement sont stochastiquement dépendants, une mesure  $\mu_Q$  définie par une densité de probabilité  $f$  d'où :

$$(7.3) \quad \mu_Q(A) = \int_A f(Q) dQ, \quad A \subset \mathcal{R}^n.$$

La question posée est alors la suivante :

*quelle est la probabilité de stabilité du système dimensionné par  $\alpha^1$ , sous l'action du chargement aléatoire défini ci-dessus ?*

ou, de façon corrélatrice :

*quelle en est la probabilité de ruine ?*

La difficulté essentielle du problème consiste à dégager et à formuler précisément l'évènement dont on cherche à évaluer la probabilité.

Pour cela il suffit de considérer  $K(\underline{\alpha}^1)$  : alors il est clair que la probabilité de stabilité du système n'est autre que la probabilité que le chargement  $Q$  imposé au système appartienne à  $K(\underline{\alpha}^1)$  ; de même, la probabilité de ruine du système s'identifie à la probabilité qu'a le chargement d'être extérieur à  $K(\underline{\alpha}^1)$ .

On en déduit que la probabilité de stabilité du système, sous le chargement aléatoire défini par  $\mu_{\underline{Q}}$ , dans le dimensionnement  $\underline{\alpha}^1$ , soit  $p_s(\mu_{\underline{Q}} ; \underline{\alpha}^1)$ , est la mesure de  $K(\underline{\alpha}^1)$  :

$$(7.4) \quad p_s(\mu_{\underline{Q}} ; \underline{\alpha}^1) = \mu_{\underline{Q}}[K(\underline{\alpha}^1)]$$

et la probabilité de ruine :

$$(7.5) \quad p_r(\mu_{\underline{Q}} ; \underline{\alpha}^1) = 1 - \mu_{\underline{Q}}[K(\underline{\alpha}^1)].$$

Si  $\mu_{\underline{Q}}$  est définie par une densité de probabilité  $f$ , on aura en application de (7.3) :

$$(7.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_s(\mu_{\underline{Q}} ; \underline{\alpha}^1) = \int_{K(\underline{\alpha}^1)} f(\underline{Q}) \, d\underline{Q} \\ p_r(\mu_{\underline{Q}} ; \underline{\alpha}^1) = 1 - \int_{K(\underline{\alpha}^1)} f(\underline{Q}) \, d\underline{Q} \end{array} \right.$$

La figure 20 illustre le raisonnement et les formules (7.4) et (7.5) dans le cas où le système est soumis à 7 chargements équiprobables dans un mode à deux paramètres.

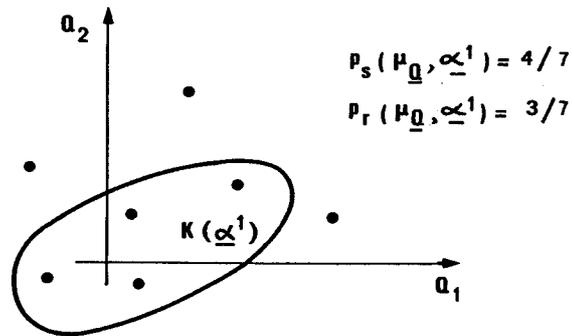


Figure 20 : Probabilité de stabilité d'un système soumis à des chargements discrets équiprobables.

7.2.3 - CHARGEMENT DÉTERMINISTE ET DIMENSIONNEMENT ALÉATOIRE

---

Le problème étudié est l'homologue du précédent : le chargement du système est déterminé et on désigne par  $Q^1$  la valeur correspondante du vecteur chargement ; le dimensionnement est aléatoire, c'est-à-dire que les paramètres de résistance  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  sont connus par leur loi de probabilité conjointe. Ainsi, sur "l'espace" des paramètres de résistance est définie une mesure de probabilité notée  $\mu_\alpha$ .

Ici encore on peut imaginer à titre d'exemples : des dimensionnements discrets  $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^k$  de probabilités  $p^1, p^2, \dots, p^k$  qui conduisent à des mesures de Dirac ; des répartitions continues définies par des densités de probabilités pour chacun des paramètres si ceux-ci sont indépendants, qui permettent de construire  $\mu_Q$ , mesure produit ; etc. Sans entrer dans les détails il paraît important de signaler que, puisque les paramètres de résistance sont non-négatifs, l'emploi sans précaution de certaines lois de probabilité très classiques peut conduire à des incohérences dans l'utilisation de la théorie du calcul à la rupture car elles correspondent à des densités de probabilité dont le support est  $\mathcal{R}$  ; en fait, en règle générale, les lois ajustées pour rendre compte des résultats issus des observations statistiques sont telles que les valeurs négatives des  $\alpha_j$  correspondent à de très faibles niveaux de probabilité, et on peut alors montrer, par exemple en utilisant des lois tronquées et renormées, que l'incidence des incohérences signalées est sans importance du point de vue pratique usuel.

La question posée est alors la suivante :

*sous l'action du chargement  $Q^1$ , quelle est la probabilité de stabilité d'un système dont le dimensionnement est aléatoire selon la définition ci-dessus ?*

ou, de façon corrélatrice :

*quelle en est la probabilité de ruine ?*

La signification physique du problème considéré ici est peut-être moins évidente que celle du problème du § 7.2.2 : en effet on pouvait imaginer aisément dans le cas précédent que le système, de dimensionnement connu de façon déterministe, était soumis à un processus de chargement aléatoire au cours de son histoire ; maintenant c'est le caractère aléatoire lié à la constitution du système qui entre en jeu.

Pour parvenir à la définition claire de l'évènement dont on recherche la probabilité au niveau du système il convient de se référer à  $\Delta(Q^1)$  : la probabilité de stabilité sous le chargement  $Q^1$  du système dont le dimensionnement  $\alpha$  est aléatoire apparaît alors comme la probabilité que  $\alpha$  appartienne à  $\Delta(Q^1)$ .

On en déduit que la probabilité de stabilité, sous le chargement  $Q^1$ , du système dont le dimensionnement aléatoire est défini par  $\mu_\alpha$ , soit  $p_s(Q^1; \mu_\alpha)$  est la mesure de  $\Delta(Q^1)$  :

$$(7.7) \quad p_s(Q^1; \mu_\alpha) = \mu_\alpha[\Delta(Q^1)]$$

et la probabilité de ruine :

$$(7.8) \quad p_r(Q^1; \mu_\alpha) = 1 - \mu_\alpha[\Delta(Q^1)]$$

Si  $\mu_\alpha$  est définie par une densité de probabilité  $f$  :

$$(7.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_s(Q^1; \mu_\alpha) = \int_{\Delta(Q^1)} f(\alpha) d\alpha \\ p_r(Q^1; \mu_\alpha) = 1 - \int_{\Delta(Q^1)} f(\alpha) d\alpha \end{array} \right.$$

La même démarche peut être suivie si le système est soumis, de façon déterministe, à plusieurs chargements  $Q^1, Q^2, \dots, Q^k$ . Il suffit alors de se référer à  $\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)$  introduit au § 4.1 et il vient :

$$(7.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_s(Q^1, Q^2, \dots, Q^k; \mu_\alpha) = \mu_\alpha[\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)] \\ p_r(Q^1, Q^2, \dots, Q^k; \mu_\alpha) = 1 - \mu_\alpha[\Delta(Q^1, Q^2, \dots, Q^k)] \end{array} \right.$$

#### 7.2.4 - CHARGEMENT ET DIMENSIONNEMENT ALÉATOIRES

-----

On considère un système dont seule la géométrie est déterminée, le chargement et le dimensionnement étant aléatoires : dans l'espace  $\{Q\} \times \{\alpha\}$  est donnée la mesure de probabilité  $\mu_{Q,\alpha}$  pour  $(Q,\alpha)$ .

Il est clair que si chargement et dimensionnement sont indépendants,  $\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}$  est le produit des mesures  $\mu_{\underline{Q}}$  et  $\mu_{\underline{\alpha}}$  relatives à  $\underline{Q}$  et  $\underline{\alpha}$  séparément. S'il existe entre  $\underline{Q}$  et  $\underline{\alpha}$  une relation fonctionnelle (7.1), on a pour la mesure sur l'espace  $\{\underline{Q}\} \times \{\underline{\alpha}\} = \{\underline{Q}'\} \times \{\underline{Q}''\} \times \{\underline{\alpha}\}$  :

$$(7.11) \quad \mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}} = \mu_{\underline{Q}'} \times \mu_{\underline{\alpha}} \times \delta_{\underline{Q}'' = \varphi(\underline{\alpha})}$$

On cherche à déterminer la probabilité de stabilité du système, sous le chargement aléatoire, dans son dimensionnement aléatoire.

L'évènement correspondant s'interprète commodément dans l'espace  $\{\underline{Q}\} \times \{\underline{\alpha}\}$  : c'est la position du point  $(\underline{Q}, \underline{\alpha})$  par rapport à  $K$ . La probabilité de stabilité du système,  $p_s(\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}})$ , est la probabilité pour que le point  $(\underline{Q}, \underline{\alpha})$  appartienne à  $K$  ; on a donc :

$$(7.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_s(\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) = \mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}(K) \\ p_r(\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) = 1 - \mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}(K) \end{array} \right.$$

Si  $\underline{Q}$  et  $\underline{\alpha}$  sont indépendants il vient :

$$(7.13) \quad p_s(\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) = \mu_{\underline{Q}} \times \mu_{\underline{\alpha}}(K)$$

soit encore :

$$(7.14) \quad p_s(\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) = \int_{\{\underline{\alpha}\}} d\mu_{\underline{\alpha}} \int_{K(\underline{\alpha})} d\mu_{\underline{Q}}$$

et :

$$(7.14)' \quad p_s(\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) = \int_{\{\underline{Q}\}} d\mu_{\underline{Q}} \int_{\Delta(\underline{Q})} d\mu_{\underline{\alpha}} ;$$

s'ils sont liés par la relation fonctionnelle (7.1) :

$$(7.15) \quad p_s(\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) = \mu_{\underline{Q}'} \times \mu_{\underline{\alpha}} [K \cap (\underline{Q}'' = \varphi(\underline{\alpha}))].$$

On peut aussi remarquer que (7.12) et (7.13) contiennent comme cas particuliers (7.4) et (7.7). Pour le système du § 7.2.2 on a  $\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}} = \mu_{\underline{Q}} \times \delta_{\underline{\alpha} - \underline{\alpha}^1}$ , d'où par application de (7.14) :

$$p_s(\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) = \mu_{\underline{Q}} [K(\underline{\alpha}^1)] \quad ;$$

et pour le système du § 7.2.3,  $\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}} = \delta_{\underline{Q} - \underline{Q}^1} \times \mu_{\underline{\alpha}}$ , d'où par (7.14)' :

$$p_s(\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) = \mu_{\underline{\alpha}} [\Delta(\underline{Q}^1)] .$$

### 7.3 - APPROCHES DES PROBABILITÉS DE STABILITÉ ET DE RUINE

#### 7.3.1 - GÉNÉRALITÉS

Les expressions auxquelles on a abouti ci-dessus pour les probabilités de stabilité et de ruine et notamment les formules (7.12) montrent clairement compte tenu des propriétés de la mesure  $\mu_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}$ , que :

♦ toute approche par l'intérieur de  $K$  conduit à une valeur par défaut de la probabilité de stabilité et à une valeur par excès de la probabilité de ruine ;

♦ toute approche par l'extérieur de  $K$  conduit à une valeur par excès de la probabilité de stabilité et à une valeur par défaut de la probabilité de ruine.

On donnera dans la suite les applications les plus simples de ces propriétés générales ; le lecteur désireux d'approfondir le sujet pourra se reporter à la bibliographie.

#### 7.3.2 - SYSTÈME A CHARGEMENT ALÉATOIRE ET

#### DIMENSIONNEMENT DÉTERMINISTE

♦ Approche par défaut de  $p_s(\mu_{\underline{Q}} ; \underline{\alpha}^1)$  par les contraintes.

On a évidemment :

$$(7.16) \quad p_s(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1) = \mu_Q [K(\underline{\alpha}^1)] \geq \mu_Q(A) \quad \forall A \subset K(\underline{\alpha}^1)$$

ce qui signifie que la mesure de tout ensemble de  $\{Q\}$  intérieur à  $K(\underline{\alpha}^1)$ , obtenu par les méthodes d'approche par l'intérieur, sous-évalue  $p_s(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1)$ .

♦ Approche par excès de  $p_s(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1)$  par les vitesses

On a de même :

$$(7.17) \quad p_s(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1) = \mu_Q [K(\underline{\alpha}^1)] \leq \mu_Q(B) \quad \forall B \supset K(\underline{\alpha}^1) ;$$

donc, en application des résultats sur l'approche par l'extérieur par les vitesses :

$$(7.18) \quad p_s(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1) \leq \mu_Q \left[ \bigcap_{\underline{v} \text{ C.A.}} \left\{ Q | Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) - \underline{\alpha}^1 \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \right] \quad (1) .$$

♦ Les propriétés corrélatives pour  $p_r(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1)$  sont évidentes :

$$(7.19) \quad p_r(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1) \leq 1 - \mu_Q(A) \quad \forall A \subset K(\underline{\alpha}^1)$$

$$(7.20) \quad p_r(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1) \geq 1 - \mu_Q(B) \quad \forall B \supset K(\underline{\alpha}^1)$$

$$(7.21) \quad p_r(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1) \geq 1 - \mu_Q \left[ \bigcap_{\underline{v} \text{ C.A.}} \left\{ Q | Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) - \underline{\alpha}^1 \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \right] \quad (1)$$

et en conséquence :

$$(7.22) \quad p_r(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1) \geq 1 - \mu_Q \left\{ Q | Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) - \underline{\alpha}^1 \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \quad \forall \underline{v} \text{ C.A.}$$

♦ On peut aussi, dans le cadre de l'approche par défaut par les contraintes, citer la formule proposée par Carmasol (1983) en explicitant (7.4).

(1) L'égalité dans cette formule a lieu lorsque les hypothèses suffisantes pour que  $K(\underline{\alpha}^1)$  soit exactement déterminé par l'approche par l'extérieur sont satisfaites.

Pour un dimensionnement donné  $\underline{\alpha}^1$  quelconque on introduit dans l'espace des champs de contrainte  $\{\underline{\sigma}\}$  l'ensemble :

$$(7.23) \quad H(\underline{\alpha}^1) = \left\{ \underline{\sigma} \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}, \underline{\alpha}^1) \quad \forall \underline{x} \in V \right\} ;$$

on définit alors dans  $\{Q\}$ , pour un champ  $\underline{\sigma}$  statiquement admissible dans le mode, quelconque, l'ensemble :

$$(7.24) \quad A(\underline{\alpha}^1, \underline{\sigma}) = \left\{ Q \mid \underline{\sigma} \in L^{-1}(Q) \cap H(\underline{\alpha}^1) \right\}$$

qui est vide si et seulement si  $\underline{\sigma} \notin H(\underline{\alpha}^1)$ .

Ceci permet d'écrire que :

$$(7.25) \quad K(\underline{\alpha}^1) = \bigcup_{\underline{\sigma} \text{ S.A.}} A(\underline{\alpha}^1, \underline{\sigma})$$

d'où :

$$(7.26) \quad p_s(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1) = \mu_Q \left[ \bigcup_{\underline{\sigma} \text{ S.A.}} A(\underline{\alpha}^1, \underline{\sigma}) \right]$$

et en conséquence :

$$(7.27) \quad p_s(\mu_Q ; \underline{\alpha}^1) \geq \mu_Q [A(\underline{\alpha}^1, \underline{\sigma})] \quad \forall \underline{\sigma} \text{ S.A.}$$

On remarquera la similitude de (7.26) avec (7.18) et de (7.27) avec (7.22).

### 7.3.3 - SYSTÈME A CHARGEMENT DÉTERMINISTE ET

#### DIMENSIONNEMENT ALÉATOIRE

♦ Approche par défaut de  $p_s(Q^1 ; \mu_{\underline{\alpha}})$  par les contraintes.  
On a de même qu'au § 7.3.2 :

$$(7.28) \quad p_s(Q^1 ; \mu_{\underline{\alpha}}) = \mu_{\underline{\alpha}} [\Delta(Q^1)] \geq \mu_{\underline{\alpha}}(A) \quad \forall A \subset \Delta(Q^1)$$

Cette formule qui peut être explicitée comme ci-dessus (Carmasol, 1983) en introduisant dans  $\{\underline{\alpha}\}$ , pour un champ  $\underline{\sigma}$  quelconque statiquement admissible dans le mode, l'ensemble (cf. § 4.7, formule 4.28) :

$$(7.29) \quad A(\underline{Q}^1, \underline{\sigma}) = \left\{ \underline{\alpha} \mid \underline{\sigma} \in L^{-1}(\underline{Q}^1) \cap H(\underline{\alpha}) \right\}$$

(qui est vide si et seulement si  $\underline{\sigma} \notin L^{-1}(\underline{Q}^1)$ ) ; on peut alors écrire :

$$(7.30) \quad \Delta(\underline{Q}^1) = \bigcup_{\underline{\sigma} \text{ S.A.}} A(\underline{Q}^1, \underline{\sigma})$$

d'où :

$$(7.31) \quad p_s(\underline{Q}^1 ; \underline{\mu}_{\underline{\alpha}}) = \underline{\mu}_{\underline{\alpha}} \left[ \bigcup_{\underline{\sigma} \text{ S.A.}} A(\underline{Q}^1, \underline{\sigma}) \right]$$

et :

$$(7.32) \quad p_s(\underline{Q}^1 ; \underline{\mu}_{\underline{\alpha}}) \geq \underline{\mu}_{\underline{\alpha}} [A(\underline{Q}^1, \underline{\sigma})] \quad \forall \underline{\sigma} \text{ S.A.}$$

♦ Approche par excès de  $p_s(\underline{Q}^1 ; \underline{\mu}_{\underline{\alpha}})$  par les vitesses

En application des résultats de l'approche par l'extérieur par les vitesses (§ 5.3) on a :

$$(7.33) \quad p_s(\underline{Q}^1 ; \underline{\mu}_{\underline{\alpha}}) \leq \underline{\mu}_{\underline{\alpha}} \left[ \bigcap_{\underline{v} \text{ C.A.}} \left\{ \underline{\alpha} \mid \underline{Q}^1 \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \right] \quad (1)$$

♦ Les propriétés corrélatives pour  $p_r(\underline{Q}^1 ; \underline{\mu}_{\underline{\alpha}})$  :

$$(7.34) \quad p_r(\underline{Q}^1 ; \underline{\mu}_{\underline{\alpha}}) \leq 1 - \underline{\mu}_{\underline{\alpha}}(A) \quad \forall A \subset \Delta(\underline{Q}^1)$$

$$(7.35) \quad p_r(\underline{Q}^1 ; \underline{\mu}_{\underline{\alpha}}) = 1 - \underline{\mu}_{\underline{\alpha}} \left[ \bigcup_{\underline{\sigma} \text{ S.A.}} A(\underline{Q}^1, \underline{\sigma}) \right]$$

$$(7.36) \quad p_r(\underline{Q}^1 ; \underline{\mu}_{\underline{\alpha}}) \leq 1 - \underline{\mu}_{\underline{\alpha}} [A(\underline{Q}^1, \underline{\sigma})] \quad \forall \underline{\sigma} \text{ S.A.}$$

$$(7.37) \quad p_r(\underline{Q}^1 ; \underline{\mu}_{\underline{\alpha}}) \geq 1 - \underline{\mu}_{\underline{\alpha}} \left[ \bigcap_{\underline{v} \text{ C.A.}} \left\{ \underline{\alpha} \mid \underline{Q}^1 \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \right] \quad (1)$$

(1) Même remarque que pour les formules (7.18) et (7.21).

$$(7.38) \quad p_r(\underline{Q}^1; \underline{\mu}_\alpha) \geq 1 - \underline{\mu}_\alpha \left\{ \underline{\alpha} \mid \underline{Q}^1 \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \quad \forall \underline{v} \text{ C.A.}$$

Les formules valables dans le cas d'un système soumis de façon déterministe à plusieurs chargements s'obtiennent à partir des précédents en s'appuyant sur (4.5) et (5.11) : celles correspondant à l'approche par l'extérieur par les vitesses sont évidemment les plus simples.

#### 7.3.4 - SYSTÈME A CHARGEMENT ET DIMENSIONNEMENT ALÉATOIRES

---

♦ approche par l'intérieur par les contraintes

Sans qu'il soit nécessaire d'insister on a :

$$(7.39) \quad p_s(\underline{\mu}_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) = \underline{\mu}_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}^{(K)} \geq \underline{\mu}_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}^{(A)} \quad \forall A \subset K$$

Pour  $\underline{\sigma}$  statiquement admissible dans le mode, quelconque, on définit dans  $\{\underline{Q}\} \times \{\underline{\alpha}\}$  :

$$(7.40) \quad A(\underline{\sigma}) = \left\{ (\underline{Q}, \underline{\alpha}) \mid \underline{\sigma} \in L^{-1}(\underline{Q}) \cap H(\underline{\alpha}) \right\}$$

(il n'est jamais vide), d'où la formule :

$$(7.41) \quad K = \bigcup_{\underline{\sigma} \text{ S.A.}} A(\underline{\sigma})$$

et :

$$(7.42) \quad p_s(\underline{\mu}_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) \geq \underline{\mu}_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}^{[A(\underline{\sigma})]} \quad \forall \underline{\sigma} \text{ S.A.}$$

♦ approche par l'extérieur par les vitesses

Il vient immédiatement :

$$(7.43) \quad p_s(\underline{\mu}_{\underline{Q}, \underline{\alpha}}) \leq \underline{\mu}_{\underline{Q}, \underline{\alpha}} \left[ \bigcap_{\underline{v} \text{ C.A.}} \left\{ (\underline{Q}, \underline{\alpha}) \mid \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \right]$$

et

$$(7.44) \quad p_s(\underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}}) \leq \underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}} \left\{ (Q,\underline{\alpha}) \mid \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \quad \forall \underline{v} \text{ C.A.}$$

♦ pour les probabilités de ruine :

$$(7.45) \quad p_r(\underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}}) \leq 1 - \underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}}(A) \quad \forall A \subset K$$

$$(7.46) \quad p_r(\underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}}) = 1 - \underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}} \left[ \bigcup_{\underline{\sigma} \text{ S.A.}} A(\underline{\sigma}) \right]$$

$$(7.47) \quad p_r(\underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}}) \leq 1 - \underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}}[A(\underline{\sigma})] \quad \forall \underline{\sigma} \text{ S.A.}$$

$$(7.48) \quad p_r(\underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}}) \geq 1 - \underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}} \left[ \bigcap_{\underline{v} \text{ C.A.}} \left\{ (Q,\underline{\alpha}) \mid \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \right]$$

$$(7.49) \quad p_r(\underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}}) \geq 1 - \underline{\mu}_{Q,\underline{\alpha}} \left\{ (Q,\underline{\alpha}) \mid \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{v}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{P}(\underline{v}) \leq 0 \right\} \quad \forall \underline{v} \text{ C.A.}$$

#### 7.3.5 - COMMENTAIRES

-----

L'écriture répétitive des formules précédentes pour chaque cas de système peut sembler fastidieuse et superflue, notamment en ce qui concerne les formules relatives aux probabilités de ruine conséquences évidentes de celles obtenues pour les probabilités de stabilité. Nous l'avons toutefois donnée car elle correspond à la vision du problème sous ses différents aspects: "contraintes" ou "vitesses" d'un côté, "stabilité" ou "ruine" de l'autre. Certaines approches, "contraintes-stabilité" ou "vitesses-ruine" semblent plus naturelles que d'autres ; la seconde a été souvent utilisée par les chercheurs. La présentation de l'ensemble des formules nous a donc paru de nature à faciliter le travail du lecteur soucieux de situer avec précision les expressions proposées par les uns et les autres.

#### 7.4 - DOMAINES DE CONFIANCE

##### 7.4.1 - SYSTÈME A CHARGEMENT DÉTERMINISTE

##### ET DIMENSIONNEMENT ALÉATOIRE

On a vu ci-dessus aux § 7.2.3 et 7.3.3 comment il est possible de définir et de calculer la probabilité de stabilité d'un système dont le dimensionnement est aléatoire, sous un chargement donné.

L'idée qui préside à l'introduction des *domaines de confiance* est de coter les chargements par la probabilité de stabilité qui leur correspond.

Pour cela, suivant Augusti et Baratta (1972), on considère dans l'espace  $\{Q\}$ , pour un niveau de probabilité  $u$  ( $0 \leq u \leq 1$ ), l'ensemble des chargements pour lesquels le système dont le dimensionnement est aléatoire défini par  $\underline{\mu}_\alpha$ , a une probabilité de stabilité supérieure ou égale à  $u$  : ce domaine de confiance sera noté  $K(\underline{\mu}_\alpha, u)$  et sa définition s'exprime par :

$$(7.50) \quad K(\underline{\mu}_\alpha, u) = \left\{ Q \mid p_s(Q; \underline{\mu}_\alpha) \geq u \right\} .$$

Il est utile de donner la construction de  $K(\underline{\mu}_\alpha, u)$  en fonction des  $K(\underline{\alpha})$  qui se traduit par :

$$(7.51) \quad K(\underline{\mu}_\alpha, u) = \bigcup_{\substack{A \subset \{\underline{\alpha}\} \\ \underline{\mu}_\alpha(A) \geq u}} \left[ \bigcap_{\underline{\alpha} \in A} K(\underline{\alpha}) \right] ,$$

formule dont la démonstration <sup>(1)</sup> s'appuie sur les relations évidentes, conséquences des définitions de  $K(\underline{\alpha})$  et  $\Delta(Q)$  :

$$(7.52) \quad \underline{Q} \in \bigcap_{\underline{\alpha} \in \Delta(Q)} K(\underline{\alpha}) \quad , \quad \underline{\alpha} \in \bigcap_{\underline{Q} \in K(\underline{\alpha})} \Delta(Q)$$

La formule (7.51) permet d'énoncer la propriété suivante, conséquence de celle relative aux  $K(\underline{\alpha})$  :

*si les  $G_j(\underline{x})$  sont étoilés de centre 0,  $K(\underline{\mu}_{\underline{\alpha}}, u)$  est étoilé de centre 0.*

Par contre, si les  $G_j(\underline{x})$  sont convexes, il n'en résulte pas que  $K(\underline{\mu}_{\underline{\alpha}}, u)$  soit nécessairement convexe (ou se reportera à (Carmasol, 1983) pour un contre-exemple simple).

La formule (7.51) permet également d'obtenir sans difficulté des approches de  $K(\underline{\mu}_{\underline{\alpha}}, u)$  :

- par l'intérieur en s'appuyant sur (7.32) ,
- par l'extérieur en s'appuyant sur (7.33) ;

à noter que ces dernières aboutissent toujours à un domaine convexe contenant  $K(\underline{\mu}_{\underline{\alpha}}, u)$ .

<sup>(1)</sup> En effet (Carmasol, 1983) :

$$\diamond \underline{Q} \in K(\underline{\mu}_{\underline{\alpha}}, u) \iff \underline{\mu}_{\underline{\alpha}}[\Delta(Q)] \geq u,$$

donc, d'après (7.52), il existe  $A \subset \{\underline{\alpha}\}$  tel que  $\underline{Q} \in \bigcap_{\underline{\alpha} \in A} K(\underline{\alpha})$   
 $\underline{\mu}_{\underline{\alpha}}(A) \geq u$

(il suffit de poser  $\Delta(Q) = A$ ).

♦ D'autre part :

$$\underline{Q} \in \bigcup_{A \subset \{\underline{\alpha}\}} \left[ \bigcap_{\underline{\alpha} \in A} K(\underline{\alpha}) \right] \iff \exists A \subset \{\underline{\alpha}\} \text{ tel que } \underline{\mu}_{\underline{\alpha}}(A) \geq u \text{ et } \underline{Q} \in \bigcap_{\underline{\alpha} \in A} K(\underline{\alpha})$$

$$\underline{\mu}_{\underline{\alpha}}(A) \geq u$$

d'où  $A \subset \Delta(Q)$  et donc  $\underline{\mu}_{\underline{\alpha}}[\Delta(Q)] \geq u$ , ce qui prouve que  $\underline{Q} \in K(\underline{\mu}_{\underline{\alpha}}, u)$ .

7.4.2 - SYSTÈME A CHARGEMENT ALÉATOIRE

ET DIMENSIONNEMENT DÉTERMINISTE

Pour un système dont le dimensionnement est déterministe et dont le chargement est aléatoire défini par  $\mu_Q$ , on introduit de manière analogue dans l'espace  $\{\alpha\}$  le domaine de confiance relatif au niveau de probabilité  $u$  ( $0 \leq u \leq 1$ ) : c'est l'ensemble des dimensionnements pour lesquels la probabilité de stabilité du système sous le chargement aléatoire est supérieure ou égale à  $u$ . On le désigne par  $\Delta(\mu_Q, u)$  :

$$(7.53) \quad \Delta(\mu_Q, u) = \left\{ \alpha \mid p_s(\mu_Q; \alpha) \geq u \right\},$$

qui se construit à partir des  $\Delta(Q)$  par la formule :

$$(7.54) \quad \Delta(\mu_Q, u) = \bigcup_{A \subset \{Q\}} \left[ \bigcap_{Q \in A} \Delta(Q) \right] \\ \mu_Q(A) \geq u$$

dont la démonstration s'appuie sur (7.52) et est analogue à celle de (7.51).

La formule (7.54) permet d'énoncer la propriété suivante, conséquence de celle relative aux  $\Delta(Q)$  :

si les  $G_j(\underline{x})$  sont étoilés de centre 0,  $\Delta(\mu_Q, u)$  vérifie :

$$(7.55) \quad \alpha \in \Delta(\mu_Q, u) \Rightarrow \alpha' \in \Delta(\mu_Q, u) \quad \forall \alpha' \geq \alpha.$$

Par contre si les  $G_j(\underline{x})$  sont convexes il n'en résulte pas que  $\Delta(\mu_Q, u)$  soit nécessairement convexe.

La formule (7.54) conduit aussi aux approches de  $\Delta(\mu_Q, u)$  :

- par l'intérieur à partir de (7.27),
- par l'extérieur à partir de (7.18),

ces dernières aboutissent toujours à un domaine convexe contenant  $\Delta(\mu_Q, u)$ .

Les domaines  $\Delta(\mu_Q, u)$  présentent du point de vue pratique dans le cas du chargement aléatoire, la même utilité que les domaines  $\Delta(Q)$  dans le cas du chargement déterministe : ils permettent en effet de dimensionner le système en se référant à un critère de choix concrétisé par la minimisation d'une fonction économique ; il est clair que dans ce cas, en raison du caractère aléatoire du chargement il est nécessaire de se fixer en quelque sorte un "niveau de sécurité" pour le dimensionnement recherché : celui-ci peut être représenté par le niveau de probabilité  $u$  dans  $\Delta(\mu_Q, u)$ .

Il reste à signaler que d'autres notions introduites en théorie déterministe du calcul à la rupture et du dimensionnement sont susceptibles d'une approche probabiliste ; on en trouvera des exemples dans le travail de Carmasol (1983). Ainsi en va-t-il notamment du coefficient de rupture. Des théorèmes ont aussi été démontrés concernant le système "moyen" (système dont le dimensionnement est l'espérance mathématique du dimensionnement aléatoire).

*chapitre V*

*Problèmes plans de  
Calcul à la rupture*

---

## 1 - INTRODUCTION

---

On se propose de montrer comment la résolution de certains problèmes de calcul à la rupture pour le milieu continu tridimensionnel peut être ramenée à celle de problèmes de calcul à la rupture sur le modèle "milieu continu bidimensionnel", posés par simple modification de la dimension de l'espace suivant un formalisme strictement identique à celui exposé au chapitre I.

Il est clair que cette réduction de 3 à 2 de la dimension de l'espace, conduisant à l'étude de *problèmes plans de calcul à la rupture*, aura des conséquences simplificatrices importantes dans l'application pratique des méthodes d'approche par l'intérieur et par l'extérieur de l'ensemble des chargements potentiellement supportables ; tant pour la construction de champs de contrainte statiquement admissibles que pour celle de champs de vitesse cinématiquement admissibles, le nombre de fonctions scalaires inconnues est réduit, ainsi que celui des variables : ceci permet l'utilisation de méthodes analytiques ou numériques efficaces, aboutissant à des résultats intéressants.

Il convient d'ailleurs de dire que la majorité des problèmes de calcul à la rupture pour le milieu continu qui ont été traités, l'ont été comme problèmes plans. Les solutions véritablement tridimensionnelles sont très rares et, en règle générale, relativement rustiques.

Deux types principaux de problèmes de calcul à la rupture pour le milieu tridimensionnel peuvent être ramenés à des problèmes plans ; on les désignera par : "problèmes de calcul à la rupture en *contrainte plane*" et "problèmes de calcul à la rupture en *déformation plane*". Cette terminologie choisie pour la commodité peut se révéler trompeuse ; en fait, il va de soi que le problème posé sur le milieu continu tridimensionnel, n'est pas en lui-même "en contrainte plane" ou en "déformation plane" ; ce sera l'objet de ce chapitre que de mettre en évidence comment des hypothèses sont faites *a priori* dans la résolution, basées sur la forme des données (géométrie, chargement, capacités de résistance), qui permettent de se ramener aux problèmes plans, et quelles interprétations peuvent être données *a posteriori* aux résultats obtenus pour le problème plan relativement au problème initial tridimensionnel correspondant.

Dans sa rédaction ce chapitre rompt avec la forme que nous avons adoptée en règle générale où un exemple est d'abord présenté sur lequel sont introduits les concepts étudiés dans la suite ; il peut en résulter une plus grande difficulté à la première lecture, d'autant que, afin de ne pas aboutir à un texte de longueur excessive, certaines étapes de raisonnement n'ont parfois été que signalées.

On trouvera au chapitre VI des exemples de problèmes plans de calcul à la rupture, traités du point de vue tridimensionnel ou en appliquant la théorie du calcul à la rupture en déformation plane ; la lecture de ces exemples pourra éclairer les considérations présentées ici.

La présentation précise que nous avons choisie ici n'est sans doute pas indispensable au lecteur soucieux seulement d'une première information sur ces problèmes, il nous a paru par contre souhaitable de mettre à la disposition du chercheur une base de raisonnement solide.

---

 2 - CONTRAINTE PLANE ET CAPACITÉS DE RÉSISTANCE
 

---

 2.1 - TENSEUR DES CONTRAINTES PLAN
 

---

 2.1.1 - DÉFINITION
 

---

Dans toute la suite les axes Ox, Oy, Oz sont orthonormés. On dit que l'état de contrainte en un point  $\underline{x}$  est plan parallèlement à Oxy si le tenseur contrainte  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  y satisfait les conditions :

$$(2.1) \quad \sigma_{xz}(\underline{x}) = \sigma_{yz}(\underline{x}) = \sigma_{zz}(\underline{x}) = 0$$

 2.1.2 - CAPACITÉS DE RÉSISTANCE DU MATÉRIAU EN CONTRAINTE PLANE
 

---

Soit  $G(\underline{x})$  le domaine de  $\mathbb{R}^6$  qui définit les capacités de résistance du matériau au point  $\underline{x}$ . Si l'on se restreint à ne considérer en  $\underline{x}$  que les tenseurs contraintes plans parallèlement à Oxy, c'est-à-dire satisfaisant (2.1), on est amené à introduire au point  $\underline{x}$  un domaine  $G_c^{(x,y)}(\underline{x})$  de  $\mathbb{R}^3$ , déduit de  $G(\underline{x})$ , et qui permettra de définir les capacités de résistance du matériau en contrainte plane parallèlement à Oxy :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}_2(\underline{x}) \in G_c^{(x,y)}(\underline{x}) \subset \mathbb{R}^3 \iff \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \subset \mathbb{R}^6 \\ \text{avec :} \end{array} \right.$$

$$(2.3) \quad \underline{\hat{\sigma}}(\underline{x}) = \left| \begin{array}{c|c} \underline{\hat{\sigma}}_2(\underline{x}) & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline 0 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \right|$$

où le symbole  $\hat{\cdot}$  désigne la matrice des composantes du tenseur correspondant dans les axes (Ox, Oy, Oz) ou (Ox, Oy) suivant la dimension de l'espace.

Il est clair que ce domaine  $G_c^{(x,y)}(\underline{x})$  n'est autre que la trace de  $G(\underline{x})$  sur le sous-espace de  $\mathbb{R}^6$ , de dimension 3, défini par (2.1). Il possède dans  $\mathbb{R}^3$  les propriétés homologues de celles de  $G(\underline{x})$  dans  $\mathbb{R}^6$  (chap. I § 2.2.3) :

- Lorsque  $G(\underline{x})$  est étoilé de centre 0 (cas général) :

$$0 \in G_c^{(x,y)}(\underline{x})$$

$$G_c^{(x,y)}(\underline{x}) \text{ est étoilé de centre } 0$$

- si  $G(\underline{x})$  est convexe dans  $\mathbb{R}^6$ , alors :

$$G_c^{(x,y)}(\underline{x}) \text{ est convexe dans } \mathbb{R}^3.$$

Si l'on caractérise  $G(\underline{x})$  par un critère  $f[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})]$  comme indiqué au chapitre I (§ 3.4.), on peut de façon semblable caractériser  $G_c^{(x,y)}(\underline{x})$  par un critère  $f_c^{(x,y)}[\underline{x}; \underline{\sigma}_2(\underline{x})]$  obtenu de la façon suivante :

$$(2.4) \quad f_c^{(x,y)}[\underline{x}; \underline{\sigma}_2(\underline{x})] = f[\underline{x}; \underline{\sigma}(\underline{x})]$$

où  $\underline{\sigma}_2(\underline{x})$  et  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  sont liés par (2.3).

Pour le domaine  $G_c^{(x,y)}(\underline{x})$  dans  $\mathbb{R}^3$  on peut, de la même manière qu'au chapitre I (§ 4.5.), définir la fonction  $\pi_c^{(x,y)}[\underline{x}; \cdot]$  sur les tenseurs  $\underline{d}_2(\underline{x})$  symétriques sur  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire  $\underline{d}_2(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3$ , par :

$$(2.5) \quad \pi_c^{(x,y)}[\underline{x}; \underline{d}_2(\underline{x})] = \text{Sup} \left\{ \underline{\sigma}_2(\underline{x}) : \underline{d}_2(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}_2(\underline{x}) \in G_c^{(x,y)}(\underline{x}) \right\}$$

Cette fonction possède vis-à-vis de  $G_c^{(x,y)}(\underline{x})$  les mêmes propriétés que  $\pi[\underline{x}; \cdot]$  vis-à-vis de  $G(\underline{x})$  :

- elle est positive
- elle est positivement homogène de degré 1
- elle est convexe de  $\underline{d}_2(\underline{x})$ .

Si  $G_c^{(x,y)}(\underline{x})$  est convexe (et donc en particulier si  $G(\underline{x})$  est convexe),  $\pi_c^{(x,y)}[\underline{x}; \cdot]$  est la fonction d'appui de  $G_c^{(x,y)}(\underline{x})$ .

Sinon,  $\pi_c^{(x,y)}[\underline{x}; \cdot]$  est la fonction d'appui de l'enveloppe convexe de  $G_c^{(x,y)}(\underline{x})$  soit  $[G_c^{(x,y)}(\underline{x})]^{co}$ ; cette dernière n'est autre évidemment que la trace de l'enveloppe convexe de  $G(\underline{x})$  sur le sous-espace défini par (2.1).

## 2.2 - CHAMP DE CONTRAINTE PLANE

Considérant un solide tridimensionnel  $V$ , de forme cylindrique parallèlement à  $Oz$  et d'épaisseur  $l$ , on dit que  $\underline{\sigma}$  est un champ de contrainte plane parallèlement à  $(Oxy)$  dans  $V$ , si :

1° l'état de contrainte est plan selon  $(Oxy)$  en tout point, c'est-à-dire : (2.1) est satisfait,  $\forall \underline{x} \in V$  ;

2° le champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  est indépendant de  $z$  :

$$(2.6) \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial z} = 0$$

Alors,

■ Les équations indéfinies de l'équilibre quasi-statique pour un tel champ de contrainte s'écrivent :

$$(2.7) \quad \text{div}_2 \underline{\sigma}_2 + \rho \underline{F}_2 = 0$$

$$(2.8) \quad F_z = 0$$

où  $\text{div}_2$  désigne la divergence à droite dans l'espace  $Oxy(\mathbb{R}^2)$ ,  $\underline{\sigma}_2$  est défini en chaque point par la relation (2.3),  $\underline{F}_2$  désigne la partie bidimensionnelle dans le plan  $Oxy$ , de composantes  $F_x$  et  $F_y$ , de la force masse  $\underline{F}$ .

Ainsi un tel champ de contrainte ne peut être en équilibre quasi-statique que si les forces de volume  $\rho \underline{F}$  sont :

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{parallèles au plan Oxy,} \\ \text{indépendantes de la coordonnée z.} \end{array} \right.$$

■ De même, en se référant à la définition donnée ci-dessus du champ de contrainte plane, on voit que les conditions aux limites en contraintes s'écrivent nécessairement sous la forme suivante :

en désignant par  $T_{\lambda}^d$  la composante du vecteur contrainte donnée suivant l'axe  $\lambda^{(1)}$ ,

$$(2.10) \quad T_{\lambda}^d = 0 \text{ (s'il y a lieu c'est-à-dire si } T_{\lambda} \text{ est donnée)} \\ \lambda = 1, 2, 3, \text{ sur les facettes de "base", parallèles à Oxy.}$$

$$(2.11) \quad T_3^d = 0 \text{ (s'il y a lieu, c'est-à-dire si } T_z \text{ est donnée)} \\ \text{sur les facettes "latérales", parallèles à Oz.}$$

$$(2.12) \quad \sigma_{2ij} \cdot n_{2j} = T_{2i}^d \quad \text{(s'il y a lieu, c'est-à-dire si } T_{\lambda} \text{ est donnée),} \\ \lambda = 1, 2, \text{ sur ces mêmes facettes latérales dont} \\ \text{la normale est parallèle à Oxy et donc de la} \\ \text{forme : } \tilde{n}_2 = (\tilde{n}, 0).$$

Ainsi, un tel champ de contrainte ne peut être en équilibre qu'avec des données aux limites sur les contraintes satisfaisant les conditions suivantes :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{être nulles sur les "bases"} \\ \text{être parallèles au plan Oxy sur les facettes latérales et y être indé-} \\ \text{pendantes de z.} \end{array} \right.$$

(<sup>1</sup>)  $\lambda = 3$  correspond à la composante selon Oz,  $\lambda = 1, 2$  aux composantes selon deux axes orthonormés dans Oxy.

---

### 3 - CONTRAINTE PLANE EN CALCUL A LA RUPTURE

---

#### 3.1 - LE TYPE DE PROBLÈMES ÉTUDIÉ

On s'intéresse aux problèmes de Calcul à la rupture pour un système en milieu tridimensionnel, dont les données sont de la forme suivante :

##### 3.1.1. - GÉOMÉTRIE

Système  $V$  de forme cylindrique tel que défini au § 2.2. On désigne par  $V_2$  la trace du système dans le plan  $Oxy$  et par  $\underline{x}_2$  le vecteur position dans ce plan (figure 1).

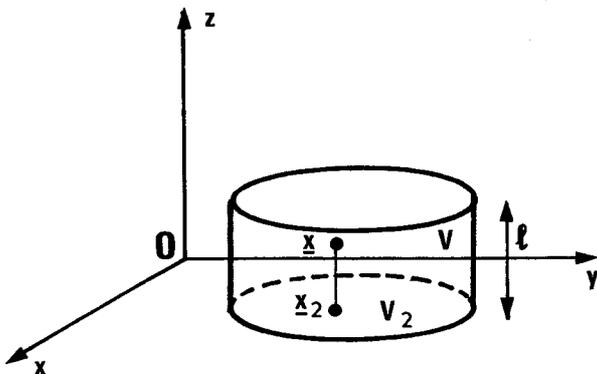


Figure 1 - Système mécanique pour l'étude des problèmes de Calcul à la rupture en contrainte plane.

##### 3.1.2. - MODE DE CHARGEMENT

Le système  $V$  est soumis à un mode de chargement dépendant de  $n$  paramètres comme défini au chapitre I (§ 2.2.2.) et possédant de plus les propriétés suivantes :

- les données aux limites sur les "bases" du cylindre  $V$  (parallèles à  $Oxy$ ) portent exclusivement sur les contraintes et respectent (2.13) ; autrement dit :

*les "bases" sont libres de contrainte*

- les forces de masse dans le volume respectent la condition (2.9) :

*elles sont parallèles à  $Oxy$  et indépendantes de  $z$ .*

■ Les données aux limites sur les facettes latérales sont *indépendantes* de  $z$

et elles imposent la nullité de  $T_z$  en tout point (ceci implique que  $V_z$  n'y est jamais donnée).

### 3.1.3. - CAPACITÉS DE RÉSISTANCE

---

Les capacités de résistance sont supposées homogènes selon  $Oz$ ,  $G(\underline{x})$  n'étant ainsi fonction que de  $x$  et  $y$ , soit :

$$(3.1) \quad G(\underline{x}) \equiv G(\underline{x}_2)$$

### 3.2 - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR DE $K$ AU MOYEN DE CHAMPS DE CONTRAINTE PLANE

---

Il est clair que sous ces hypothèses on peut utiliser, pour l'approche par l'intérieur du domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables pour le système  $V$ , des *champs de contrainte plane* parallèlement à  $Oxy$ , statiquement admissibles et respectant la condition de résistance.

Un tel champ  $\underline{\sigma}$ , dont les propriétés caractéristiques ont été données au § 2.2, sera construit à partir d'un champ de contrainte "bidimensionnel"  $\underline{\sigma}_2$  sur  $Oxy$ , de la façon suivante :

en chaque point  $\underline{x}$  de  $V$  on a :

$$(3.2) \quad \underline{\hat{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\hat{\sigma}}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \underline{\hat{\sigma}}_2(x, y) & 0 \\ \text{-----} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\hat{\sigma}}_2(\underline{x}_2) & 0 \\ \text{-----} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

où le champ  $\underline{\sigma}_2$ , fonction de  $\underline{x}_2$  seulement, doit satisfaire les équations déjà écrites :

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_2 \underline{\sigma}_2 + \rho \underline{F}_2 = 0 \\ \sigma_{2ij} \cdot n_{2j} = T_{2i}^d \end{array} \right.$$

équations *bidimensionnelles* qui assurent le caractère statiquement admissible de  $\underline{\sigma}$  dans le mode de chargement indiqué pour  $V$  ;

et :

$$(3.4) \quad \underline{\sigma}_2(\underline{x}_2) \in G_c^{(x,y)}(\underline{x}_2) \quad \forall \underline{x}_2 \in V_2$$

qui assure que  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  satisfait la condition de résistance dans  $V$ .

On explore ainsi, en construisant l'ensemble des champs bidimensionnels  $\underline{\sigma}_2$  sur  $Oxy$  satisfaisant (3.3 et 3.4), l'ensemble des champs de contrainte plane parallèlement à  $Oxy$ , statiquement admissibles dans le mode indiqué et respectant la condition de résistance pour  $V$  : soit  $H_c^{(x,y)} \subset H$ . On obtient alors, dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  des paramètres de chargement de  $V$ , un ensemble  $K_c^{(x,y)}$ , approche par l'intérieur du domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables pour  $V$ .

### 3.3 - CHARGEMENTS POTENTIELLEMENT SUPPORTABLES POUR LE SYSTÈME $V_2$

---

#### 3.3.1. - MODE DE CHARGEMENT HOMOLOGUE POUR LE SYSTÈME $V_2$

---

Comme on l'a remarqué, les équations (3.3) et (3.4) sont bidimensionnelles : elles apparaissent comme les homologues bidimensionnelles des équations d'équilibre et de la condition de résistance pour le milieu continu tridimensionnel.

Cela incite à considérer le système bidimensionnel  $V_2$  dans l'espace à deux dimensions  $Oxy$ , système construit dans le même formalisme que celui du milieu continu tridimensionnel <sup>(1)</sup>.

Il convient alors de définir, pour ce système, le mode de chargement homologue de celui du système  $V$  décrit au § 3.1 :

---

<sup>(1)</sup> En précisant que l'on choisit, pour le milieu continu bidimensionnel, de conserver au tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}_2$  les mêmes dimensions que pour le milieu continu tridimensionnel : en conséquence les vecteurs-contraintes  $\underline{T}_2$  et densités de forces de volume  $\rho \underline{F}_2$  conservent aussi les mêmes dimensions, tandis que les forces correspondantes exercées au contour ou à l'intérieur de  $V_2$  ont la dimension d'une force par unité de longueur (selon  $Oz$ ).

■ les densités de forces de volume aux points  $\underline{x}_2$  de  $V_2$  sont celles définies pour le système  $V$  (qui sont parallèles à  $Oxy$  et ne dépendent que de  $x$  et  $y$ ).

■ Les données aux limites au contour de  $V_2$  sont celles définies pour le système  $V$  sur les facettes latérales, sans la condition " $T_z = 0$ " qui n'a pour  $V_2$  aucune signification ; ce sont des conditions qui ne dépendent que de  $x$  et  $y$  et portent sur  $\underline{T}_2$  vecteur-contrainte bidimensionnel et  $\underline{v}_2$  vecteur-vitesse bidimensionnel.

Il s'agit pour  $V_2$  d'un mode de chargement dépendant de  $n$  paramètres (même nombre que pour  $V$ ).

Ce résultat est intuitif si l'on remarque que la puissance des forces extérieures dans l'expression du principe des puissances virtuelles pour  $V$ , ne fait ici intervenir aucune contribution pour les bases parallèles à  $Oxy$ , et pour le reste est composée, compte tenu de l'indépendance des données vis-à-vis de  $z$ , de termes produits où apparaissent des intégrales séparées par rapport à  $z$ . Plus précisément, introduisons les notations suivantes qui prolongent celles du chapitre I § 2.2.2. [voir aussi (Salençon et Halphen, 1981)].

$S_2$  : ensemble des champs de contrainte statiquement admissibles dans le mode de chargement pour  $V_2$ .

$A_2$  : ensemble des champs d'autocontrainte dans le mode de chargement pour  $V_2$ .

$[\underline{\sigma}_2]_c^{(x,y)}$  : champ tridimensionnel de contrainte plane parallèlement à  $Oxy$ , défini à partir d'un champ bidimensionnel  $\underline{\sigma}_2$  par la relation (3.2).

$[S_2]_c^{(x,y)}$  : ensemble des champs de contrainte plane parallèlement à  $Oxy$ , statiquement admissibles dans le mode de chargement pour  $V$  ; on a :

$$[S_2]_c^{(x,y)} \subset S$$

$[A_2]_c^{(x,y)}$  : ensemble des champs de contrainte plane parallèlement à  $Oxy$ , qui sont d'autocontrainte dans le mode de chargement pour  $V$  ; on a :

$$[A_2]_c^{(x,y)} = A \cap [S_2]_c^{(x,y)}$$

Soit  $\underline{g} \in S$  quelconque ; on construit alors un champ bidimensionnel  $\underline{g}_2 \in S_2$  possédant les propriétés suivantes :

■ champ statiquement admissible dans le mode de chargement pour  $V_2$  pour les données homologues de celles correspondant à  $\underline{g}$ , c'est-à-dire : mêmes valeurs des forces de volume  $\rho \underline{F}_2$ , et des données aux limites là où elles portent sur une (ou deux) composante de la contrainte  $\underline{T}_2$  au contour de  $V_2$ ,  $T_{ij}^d$  ( $i = 1$  et-ou  $2$ ).

■ et tel que sur le reste du contour de  $V_2$ , c'est-à-dire là où les données dans le mode de chargement pour  $V_2$  portent sur une (ou deux) composante de la vitesse  $\underline{v}_2$ , la (ou les) composante de la contrainte  $\underline{T}_2$  en un point  $\underline{x}_2$  soit égale à la moyenne par rapport à  $z$  de la valeur donnée par le champ  $\underline{g}$  au long de la génératrice passant par  $\underline{x}_2$  ; soit :

$$T_{2ij}(\underline{x}_2) = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \sigma_{ij}(\underline{x}_2, z) n_j(\underline{x}_2) dz \quad \begin{array}{l} i = 1 \text{ et-ou } 2 \\ j = 1, 2 \end{array}$$

Un tel champ défini par la donnée des forces de volume en tout point de  $V_2$  et par la donnée des deux composantes de  $\underline{T}_2$  en tout point du contour de  $V_2$  existe bien car l'équilibre global de  $V_2$  est assuré par ces données (en conséquence de l'équilibre de  $V$  dans le champ  $\underline{g}$ ).

Alors il est clair que l'on a :

$$(3.5) \quad \underline{g} = [\underline{g}_2]_c^{(x,y)} + \underline{g}$$

avec :

$$(3.6) \quad \underline{g} \in A ;$$

il suffit, pour vérifier ce résultat, d'écrire la puissance de  $\underline{g}$  et de  $[\underline{g}_2]_c^{(x,y)}$  dans un même champ  $\underline{v} \in C$ , quelconque, et d'appliquer le principe des puissances virtuelles pour se ramener à la puissance des forces extérieures correspondantes : on montre ainsi que les puissances de  $\underline{g}$  et  $[\underline{g}_2]_c^{(x,y)}$  sont égales ce qui implique le résultat annoncé.

On a alors :

$$\dim (S/A) = \dim \frac{[S_2]_c^{(x,y)}}{[S_2]_c^{(x,y)} \cap A} \equiv \dim \frac{[S_2]_c^{(x,y)}}{[A_2]_c^{(x,y)}}$$

Compte tenu du § 3.2,  $[S_2]_c^{(x,y)}$  est isomorphe à  $S_2$  ; quant à  $[A_2]_c^{(x,y)}$  on voit sans difficulté qu'il est isomorphe à  $A_2$  <sup>(1)</sup>. Il en résulte que :

$$(3.7) \quad \dim (S/A) = \dim (S_2/A_2).$$

En se reportant à la définition donnée au chapitre I (§ 2.2.2.) d'un mode de chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres, la formule (3.7) prouve que le mode de chargement homologue défini pour  $V_2$  dépend du même nombre de paramètres, soit  $n$ , que le mode de chargement de  $V$ .

Il est évidemment possible de choisir le vecteur-chargeement  $Q_2$  de  $V_2$  en sorte que l'on ait :

$$(3.8) \quad Q [a_2]_c^{(x,y)} = Q_2(a_2), \quad \forall a_2 \in S_2$$

et même, plus précisément, que chaque composante de  $Q$  dans (3.8) soit identique à la composante homologue de  $Q_2$  :

$$(3.9) \quad Q_j [a_2]_c^{(x,y)} = Q_{2j}(a_2),$$

les paramètres de chargements de  $V$  et  $V_2$  sont alors identifiés.

(1) On a évidemment :  $a_2 \in A_2 \Rightarrow [a_2]_c^{(x,y)} \in [A_2]_c^{(x,y)}$  ;

réciproquement :  $[a_2]_c^{(x,y)} \in [A_2]_c^{(x,y)} \Rightarrow a_2 \in A_2$  ; il suffit pour le vérifier d'exprimer la nullité de la puissance de  $[a_2]_c^{(x,y)}$  dans les champs  $\underline{y} \in C$  et indépendants de  $z$ .

3.3.2. - Ensemble des chargements potentiellement supportables pour  $V_2$

---

En appliquant la méthode d'approche par l'intérieur, l'ensemble  $K_2$  des chargements potentiellement supportables par  $V_2$  dans le mode de chargement homologue défini ci-dessus, et avec le domaine de résistance :

$$(3.10) \quad G_2(\underline{x}_2) = G_c^{(x,y)}(\underline{x}_2)$$

peut être construit en explorant l'ensemble  $H_2$  des champs de contrainte  $\underline{\sigma}_2$  vérifiant :

$$(3.11) \quad \underline{\sigma}_2 \in S_2$$

et

$$(3.12) \quad \underline{\sigma}_2(\underline{x}_2) \in G_2(\underline{x}_2) \quad \forall \underline{x}_2 \in V_2$$

La condition (3.11) signifie que  $\underline{\sigma}_2$  doit satisfaire les équations d'équilibre dans le volume et au contour pour le milieu continu bidimensionnel, c'est-à-dire les équations (3.3). La condition (3.12), compte tenu de (3.10), est identique à (3.4). Les vecteurs-chargeurs ayant été choisis selon (3.8), il en résulte alors :

$$(3.13) \quad K_2 \equiv K_c^{(x,y)} \subset K.$$

Ainsi : le domaine des chargements potentiellement supportables pour  $V_2$ , dans le mode de chargement homologue, avec le domaine de résistance  $G_c^{(x,y)}(\underline{x}_2)$  est identique à l'approche par l'intérieur du domaine des chargements potentiellement supportables pour  $V$ , construite en explorant l'ensemble des champs de contrainte plane parallèlement à Oxy, statiquement admissibles, et respectant le domaine de résistance  $G(\underline{x}_2)$ .

### 3.4. APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR DE $K_2 \equiv K_c^{(x,y)}$

Pour le solide bidimensionnel  $V_2$  le domaine  $K_2$  peut, en application de la théorie générale du chapitre I (§ 4.2.), être approché par l'extérieur au moyen de champs de vitesse. Compte tenu de l'identité (3.13) ceci fournit donc une méthode d'approche par l'extérieur de  $K_c^{(x,y)}$ , lui-même approché par l'intérieur du domaine  $K$  pour  $V$ .

Pour se faire, on a alors à considérer des champs de vitesse *bidimensionnels*  $\underline{v}_2$ , fonctions de  $\underline{x}_2$ , cinématiquement admissibles dans le mode de chargement homologue qui a été défini pour  $V_2$  au § 3.3.1.

Un tel champ de vitesse doit satisfaire les conditions aux limites sur les vitesses au contour de  $V_2$  : conditions identiques à celles imposées aux champs de vitesse tridimensionnels cinématiquement admissibles sur les facettes latérales de  $V$  puisque celles-ci, d'après le § 3.1., ne portent jamais sur  $v_z$ . Il peut comporter des discontinuités : à la traversée d'une ligne  $L$  tracée dans  $Oxy$ , orientée par la normale  $\underline{n}_2(\underline{x}_2)$  au point  $\underline{x}_2$ , on notera  $\underline{v}_2(\underline{x}_2) = \llbracket \underline{v}_2(\underline{x}_2) \rrbracket$  la discontinuité éventuelle en  $\underline{x}_2$ . On remarquera que le champ de vitesse de déformation bidimensionnel  $\underline{d}_2$  dérivé d'un tel champ, satisfait l'unique condition de compatibilité géométrique bidimensionnelle :

$$(3.14) \quad d_{2_{xx,yy}} + d_{2_{yy,xx}} - 2d_{2_{xy,xy}} = 0.$$

On a alors à calculer pour le champ  $\underline{v}_2$  l'expression  $P_2(\underline{v}_2)$ , homologue de celle écrite dans le cas du milieu tridimensionnel, soit :

$$(3.15) \quad P_2(\underline{v}_2) = \int_{V_2} \pi_2[\underline{x}_2 ; \underline{d}_2(\underline{x}_2)] dV_2 + \int_L \pi_2[\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \underline{v}_2(\underline{x}_2)] dL$$

et la puissance des forces extérieures :  $Q_2 \cdot \dot{Q}_2(\underline{v}_2)$ .

A ce propos on notera les points suivants :

■ La fonction  $\pi_2[\underline{x}_2 ; \cdot]$  n'est autre que la fonction  $\pi_c^{(x,y)}[\underline{x}_2 ; \cdot]$  définie au § 2.1 à partir du domaine  $G_c^{(x,y)}(\underline{x}_2) \equiv G_2(\underline{x}_2)$ .

■ Pour la fonction  $\pi_2[\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \cdot]$  : on l'obtient à partir de la précédente de la même manière que dans le cas tridimensionnel. Ainsi en décomposant  $\underline{V}_2(\underline{x}_2)$  en ses composantes  $u_{2n}(\underline{x}_2)$  et  $u_{2t}(\underline{x}_2)$  selon la normale  $\underline{n}_2(\underline{x}_2)$  et la tangente  $\underline{t}_2(\underline{x}_2)$  à la ligne L, et en introduisant le tenseur  $\underline{D}_2[\underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \underline{V}_2(\underline{x}_2)]$  dont la matrice des composantes dans ces axes  $[\underline{n}_2(\underline{x}_2), \underline{t}_2(\underline{x}_2)]$  est :

$$(3.16) \quad \hat{\underline{D}}[\underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \underline{V}_2(\underline{x}_2)] = \begin{vmatrix} u_{2n}(\underline{x}_2) & \frac{1}{2} u_{2t}(\underline{x}_2) \\ \frac{1}{2} u_{2t}(\underline{x}_2) & 0 \end{vmatrix}$$

on a :

$$(3.17) \quad \pi_2[\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \underline{V}_2(\underline{x}_2)] \equiv \pi_c^{(x,y)} \left\{ \underline{x}_2 ; \underline{D}_2[\underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \underline{V}_2(\underline{x}_2)] \right\}$$

On peut remarquer que dans le cas où le matériau constitutif de V est transversalement isotrope autour de Oz,  $G_c^{(x,y)}$  correspond alors à un matériau bidimensionnel isotrope. Cela implique que le critère  $f_c^{(x,y)}[\underline{x}_2 ; \underline{g}_2(\underline{x}_2)]$  est une fonction *symétrique* des deux contraintes principales  $\sigma_1(\underline{x}_2)$  et  $\sigma_2(\underline{x}_2)$ . On définit alors la "courbe intrinsèque de contrainte plane" dans le plan de Mohr ( $\sigma, \tau$ ) comme l'enveloppe convexe des cercles de Mohr de diamètre  $\sigma_1 \sigma_2$  lorsque  $\sigma_1(\underline{x}_2)$  et  $\sigma_2(\underline{x}_2)$  sont liées par la relation  $f_c^{(x,y)}[\underline{x}_2 ; \underline{g}_2(\underline{x}_2)] = 0$ . On peut montrer que  $\pi_2[\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \cdot]$  n'est autre que la fonction d'appui du domaine limité par la "courbe intrinsèque de contrainte plane".

La figure 2 représente dans le cas des critères de Tresca et de von Mises, dans le plan de Mohr, en traits tiretés le lieu des sommets de cercles de Mohr limites (c'est-à-dire tels que  $f_c^{(x,y)} = 0$ ), et en traits pleins la partie réelle de

l'enveloppe de ces cercles. En effet l'enveloppe convexe des cercles de Mohr limites n'est en règle générale que partiellement réelle (Hill, 1950 ; Mandel et Parsy, 1961). Cette circonstance est d'ailleurs à l'origine des difficultés plus grandes rencontrées dans la résolution des problèmes de Calcul à la rupture en contrainte plane, par rapport à celle des problèmes en déformation plane présentés dans la suite : en effet, la méthode connue sous le nom de "Théorie des équilibres limites plans", basée sur l'utilisation de la méthode des caractéristiques, ne peut être employée que dans les zones où la solution qu'elle permet de construire correspond en chaque point  $\underline{x}_2$  à un cercle de Mohr tangent à la partie réelle de l'enveloppe (Hill, 1950 ; Mandel, 1942).

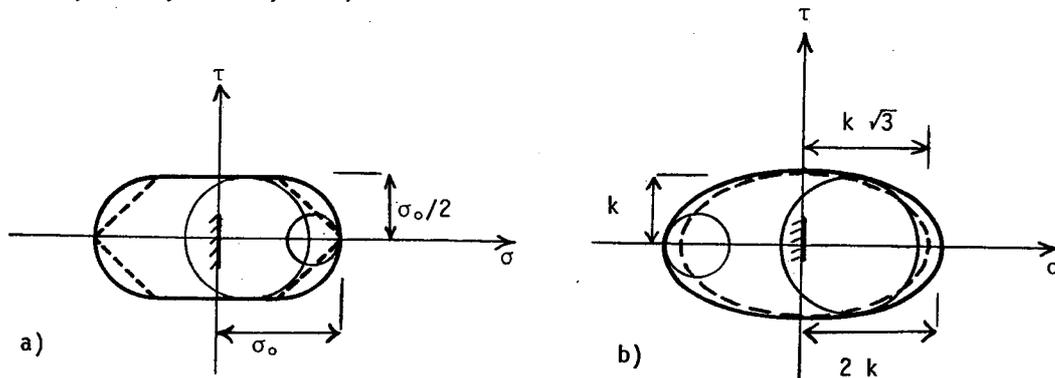


Figure 2 : Courbes intrinsèques de contrainte plane :

a) Critère de Tresca

b) Critère de von Mises

■ Le domaine  $G(\underline{x}_2)$  est toujours borné puisqu'il s'agit en fait de  $G_c^{(x,y)}(\underline{x}_2)$ , domaine de résistance en contrainte plane, construit à partir de  $G(\underline{x}_2)$  comme il a été dit au § 2.1.2. Il en résulte que  $P_2(\underline{v}_2)$  est finie  $\forall \underline{v}_2$ , c'est-à-dire que tout champ de vitesse  $\underline{v}_2$  tel que  $\dot{q}_2(\underline{v}_2) \neq 0$  conduit à un résultat non trivial : aucune condition n'est imposée par  $\pi_2(\underline{x}_2 ; \cdot)$  ou  $\pi_2[\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \cdot]$  sur  $\underline{d}_2(\underline{x}_2)$  ou  $\underline{V}_2(\underline{x}_2)$ .

### 3.5 - SOLUTIONS COMPLÈTES BIDIMENSIONNELLES

---

Aux paragraphes précédents ont été évoquées les deux approches du domaine  $K_2$ , par la construction de champs de contrainte  $\underline{\sigma}_2$  ou de champs de vitesse  $\underline{v}_2$ , et on a montré que ce domaine  $K_2$  constitue lui-même une approche par l'intérieur,  $K_c^{(x,y)}$ , du domaine  $K$  relatif au système tridimensionnel  $V$  vis-à-vis du critère  $G(\underline{x}_2)$ . L'approche par l'intérieur de  $K_2$  conserve donc ce même caractère vis-à-vis de  $K$ , par contre on ne peut rien affirmer concernant l'approche par l'extérieur de  $K_2$ : une approximation par l'extérieur de  $K_2$  peut évidemment être intérieure à  $K$ .

La combinaison des deux approches peut conduire, comme indiqué dans la présentation générale au chapitre I (§ 5.1), à la détermination de chargements extrêmes pour  $V_2$ :

sil'on met en évidence

d'une part  $\underline{\sigma}_2 \in H_2$  équilibrant  $Q_2$ ,

d'autre part  $\underline{v}_2$ , cinématiquement admissible, tel que

$$(3.18) \quad Q_2 \cdot \dot{q}_2(\underline{v}_2) = P_2(\underline{v}_2),$$

alors  $Q_2$  est chargement extrême pour  $V_2$  et les champs  $\underline{\sigma}_2$  et  $\underline{v}_2$  sont associés vis-à-vis de  $G_2(\underline{x}_2) \equiv G_c^{(x,y)}(\underline{x}_2)$  comme indiqué au chapitre I (§ 5.2).  $\underline{\sigma}_2$ , et  $\underline{v}_2$  constituent une solution complète pour le système bidimensionnel  $V_2$ .

### 3.6 - SOLUTIONS COMPLÈTES TRIDIMENSIONNELLES

---

Compte tenu de la forme particulière du problème étudié (cf § 3.1) qui a conduit à axer l'approche statique sur la construction de champs de contrainte plane, et à introduire le système bidimensionnel  $V_2$  dont on étudie les chargements potentiellement supportables vis-à-vis du critère de résistance correspondant à la

contrainte plane, il est tentant de penser que le domaine  $K_2 \equiv K_c^{(x,y)}$  est identique au domaine  $K$  pour  $V$ . Il va de soi qu'une réponse positive concernant cette conjecture renforcerait considérablement l'intérêt de la construction de  $K_2$ .

Cette question n'est, en toute rigueur, presque jamais évoquée ; soit que l'identité entre  $K_2$  et  $K$  soit implicitement admise, soit que l'on se place délibérément du point de vue du milieu continu bidimensionnel sans se préoccuper de sa réalité physique.

On se propose ici de l'aborder par l'étude des solutions complètes tridimensionnelles, de la façon suivante :

supposant  $Q_2$  chargement extrême pour  $V_2$  obtenu par le moyen d'une solution complète  $(\underline{\sigma}_2, \underline{v}_2)$ , est-il possible de construire une solution complète  $(\underline{\sigma}, \underline{v})$  montrant ainsi que  $Q_2$  est aussi chargement extrême pour  $V$  ?

■ Pour le champ de contrainte : on rappelle que d'après les théorèmes d'association et d'unicité du chapitre I (§ 5.2 et 5.3) la solution complète, si elle est constructible, l'est avec n'importe quel champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  statiquement admissible équilibrant  $Q_2$  et respectant la condition de résistance. On pourra ici utiliser le champ  $\underline{\sigma} = [\underline{\sigma}_2]_c^{(x,y)}$ .

■ Pour les vitesses : il s'agit de construire un champ de vitesse tridimensionnel  $\underline{v}$  tel que son champ de vitesse de déformation  $\underline{d}$ , et ses discontinuités de vitesse soient en tout point associées au champ  $[\underline{\sigma}_2]_c^{(x,y)}$  vis-à-vis de  $G(\underline{x}_2)$ .

Connaissant ici  $\underline{v}_2$  on peut penser, pour construire  $\underline{v}$ , à la méthode suivante :

en chaque point  $\underline{x}$  la vitesse  $\underline{v}(\underline{x})$  sera obtenue en adjoignant aux composantes connues de  $\underline{v}_2(\underline{x}_2)$ , une troisième composante  $v_z(\underline{x})$  à déterminer en sorte de satisfaire la condition d'association.

Ceci conduit à déterminer, en chaque point  $\underline{x}_2$  de  $V_2$ , le tenseur  $\underline{d}(\underline{x}_2)$  associé à  $[\underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)]_c^{(x,y)}$  relativement à  $G(\underline{x}_2)$  et dont la partie bidimensionnelle (relative à  $Oxy$ ) est  $\underline{d}_2(\underline{x}_2)$ . On obtient ainsi un champ tridimensionnel  $\underline{d}$ , qui ne dépend que de  $\underline{x}_2$ , et qui doit être intégré pour déterminer

v. D'où la première difficulté de la méthode car l'intégrabilité de  $\underline{d}$  n'est en règle générale pas assurée hors de Oxy.

D'autre part en les points  $\underline{x}_2$  où  $\underline{v}_2$  est discontinu on introduit le tenseur  $\underline{D}_2[\underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \underline{V}_2(\underline{x}_2)]$  à partir duquel il est également possible de déterminer un tenseur  $\underline{D}(\underline{x}_2)$  tridimensionnel associé à  $[\underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)]_c^{(x,y)}$  relativement à  $G(\underline{x}_2)$  et dont la partie bidimensionnelle est  $\underline{D}_2[\underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \underline{V}_2(\underline{x}_2)]$ . On doit alors construire la discontinuité de vitesse *tridimensionnelle*  $\underline{V}$ , correspondante, qui doit se produire à la traversée d'une surface  $\Sigma$  de normale  $\underline{n}(\underline{x})$  confondue avec  $\underline{n}_2(\underline{x}_2)$ . Ceci se révèle en général impossible.

La méthode présentée est valable dans *l'hypothèse des tranches minces*. En effet cette hypothèse permet, comme pour les problèmes de contrainte plane en élasticité linéaire classique (cf. Mandel, 1966), de laisser de côté les équations de compatibilité transversales et de ne prendre en compte que la condition relative au plan Oxy : le champ  $\underline{d}$  est alors intégrable. De plus, en ce qui concerne la discontinuité de vitesse, on a alors affaire à un problème tel qu'étudié par Hill (1952) sous le nom de "contrainte plane généralisée" dans lequel on admet que, compte tenu de la faible épaisseur du système  $V$  considéré, il n'y a pas incompatibilité entre les hypothèses faites pour la construction de  $\underline{V}$  et des surfaces de discontinuité non parallèles à Oz.

En conclusion, dans *l'hypothèse des tranches minces*, un chargement extrême pour  $V_2$  déterminé au moyen d'une solution complète est également chargement extrême pour  $V$ .

---

 4 - DÉFORMATION PLANE ET CAPACITÉS DE RÉSISTANCE
 

---

 4.1 - TENSEUR "VITESSE DE DÉFORMATION" PLAN
 

---

 4.1.1 - DÉFINITION
 

---

On dit que la vitesse de déformation en un point  $\underline{x}$  est plane parallèlement à Oxy <sup>(1)</sup> si le tenseur  $\underline{d}(\underline{x})$ , vitesse de déformation, satisfait les conditions :

$$(4.1) \quad d_{xz}(\underline{x}) = d_{yz}(\underline{x}) = d_{zz}(\underline{x}) = 0$$

La matrice d'un tel tenseur dans les axes Ox, Oy, Oz, est alors de la forme :

$$(4.2) \quad \underline{\hat{d}}(\underline{x}) = \begin{vmatrix} \hat{d}_2(\underline{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

 4.1.2 - CAPACITÉS DE RÉSISTANCE DU MATÉRIAU "EN DÉFORMATION PLANE"
 

---

Soit  $G(\underline{x})$  le domaine de  $\mathcal{G}^6$  qui définit les capacités de résistance du matériau au point  $\underline{x}$ . Soit  $\pi[\underline{x}; \cdot]$  la fonction définie au chapitre I (§ 4.5) pour ce domaine :

$$(4.3) \quad \pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})] = \text{Sup} \left\{ \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \right\}$$

on sait que cette fonction est la fonction d'appui de l'enveloppe convexe  $[G(\underline{x})]^{co}$  de  $G(\underline{x})$ .

---

<sup>(1)</sup> Comme aux paragraphes précédents, les axes Ox, Oy, Oz sont orthonormés.

Si l'on se restreint à ne considérer que des tenseurs vitesses de déformation plans parallèlement à Oxy, c'est-à-dire dont la matrice a la forme (4.2), on est amené à introduire à partir de la fonction  $\pi[\underline{x}; \cdot]$  une fonction analogue portant sur les tenseurs symétriques bidimensionnels (éléments de  $\mathfrak{R}^3$ ) notés  $\underline{d}_2(\underline{x})$  définie par :

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_D^{(x,y)}[\underline{x}; \underline{d}_2(\underline{x})] = \pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})] \\ \text{avec } \underline{d}(\underline{x}) \text{ défini par (4.2)}. \end{array} \right.$$

Il est clair que cette fonction  $\pi_D^{(x,y)}(\underline{x}; \cdot)$  possède sur  $\mathfrak{R}^3$  les mêmes propriétés que  $\pi(\underline{x}; \cdot)$  sur  $\mathfrak{R}^6$  ; elle est :

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{positive} \\ \text{positivement homogène de degré 1} \\ \text{convexe} \end{array} \right. .$$

De plus, en désignant par  $\underline{\sigma}_2(\underline{x})$  la partie bidimensionnelle relativement à Oxy d'un tenseur  $\underline{\sigma}(\underline{x})$ , en sorte que l'on a :

$$(4.6) \quad \underline{\hat{\sigma}}(\underline{x}) = \left| \begin{array}{cc|c} \underline{\hat{\sigma}}_2(\underline{x}) & & \sigma_{xz} \\ & & \sigma_{yz} \\ \hline \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{array} \right|$$

on voit que (4.4) s'écrit :

$$(4.7) \quad \pi_D^{(x,y)}[\underline{x}; \underline{d}_2(\underline{x})] = \text{Sup} \left\{ \underline{\sigma}_2(\underline{x}) : \underline{d}_2(\underline{x}) \mid \underline{\sigma}_2(\underline{x}) \in G_p^{(x,y)}(\underline{x}) \right\}$$

où  $G_p^{(x,y)}(\underline{x})$  désigne la projection de  $G(\underline{x}) \subset \mathfrak{R}^6$  sur le sous-espace  $\mathfrak{R}^3$  des tenseurs bidimensionnels symétriques sur Oxy.  $G_p^{(x,y)}(\underline{x})$  possède évidemment les mêmes propriétés que  $G(\underline{x})$  :

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_p^{(x,y)}(\underline{x}) \text{ contient } 0 \\ G_p^{(x,y)}(\underline{x}) \text{ est étoilé de centre } 0 \text{ ;} \\ G_p^{(x,y)}(\underline{x}) \text{ est convexe si } G(\underline{x}) \text{ est convexe.} \end{array} \right.$$

La formule (4.7) montre que  $\pi_D^{(x,y)}[\underline{x}; \cdot]$  est la fonction d'appui de l'enveloppe convexe de  $G_p^{(x,y)}(\underline{x})$ . Cette dernière, qui seule interviendra dans la suite, sera notée  $G_D^{(x,y)}(\underline{x})$ ; il va de soi que  $G_D^{(x,y)}(\underline{x})$  est aussi la projection de l'enveloppe convexe de  $G(\underline{x})$ .

Par une analogie de langage commode avec le cas de la contrainte plane (§ 2.1.2), on dira que  $G_D^{(x,y)}(\underline{x})$  définit les *capacités de résistance du matériau en déformation plane parallèlement à Oxy*. Cette terminologie est évidemment abusive car la notion de capacités de résistance telle que nous l'avons présentée porte exclusivement sur les efforts subis par l'élément de matière, hors de toute considération de déformation et il ne peut donc être question, à proprement parler, d'évoquer les capacités de résistance dans un type de déformation donné; ceci est d'ailleurs cohérent avec le fait que l'on ne peut, dans cet esprit, parvenir qu'à la connaissance de  $G_D^{(x,y)}(\underline{x})$ , enveloppe convexe de  $G_p^{(x,y)}(\underline{x})$ .

On désignera par  $f_D^{(x,y)}[\underline{x}; \underline{a}_2(\underline{x})]$  un critère caractérisant  $G_D^{(x,y)}(\underline{x})$  dans l'espace  $\mathcal{R}^3$  des tenseurs bidimensionnels symétriques, comme indiqué au chapitre I (§ 3.4); il sera abusivement appelé "critère de résistance en déformation plane"; il pourra évidemment être choisi convexe.

#### 4.2 - CHAMP DE VITESSE EN DÉFORMATION PLANE

Considérant un solide tridimensionnel  $V$  de forme cylindrique parallèlement à  $Oz$  et d'épaisseur  $\ell$ , on dit que  $\underline{v}$  est un champ de vitesse en déformation plane parallèlement à  $Oxy$  dans  $V$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_z = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

ainsi, en chaque point  $\underline{x}$  de  $V$  le tenseur vitesse de déformation est plan parallèlement à  $Oxy$ , et le champ  $\underline{v}$  est indépendant de  $z$ .

Réciproquement soit  $\underline{d}$  un champ de tenseurs symétriques tridimensionnels plans parallèlement à Oxy c'est-à-dire de la forme (4.2), et indépendants de z, les conditions de compatibilité géométrique pour qu'un tel champ soit un champ de vitesse de déformation (plane), c'est-à-dire soit intégrable, se réduisent à l'équation unique :

$$(4.10) \quad d_{2_{xx,yy}} + d_{2_{yy,xx}} - 2d_{2_{xy,xy}} = 0 .$$

où  $\hat{d}_2(\underline{x})$  est définie en chaque point par (4.2).

En ce qui concerne les conditions aux limites, un champ de vitesse en déformation plane ne peut être compatible qu'avec des données possédant les propriétés suivantes <sup>(1)</sup> :

$$(4.11) \quad v_3^d = 0 \quad \text{s'il y a lieu, c'est-à-dire là où } v_3 \text{ est donnée}$$

$$(4.12) \quad v_{\dot{\lambda}} = v_{\dot{\lambda}}^d \quad \text{indépendant de } z, \text{ s'il y a lieu c'est-à-dire là où } v_{\dot{\lambda}} \text{ est donnée } (\dot{\lambda} = 1 \text{ et-ou } 2) : \text{ en particulier les données sur } v_{\dot{\lambda}} \text{ doivent être identiques sur les deux bases parallèles à Oxy en des points homologues, ainsi qu'au long des génératrices des facettes latérales de } S.$$

---

<sup>(1)</sup>  $\dot{\lambda} = 3$  correspond à la composante selon Oz,  $\dot{\lambda} = 1, 2$  aux composantes suivant deux axes orthonormés dans Oxy.

---

 5 - DÉFORMATION PLANE EN CALCUL A LA RUPTURE
 

---

 5.1 - LE TYPE DE PROBLÈMES ÉTUDIÉ
 

---

On s'intéresse aux problèmes de Calcul à la rupture pour un système en milieu continu tridimensionnel, dont les données sont de la forme suivante :

 1° Géométrie
 

---

Système  $V$  de forme cylindrique tel que défini au § 4.2.  $V_2$  est la trace du système dans le plan  $Oxy$  et  $\underline{x}_2$  le vecteur-position dans ce plan (fig. 3).

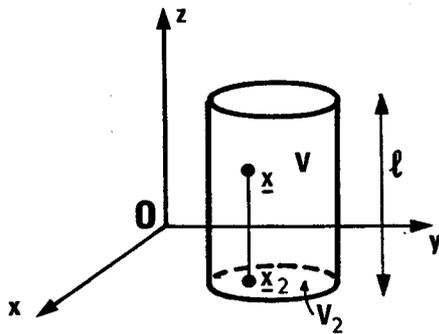


Figure 3 : Système mécanique pour l'étude des problèmes de Calcul à la rupture en déformation plane.

 2° Mode de chargement
 

---

Le système  $V$  est soumis à un mode de chargement dépendant de  $n$  paramètres comme défini au chapitre I (§ 2.2.2) et possédant de plus les propriétés suivantes :

- Les données aux limites sur les "bases" du cylindre (parallèles à Oxy) sont de la forme :

$$(5.1) \quad v_3 = v_3^d = 0$$

et :

$$(5.2) \quad \begin{cases} \sigma_{31} = T_1^d = 0 \\ \sigma_{32} = T_2^d = 0 \end{cases} ,$$

qui respectent bien (4.11).

- Les données aux limites sur les facettes latérales sont *indépendantes* de  $z$  ; de plus, elles imposent en tout point du contour de  $V$  :

$$(5.3) \quad \begin{cases} \text{soit } v_z = 0 \\ \text{soit } T_z = 0 \end{cases} .$$

- Les forces de masse sont *indépendantes* de  $z$  et telles que  $\rho F_3 = 0$ .

### 3° Capacités de résistance

Les capacités de résistance sont supposées homogènes selon Oz,  $G(\underline{x})$  n'étant ainsi fonction que de  $x$  et  $y$ , soit :

$$(5.4) \quad G(\underline{x}) \equiv G(\underline{x}_2) .$$

### 5.2 - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR DE K AU MOYEN DE CHAMPS DE VITESSE EN DÉFORMATION PLANE

Il est clair que sous ces hypothèses on peut utiliser pour l'approche par l'extérieur du domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables pour le système  $V$ , des *champs de vitesse en déformation plane parallèlement à Oxy*, cinématiquement admissibles.

Un tel champ  $\underline{v}$  dont les propriétés caractéristiques ont été données au § 4.2, sera construit à partir d'un champ de vitesse "bidimensionnel"  $\underline{v}_2$  sur Oxy, de la façon suivante :

en chaque point  $\underline{x}$  de V on a :

$$(5.5) \quad \hat{\underline{v}}(\underline{x}) = \hat{\underline{v}}(x,y,z) = [v_x(x,y), v_y(x,y), 0] = [\hat{\underline{v}}_2(\underline{x}_2), 0]$$

où le champ  $\underline{v}_2$ , fonction de  $\underline{x}_2$  seulement, doit satisfaire les conditions aux limites :

$$(5.6) \quad v_{2i} = v_i^d, \quad i = 1 \text{ et-ou } 2, \quad \text{là où } v_i \text{ est donnée}$$

équations bidimensionnelles qui assurent le caractère cinématiquement admissible de  $\underline{v}$  dans le mode de chargement indiqué pour V.

On explore ainsi, en construisant l'ensemble des champs bidimensionnels  $\underline{v}_2$  sur Oxy satisfaisant (5.6), l'ensemble des champs de vitesse en déformation plane cinématiquement admissibles dans le mode indiqué. Ceci permet d'obtenir dans l'espace  $\mathcal{R}^n$  des paramètres de chargement de V, un ensemble  $K_D^{(x,y)}$  proche par l'extérieur du domaine K des chargements potentiellement supportables pour V :

$$(5.7) \quad K_D^{(x,y)} = \underset{\underline{v}_2}{\cap} \left\{ \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) - P(\underline{v}) \leq 0 \mid \underline{v} \text{ défini par (5.5) sous (5.6)} \right\}$$

Rappelons que dans cette formule on a :

$$(5.8) \quad P(\underline{v}) = \int_V \pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} \pi \left\{ \underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket \right\} d\Sigma$$

$\Sigma$  désignant les éventuelles surfaces de discontinuité du champ  $\underline{v}$ . On utilise alors les résultats suivants :

- $\underline{v}$  étant un champ de vitesse en déformation plane défini à partir de  $\underline{v}_2$ , et  $G(\underline{x})$  ne dépendant que de  $\underline{x}$ , la première intégrale dans (5.8) s'écrit, en se reportant à (4.4) :

$$(5.9) \quad \int_V \pi[\underline{x} ; \underline{d}(\underline{x})] dV = \ell \int_V \pi_D^{(x,y)}[\underline{x}_2 ; \underline{d}_2(\underline{x}_2)] dV_2$$

■ Pour la seconde, on remarque que les surfaces de discontinuité de vitesse,  $\Sigma$ , sont en raison du mode de construction de  $\underline{v}$ , nécessairement cylindriques parallèlement à  $Oz$  ; la normale  $\underline{n}(\underline{x})$  à  $\Sigma$  en  $\underline{x}$  est identique à la normale à  $L$  section de  $\Sigma$  par  $Oxy$ , en  $\underline{x}_2$  projection de  $\underline{x}$ . La deuxième intégrale de (5.8) s'écrit ainsi :

$$(5.10) \quad \int_{\Sigma} \pi\{\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}) \rrbracket\} d\Sigma = \ell \int_L \pi\{\underline{x}_2, \underline{n}(\underline{x}_2) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}_2) \rrbracket\} dL$$

■ L'intégrale au deuxième membre de (5.10) porte, comme au premier membre, sur la fonction définie au chapitre I (§4.2 et 4.5) pour les discontinuités de vitesse, vis-à-vis du domaine de résistance "tridimensionnel"  $G(\underline{x}_2)$ . Ici, puisque  $\llbracket \underline{v}(\underline{x}_2) \rrbracket$  est contenue dans  $Oxy$  et a lieu à la traversée d'une surface de normale parallèle à  $Oxy$ , on montre par le même raisonnement que celui du § 4.1.2 que  $\pi\{\underline{x}_2, \underline{n}(\underline{x}_2) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}_2) \rrbracket\}$  peut être obtenue à partir du "domaine de résistance en déformation plane" :

avec la notation de (4.6) on a en effet ici :

$$\begin{aligned} \pi\{\underline{x}_2, \underline{n}(\underline{x}_2) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}_2) \rrbracket\} &= \\ &= \text{Sup} \left\{ \llbracket \underline{v}(\underline{x}_2) \rrbracket \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}_2) \cdot \underline{n}(\underline{x}_2) \mid \underline{\sigma}(\underline{x}_2) \in G(\underline{x}_2) \right\} \\ &= \text{Sup} \left\{ \llbracket \underline{v}_2(\underline{x}_2) \rrbracket \cdot \underline{\sigma}_2(\underline{x}_2) \cdot \underline{n}_2(\underline{x}_2) \mid \underline{\sigma}_2(\underline{x}_2) \in G_p^{(x,y)}(\underline{x}_2) \right\} \end{aligned}$$

où  $\underline{n}_2(\underline{x}_2)$  est la normale "bidimensionnelle" à  $L$  dans  $Oxy$  en  $\underline{x}_2$ .

On peut ainsi écrire :

$$(5.11) \quad \pi\{\underline{x}_2, \underline{n}(\underline{x}_2) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}_2) \rrbracket\} = \pi_D^{(x,y)}\{\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \llbracket \underline{v}_2(\underline{x}_2) \rrbracket\} .$$

■ Cette fonction peut être obtenue à partir de  $\pi_D^{(x,y)}\{\underline{x}_2; \cdot\}$  de la même façon que dans le cas tridimensionnel (cf. § 3.4 et chapitre I § 4.5.2) :

$$\pi_D^{(x,y)}\{\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2); \underline{V}_2(\underline{x}_2)\} = \pi_D^{(x,y)}\{\underline{x}_2; \underline{D}_2[\underline{n}_2(\underline{x}_2); \underline{V}_2(\underline{x}_2)]\}$$

En particulier si le matériau constitutif de  $V$  est transversalement isotrope autour de  $Oz$ ,  $G_D^{(x,y)}(\underline{x}_2)$  correspond à un matériau bidimensionnel isotrope ainsi que  $G_D^{(x,y)}(\underline{x}_2)$ ; le critère  $f_D^{(x,y)}[\underline{x}_2; \underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)]$  est une fonction symétrique des deux contraintes principales  $\sigma_1(\underline{x}_2)$  et  $\sigma_2(\underline{x}_2)$  du tenseur bidimensionnel  $\underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)$ ; on peut alors définir la "courbe intrinsèque de déformation plane" dans le plan de Mohr  $(\sigma, \tau)$ : c'est l'enveloppe des cercles de diamètre  $\sigma_1, \sigma_2$  lorsque  $\sigma_1(\underline{x}_2)$  et  $\sigma_2(\underline{x}_2)$  sont liées par la relation  $f_D^{(x,y)}[\underline{x}_2; \underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)] = 0$ . On montre que  $\pi_D^{(x,y)}[\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2); \cdot]$  est la fonction d'appui du convexe limité par la "courbe intrinsèque de déformation plane" dans le plan de Mohr.

En se reportant au mode de construction de  $G_D^{(x,y)}(\underline{x})$  à partir de  $G(\underline{x})$ , et donc de  $f_D^{(x,y)}[\underline{x}; \cdot]$ , on vérifie l'identité de la "courbe intrinsèque de déformation plane" telle qu'elle vient d'être définie et telle qu'elle avait été introduite au § 4.6.2 du chapitre I <sup>(1)</sup>; la terminologie adoptée alors se trouve ici justifiée. On remarquera de plus que si le domaine  $G(\underline{x})$  est caractérisé par un critère convexe du type "courbe intrinsèque", la "courbe intrinsèque de déformation plane" est identique à la courbe intrinsèque proprement dite.

---

<sup>(1)</sup> En fait l'équation  $f_D^{(x,y)}[\underline{x}; \underline{\sigma}_2(\underline{x})] = 0$  fournit la relation entre les valeurs principales extrêmes des tenseurs  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  pour lesquels le grand cercle de Mohr est maximal, c'est-à-dire est tangent à l'enveloppe convexe des grands cercles de Mohr sous la condition  $\underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x})$ .

### 5.3 - CHARGEMENTS POTENTIELLEMENT SUPPORTABLES

#### POUR LE SYSTÈME $V_2$

##### 5.3.1 - MODE DE CHARGEMENT HOMOLOGUE POUR LE SYSTÈME $V_2$

La construction des champs de vitesse en déformation plane, cinématiquement admissibles dans le mode de chargement pour  $V$ , repose comme on l'a vu sur la construction de champs de vitesse bidimensionnels satisfaisant certaines conditions aux limites. Pour ces champs  $\underline{v}$  le calcul de  $P(\underline{v})$  ne fait appel qu'à la fonction  $\pi_D^{(x,y)}[\underline{x}; \cdot]$  qui se réfère au domaine  $G_D^{(x,y)}(\underline{x}_2)$ .

Cela incite, comme au § 3.3, pour la contrainte plane, à considérer le système bidimensionnel  $V_2$  dans l'espace à deux dimensions  $Oxy$ , système construit selon le formalisme du milieu continu.

Il convient alors de définir, pour ce système, le mode de chargement homologue de celui du système  $V$  décrit au § 5.1 :

- les densités de forces de volume aux points  $\underline{x}_2$  de  $V_2$  sont celles définies pour le système (parallèles à  $Oxy$  et ne dépendant que de  $\underline{x}_2$ ).
- les données aux limites au contour de  $V_2$  sont celles définies pour  $V$  sur les facettes latérales, sans la condition " $v_z = 0$  ou  $T_z = 0$ " qui n'a pour  $V_2$  aucune signification : conditions ne dépendant que de  $\underline{x}_2$  et portant sur  $\underline{T}_2$  et  $\underline{v}_2$ .

Il s'agit pour  $V_2$  d'un mode de chargement à  $n$  paramètres (même nombre que pour  $V$ ).

Ce résultat est intuitif comme dans le cas de la contrainte plane : contribution nulle pour les bases dans la puissance des forces extérieures qui est composée de termes produits où interviennent des intégrales par rapport à  $z$ . La démonstration, analogue à celle donnée au § 3.3.1, utilise les notations suivantes qui prolongent celles du chapitre I § 2.2.2. [voir aussi (Salençon et Halphen, 1981)].

- $C_2$  : ensemble des champs de vitesse cinématiquement admissibles dans le mode de chargement pour  $V_2$   
 $D_2$  : ensemble des champs de vitesse d'autodéformation dans le mode de chargement pour  $V_2$   
 $[\underline{v}_2]_D^{(x,y)}$  : champ tridimensionnel de vitesse en déformation plane parallèlement à  $Oxy$ , défini à partir de  $\underline{v}_2$  par la relation (5.5)  
 $[C_2]_D^{(x,y)}$  : ensemble des champs de vitesse en déformation plane parallèlement à  $Oxy$ , cinématiquement admissibles dans le mode de chargement pour  $V$   
 $[D_2]_D^{(x,y)}$  : ensemble des champs de vitesse en déformation plane parallèlement à  $Oxy$ , qui sont d'autodéformation dans le mode de chargement pour  $V$  :

$$[D_2]_D^{(x,y)} = D \cap [C_2]_D^{(x,y)} .$$

Soit alors  $\underline{v} \in C$  quelconque : on construit un champ bidimensionnel  $\underline{v}_2 \in C_2$  possédant les propriétés suivantes :

- champ cinématiquement admissible dans le mode de chargement pour  $V_2$  pour les données homologues de celles correspondant à  $\underline{v}$  : mêmes valeurs des données aux limites là où elles portent sur une ou deux composantes de  $\underline{v}_2$  au contour de  $V_2$ ,
- et tel que sur le reste du contour de  $V_2$ , c'est-à-dire là où les données aux limites portent sur une (ou deux) composante de  $\underline{T}_2$ , la (ou les) composante correspondante de  $\underline{v}_2$  soit égale à la moyenne par rapport à  $z$  de la valeur donnée par le champ  $\underline{v}$  au long de la génératrice passant par  $\underline{x}_2$  :

$$v_{2i} = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} v_i(\underline{x}_2, z) dz \quad i = 1 \text{ et-ou } 2$$

Il est clair que l'on a :

$$(5.12) \quad \underline{v} = [\underline{v}_2]_D^{(x,y)} + \underline{v}^*$$

avec :

$$(5.13) \quad \underline{v}^* \in D$$

il suffit pour vérifier ce résultat d'écrire la puissance dans  $\underline{v}$  et  $[\underline{v}_2]_D^{(x,y)}$  d'un même champ  $\underline{g} \in S$ , quelconque, et d'appliquer le principe des puissances virtuelles pour se ramener à la puissance des forces extérieures correspondantes : on montre ainsi que les puissances dans  $\underline{v}$  et  $[\underline{v}_2]_D^{(x,y)}$  sont égales ce qui implique le résultat annoncé. On a donc :

$$\dim(C/D) = \dim \frac{[C_2]_D^{(x,y)}}{[C_2]_D^{(x,y)} \cap D} = \dim \frac{[C_2]_D^{(x,y)}}{[D_2]_D^{(x,y)}} ;$$

compte tenu du § 5.2,  $[C_2]_D^{(x,y)}$  est isomorphe à  $C_2$  ; de même <sup>(1)</sup>  $[D_2]_D^{(x,y)}$  est isomorphe à  $D_2$ . D'où :

$$(5.14) \quad \dim(C/D) = \dim(C_2/D_2),$$

ce qui prouve selon la définition donnée au chapitre I (§ 2.2.2) que le mode de chargement homologue défini pour  $V_2$  dépend de  $n$  paramètres comme le mode de chargement de  $V$ .

Il est évidemment possible de choisir le vecteur "vitesse de déformation"  $\dot{\underline{q}}_2$  de  $V$  en sorte que l'on ait :

$$(5.15) \quad \dot{\underline{q}} \left( [\underline{v}_2]_D^{(x,y)} \right) = \ell \dot{\underline{q}}_2(\underline{v}_2), \quad \forall \underline{v}_2 \in C_2$$

et même, plus précisément que pour chaque composante on ait :

$$\dot{\underline{q}}_j \left( [\underline{v}_2]_D^{(x,y)} \right) = \ell \dot{\underline{q}}_{2j}(\underline{v}_2) .$$

---

<sup>(1)</sup> On a évidemment :  $\underline{v}_2 \in D_2 \implies [\underline{v}_2]_D^{(x,y)} \in [D_2]_D^{(x,y)}$  ; réciproquement  $[\underline{v}_2]_D^{(x,y)} \in [D_2]_D^{(x,y)} \implies \underline{v}_2 \in D_2$  comme on le voit en exprimant la nullité la puissance dans  $[\underline{v}_2]_D^{(x,y)}$  des champs  $\underline{g} \in S$  et indépendants de  $z$ .

5.3.2 - ENSEMBLE DES CHARGEMENTS POTENTIELLEMENT SUPPORTABLES POUR  $V_2$

---

En appliquant la méthode d'approche par l'extérieur, l'ensemble  $K$  des chargements potentiellement supportables pour  $V_2$  dans le mode de chargement homologue défini ci-dessus, et avec le domaine de résistance.

$$(5.16) \quad G_2(\underline{x}_2) = G_D^{(x,y)}(\underline{x}_2)$$

peut être construit <sup>(1)</sup> en explorant l'ensemble  $C_2$  des champs de vitesse  $\underline{v}_2$  cinématiquement admissibles, par la formule :

$$(5.17) \quad K_2 = \bigcap_{\underline{v}_2 \in C_2} \left\{ \underline{Q}_2 \cdot \dot{\underline{q}}_2(\underline{v}_2) - P_2(\underline{v}_2) \leq 0 \right\}$$

dans laquelle :

$$(5.18) \quad P(\underline{v}_2) = \int_{V_2} \pi_2[\underline{x}_2 ; \underline{d}_2(\underline{x}_2)] dV_2 + \int_L \pi_2[\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \llbracket \underline{v}_2(\underline{x}_2) \rrbracket] dL$$

Dans cette expression les fonctions  $\pi_2[\underline{x}_2 ; \cdot]$  et  $\pi_2[\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \cdot]$  définies à partir du domaine  $G_2(\underline{x}_2)$  sont évidemment identiques aux fonctions  $\pi_D^{(x,y)}[\underline{x}_2 ; \cdot]$  et  $\pi_D^{(x,y)}[\underline{x}_2, \underline{n}_2(\underline{x}_2) ; \cdot]$  évoquées plus haut. On peut alors comparer la formule (5.17) avec (5.7 à 5.11) :

le champ  $\underline{v}_2$  définit pour  $V_2$  le demi-espace d'équation :

$$(5.19) \quad \underline{Q}_2 \cdot \dot{\underline{q}}_2(\underline{v}_2) - P_2(\underline{v}_2) \leq 0$$

et pour  $V$  le demi-espace d'équation :

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}_2) - P\left(\llbracket \underline{v}_2 \rrbracket_D^{(x,y)}\right) \leq 0$$

soit encore :

$$(5.20) \quad \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}_2(\underline{v}_2) - \ell P_2(\underline{v}_2) \leq 0 ;$$

---

<sup>(1)</sup> Comme on l'a dit au chapitre I (§ 4.6.3) la possibilité de construire ainsi  $K_2$  n'a été démontrée que sous certaines hypothèses. L'abus de langage qui est commis ici permet des énoncés commodes.

ces deux demi-espaces de  $\mathcal{R}^n$  sont identiques et l'on a donc :

$$(5.21) \quad K_2 \equiv K_D^{(x,y)} \supset K$$

Ainsi : le domaine des chargements potentiellement supportables pour  $V_2$ , dans le mode homologue, avec le domaine de résistance  $G_D^{(x,y)}(\underline{x}_2)$  est identique à l'approche par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables pour  $V$ , construite en explorant l'ensemble des champs de vitesse en déformation plane, cinématiquement admissibles.

#### 5.4 - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR DE $K_2 \equiv K_D^{(x,y)}$

Pour le système bidimensionnel  $V_2$  le domaine  $K_2$  peut, en application des théorèmes généraux, être approché par l'intérieur au moyen de champs de contrainte.

On doit alors considérer les champs de contrainte  $\underline{\sigma}_2$ , bidimensionnels, fonctions de  $\underline{x}_2$ , statiquement admissibles dans le mode de chargement homologue pour  $V_2$  et respectant le critère  $f_2[\underline{x}_2 ; \underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)]$  caractérisant  $G_2(\underline{x}_2)$ , c'est-à-dire  $f_D^{(x,y)}[\underline{x}_2 ; \underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)]$ .

Mise à part l'expression du critère, ces champs de contrainte et la façon de procéder, sont analogues à ceux qui ont été présentés au § 3.2 dans le cas de la contrainte plane. En explorant l'ensemble  $H_2$  de tous les champs  $\underline{\sigma}_2$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\sigma}_2 \in S_2 \\ \underline{\sigma}_2(\underline{x}_2) \in G_2(\underline{x}_2), \quad \forall \underline{x}_2 \in V_2 \end{array} \right.$$

on construira l'ensemble  $K_2 \equiv K_D^{(x,y)}$  par l'intérieur.

Il se trouve qu'en règle générale la "courbe intrinsèque de déformation plane" est réelle. Cette propriété permet alors la mise en oeuvre de la "théorie des équilibres limites plans" [voir par exemple : (Mandel, 1942 ; Hill, 1950 ;

Sokolovski, 1955, 1960, 1965 ; Salençon, 1974)], fondée sur la résolution de systèmes différentiels hyperboliques par la méthode des caractéristiques. Cette théorie s'est révélée très efficace dans l'étude de ce type de problèmes. Elle mêle des considérations sur les contraintes et les vitesses et relève le plus souvent, comme cela a été montré par plusieurs auteurs [ par exemple : Bishop, (1953) ; Salençon, (1969) ], de la méthode d'approche par l'extérieur de  $K_2$ .

Elle conduit aussi parfois à la construction de solutions complètes bidimensionnelles.

### 5.5 - SOLUTIONS COMPLÈTES BIDIMENSIONNELLES

Dans les paragraphes précédents ont été évoquées les deux approches du domaine  $K_2$  pour le système bidimensionnel  $V_2$  vis-à-vis du critère de résistance en déformation plane. L'approche par l'extérieur de  $K_2$  conserve évidemment ce même caractère vis-à-vis de  $K$  ; par contre on ne peut rien affirmer concernant l'approche par l'intérieur : une approximation par l'intérieur de  $K_2$  peut, en effet, être extérieure à  $K$ .

On doit remarquer que, les deux approches bidimensionnelles étant rattachées au convexe  $G_2(\underline{x}_2) \equiv G_D^{(x,y)}(\underline{x}_2)$  obtenu comme indiqué au § 4.1.2, il s'ensuit que des matériaux constitutifs différents pour le système  $V$ , pourront être équivalents au niveau du système  $V_2$  pour la détermination du domaine  $K_2$  : il en va ainsi pour les critères de Tresca et de von Mises, de Coulomb et de Drucker-Prager, de Tresca sans résistance à la traction et de von Mises sans résistance à la traction, etc.

La figure 3 donne l'exemple de  $G_D^{(x,y)}$  dans le cas du critère de von Mises sans résistance à la traction, domaine identique à celui obtenu pour le critère de Tresca sans résistance à la traction.

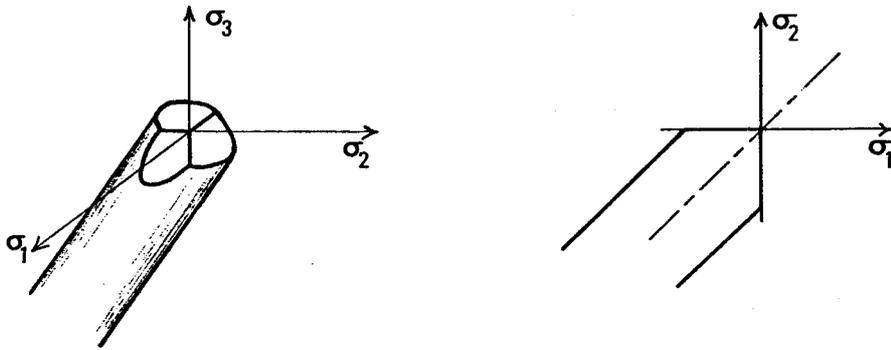


Figure 4 : Critère de von Mises sans résistance à la traction : a) domaine de résistance dans l'espace  $\{\underline{\sigma}\}$  ; b) domaine de résistance en déformation plane :  $G_D^{(x,y)}$

La combinaison des deux approches peut conduire à la détermination de chargements extrêmes pour  $V_2$  par la mise en évidence de solutions complètes pour le système bidimensionnel :

- $\underline{\sigma}_2 \in H_2$  équilibrant  $Q_2$
- $\underline{v}_2 \in C_2$  tel que :

$$(5.22) \quad Q_2 \cdot \dot{q}_2(\underline{v}_2) = P_2(\underline{v}_2) ;$$

$\underline{\sigma}_2$  et  $\underline{v}_2$  sont alors associés vis-à-vis de  $G_2(\underline{x}_2) \equiv G_D^{(x,y)}(\underline{x}_2)$ .

## 5.6 - SOLUTIONS COMPLÈTES TRIDIMENSIONNELLES

La forme particulière du problème étudié (cf § 5.1) a conduit à axer l'approche cinématique sur la construction de champs de vitesse en déformation plane, et à introduire le système bidimensionnel  $V_2$  dont on étudie les potentialités de résistance vis-à-vis du critère de résistance en déformation plane. On peut ainsi être tenté de penser que le domaine  $K_2 \equiv K_D^{(x,y)}$  est identique au domaine  $K$  pour  $V$ .

Sous cette forme, cette question n'a pas été étudiée. Cela tient essentiellement à la difficulté, déjà mentionnée au § 4.1.2, de mêler des considérations de capacités de résistance à des considérations de type de déformation. Aussi seuls les cas des matériaux régis par des critères de von Mises ou de Tresca, pour lesquels ces critères représentent en fait des critères de plasticité et des potentiels plastiques définissant la règle de déformation réelle de l'élément, ont été traités ou évoqués par certains auteurs. Pour d'autres matériaux tels que ceux régis par le critère de Coulomb, le concept de Calcul à la rupture n'ayant pas jusqu'alors été clairement dégagé, l'intérêt même du problème posé plus haut n'apparaissait pas : on procédait à l'étude de l'équilibre limite plan avec la courbe intrinsèque du matériau, par intuition et par analogie avec le cas du matériau de Tresca.

En fait, la question de l'identité entre  $K_2 \equiv K_D^{(x,y)}$  et  $K$  ne peut être tranchée de façon générale, en particulier les propriétés d'isotropie du matériau constitutif pourront avoir une grande importance.

Supposons ainsi que  $Q_2$  soit un chargement extrême pour  $V_2$  déterminé par la mise en évidence d'une solution complète  $(\underline{\sigma}_2, \underline{v}_2)$ . Est-il possible de construire une solution complète montrant que  $Q_2$  est aussi chargement extrême pour  $V$  ?

■ pour le champ de vitesse :

on peut construire à partir de  $\underline{v}_2$  le champ de vitesse en déformation plane  $[\underline{v}_2]_D^{(x,y)}$

■ pour le champ de contrainte :

si le domaine  $G(\underline{x}_2)$  est convexe  $\forall \underline{x}_2 \in V_2$ , on peut trouver en chaque point  $\underline{x}$  de  $V$ , en raison même du mode de construction de  $G_D^{(x,y)}(\underline{x}_2)$  indiqué au § 4.1.2, au moins un tenseur-contrainte tridimensionnel,  $\underline{\sigma}(\underline{x})$ , fonction en fait seulement de  $x$  et  $y$  soit  $\underline{\sigma}(\underline{x}_2)$ , associé à  $\underline{d}(\underline{x}_2)$  ou à  $D\{\underline{x}_2, \underline{n}(\underline{x}_2) ; \llbracket \underline{v}(\underline{x}_2) \rrbracket\}$  vis-à-vis de  $G(\underline{x}_2)$ , et dont la partie bidimensionnelle définie par (4.6) n'est autre que  $\underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)$  ;

si le domaine  $G(\underline{x}_2)$  n'est pas convexe, il est clair que l'énoncé ci-dessus demeure valable en y remplaçant  $G(\underline{x}_2)$  par  $[G(\underline{x}_2)]^{CO}$  : la construction d'une solution complète se référant à  $G(\underline{x}_2)$  devient alors à nouveau un cas d'espèce.

Revenant au premier cas on détermine ainsi au moins un champ  $\underline{\sigma}$ , fonction de  $\underline{x}_2$  uniquement, et associé à  $\underline{v}$  vis-à-vis de  $G(\underline{x}_2)$ . Il reste alors à savoir si ce champ est statiquement admissible pour  $V$  dans le mode de chargement.

Supposons par exemple un matériau isotrope :  $\underline{\sigma}(\underline{x}_2)$  admettra alors  $Oz$  pour direction principale en chaque point où soit  $\underline{d}(\underline{x}_2)$  est  $\neq 0$ , soit  $\underline{D}\{\underline{x}_2, \underline{n}(\underline{x}_2)\}$  ;  $\{\underline{v}(\underline{x}_2)\}$  est  $\neq 0$  ; dans les zones où  $\underline{d}(\underline{x}_2) = 0$  et  $\underline{D}\{\underline{x}_2, \underline{n}(\underline{x}_2)\}$  ;  $\{\underline{v}(\underline{x}_2)\} = 0$ ,  $\underline{\sigma}(\underline{x}_2)$  peut être construit à partir de  $\underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)$  pour partie bidimensionnelle en admettant  $Oz$  pour direction principale. Le champ  $\underline{\sigma}$  ainsi obtenu est statiquement admissible pour  $V$  dans le mode de chargement compte tenu de la forme des données puisque les équations d'équilibre se réduisent alors à celles pour  $\underline{\sigma}_2$ , bidimensionnelles, satisfaites par hypothèse, ainsi que les conditions aux limites.

Dans ce cas particulier on peut alors énoncer que les convexes  $K_2 \equiv K_D^{(x,y)}$  et  $K$  coïncident ; l'approche bidimensionnelle par les contraintes a le caractère d'approche par l'intérieur pour  $K$ .

Ce cas se rencontre classiquement pour des systèmes en matériaux régis par les critères de von Mises, de Tresca, de Coulomb, de Drucker-Prager, etc.

La même conclusion peut être obtenue pour d'autres types de matériaux :

- matériaux transversalement isotropes autour de  $Oz$ ,
- matériaux cohérents anisotropes régis par les critères construits à partir des formules de Bishop ou de Casagrande-Carrillo comme indiqué dans (Salençon et Tristán-López, 1980).

#### 5.7 - REMARQUE SUR LES CONDITIONS D'EMPLOI DE LA THÉORIE DU CALCUL A LA RUPTURE EN DÉFORMATION PLANE

Dans la pratique on fait très souvent appel à la théorie du Calcul à la rupture en déformation plane qui a été évoquée ci-dessus, pour des systèmes  $V$  cylindriques de grande longueur et qui sont modélisés comme illimités dans la direction  $Oz$  ; les conditions sur les bases parallèles à  $Oxy$  rejetées à l'infini ne sont plus du type indiqué au § 5.1, mais de la forme :

$$\underline{v}(x, y, +\infty) = 0 .$$

On peut encore pour un tel système procéder à l'approche par l'extérieur au moyen de champs de vitesse en déformation plane,  $[\underline{v}_2]_D^{(x,y)}$ , à condition d'introduire à l'infini, deux surfaces de discontinuité de vitesse ; celles-ci interviendront dans le calcul de  $P([\underline{v}_2]_D^{(x,y)})$  par une contribution supplémentaire, mais il est clair puisque le cylindre est supposé de longueur illimitée que cette contribution est en réalité négligeable devant les deux termes écrits en (5.9) et (5.10). Ceci permet l'application de la théorie du calcul à la rupture en déformation plane à ce type de problème, sans modification.

---

6 - CRITÈRES ET FONCTIONS  $\pi[ \dots ]$  DE MATÉRIAUX USUELS,  
EN CONTRAINTE PLANE ET EN DÉFORMATION PLANE

---

$\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ,  $d_1$  et  $d_2$  sont les valeurs principales des tenseurs bidimensionnels  $\underline{\sigma}_1$  et  $\underline{d}_2$  ;  $u_n$  et  $u_t$  les composantes normale et tangentielle relativement à la ligne de discontinuité, de la discontinuité de vitesse bidimensionnelle  $\underline{v}_2$ .

6.1 - MATÉRIAU DE VON MISES

6.1.1 - CONTRAINTE PLANE

$$\diamond f_c^{(x,y)}(\underline{\sigma}_2) = \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2 - 3k^2$$

ou encore

$$f_c^{(x,y)}(\underline{\sigma}_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 - 3k^2$$

$$\diamond \pi_c^{(x,y)}(\underline{d}_2) = 2k \sqrt{d_{xx}^2 + d_{yy}^2 + d_{xy}^2 + d_{xx}d_{yy}}$$

ou encore

$$\pi_c^{(x,y)}(\underline{d}_2) = 2k \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_1d_2}$$

$$\diamond \pi_c^{(x,y)}(\underline{n}_2, \underline{v}_2) = 2k \sqrt{u_n^2 + u_t^2/4}$$

### 6.1.2 - DÉFORMATION PLANE

---

$$\diamond f_D^{(x,y)}(\underline{\sigma}_2) = \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2 - k^2$$

ou encore

$$f_D^{(x,y)}(\underline{\sigma}_2) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4} - k^2$$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{d}_2) = +\infty \quad \text{si } \text{tr}(\underline{d}_2) \neq 0$$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{d}_2) = k \sqrt{2(d_{xx}^2 + d_{yy}^2 + 2d_{xy}^2)}$$

ou encore

$$\pi_D^{(x,y)}(\underline{d}_2) = k \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)}$$

} si  $\text{tr}(\underline{d}_2) = 0$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{n}_2, \underline{v}_2) = +\infty \quad \text{si } u_n \neq 0$$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{n}_2, \underline{v}_2) = k |u_t| \quad \text{si } u_n = 0$$

### 6.2 - MATÉRIAU DE TRESCA

---

#### 6.2.1 - CONTRAINTE PLANE

---

$$\diamond f_c^{(x,y)}(\underline{\sigma}_2) = \text{Max} \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} - \sigma_0$$

$$\diamond \pi_c^{(x,y)}(\underline{d}_2) = \frac{\sigma_0}{2} (|d_1| + |d_2| + |d_1 + d_2|)$$

$$\diamond \pi_c^{(x,y)}(\underline{n}_2, \underline{v}_2) = \frac{\sigma_0}{4} (|u_n + \sqrt{u_n^2 + u_t^2}| + |2u_n| + |u_n - \sqrt{u_n^2 + u_t^2}|)$$

### 6.2.2 - DÉFORMATION PLANE

---

$$\diamond f_D^{(x,y)}(\underline{\sigma}_2) = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 - \sigma_0^2$$

ou encore

$$f_D^{(x,y)}(\underline{\sigma}_2) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_0^2$$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{d}_2) = +\infty, \quad \text{si } \text{tr}(\underline{d}_2) \neq 0$$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{d}_2) = \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{2(d_{xx}^2 + d_{yy}^2 + 2d_{xy}^2)}$$

ou encore

$$\pi_D^{(x,y)}(\underline{d}_2) = \frac{\sigma_0}{2} \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)}$$

si  $\text{tr}(\underline{d}_2) = 0$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{n}_2, \underline{v}_2) = +\infty, \quad \text{si } u_n \neq 0$$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{n}_2, \underline{v}_2) = \frac{\sigma_0}{2} |u_t| \quad \text{si } u_n = 0.$$

### 6.3 - MATÉRIAU DE COULOMB EN DÉFORMATION PLANE

---

Les contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  étant ordonnées suivant  $\sigma_I \geq \sigma_{II}$  :

$$\diamond f_D^{(x,y)}(\underline{\sigma}_2) = \sigma_I(1 + \sin \varphi) - \sigma_{II}(1 - \sin \varphi) - 2C \cos \varphi$$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{d}_2) = +\infty, \quad \text{si } \text{tr}(\underline{d}_2) < (|d_1| + |d_2|) \sin \varphi ;$$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{d}_2) = H \text{tr}(\underline{d}_2), \quad \text{si } \text{tr}(\underline{d}_2) \geq (|d_1| + |d_2|) \sin \varphi .$$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{n}_2, \underline{v}_2) = +\infty, \quad \text{si } u_n < |v_2| \sin \varphi$$

$$\diamond \pi_D^{(x,y)}(\underline{n}_2, \underline{v}_2) = H \cdot u_n, \quad \text{si } u_n \geq |v_2| \sin \varphi .$$

On rappelle que :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

et les formules analogues pour  $d_1$  et  $d_2$  ;

$$H = C \cotg \varphi.$$

*chapitre VI*

*Exemples d'applications  
pour le milieu continu*

---

## 1 - INTRODUCTION

---

Ce chapitre est consacré à la présentation d'exemples d'applications des théories du calcul à la rupture et de l'analyse limite sur des problèmes posés dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel.

Il a pour objet essentiel la présentation de diverses méthodes couramment utilisées dans les approches par l'intérieur et par l'extérieur ; plutôt que d'en faire une description de principe, abstraite, il a paru préférable de procéder à leur mise en oeuvre dans des analyses fouillées de trois problèmes classiques ; on y mettra en évidence également les quelques points délicats qui apparaissent dans l'emploi de ces méthodes : l'explication donnée dans le cas particulier de l'exemple traité, sera valable dans le cas général.



---

2 - EXPÉRIENCE DE COMPRESSION :  
ÉCRASEMENT D'UN BLOC ENTRE LES PLATEAUX D'UNE PRESSE

---

2.1 - POSITION DU PROBLÈME

On étudie l'écrasement d'un bloc cylindrique de hauteur  $h$  et de section  $S$  quelconque entre les plateaux d'une presse, supposés parfaitement rigides. Le contact aux interfaces entre le bloc et les plateaux est supposé se faire *sans frottement* (figure 1).

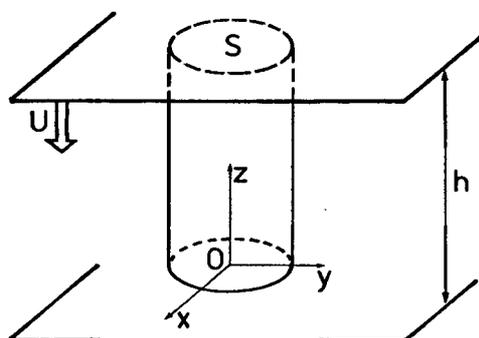


Figure 1 :  
Ecrasement d'un bloc  
cylindrique entre les  
plateaux d'une presse.

Ce système est soumis à un mode de chargement à un paramètre dans lequel la vitesse de déformation du système est :

$$\dot{q} = U, \text{ vitesse de rapprochement relatif des plateaux,}$$

et le paramètre de chargement associé est :

$$Q = F, \text{ intensité de la force de compression exercée par chaque plateau.}$$

Le problème est d'abord étudié dans le cas où le bloc est constitué de matériaux plastiques de Tresca ou de von Mises, non pesants.

## 2.2 - MÉTHODE STATIQUE

On considère le champ de contrainte  $\underline{\sigma}$ , homogène, uniaxial, défini dans les axes de la figure 1 par :

$$(2.1) \quad \sigma_{zz} = -\sigma, \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0.$$

Ce champ est statiquement admissible et la valeur correspondante du paramètre de chargement est :

$$Q = \sigma S.$$

Pour le matériau de Tresca, la valeur maximale de  $\sigma$  permise par le critère :

$$f(\underline{\sigma}) = \text{Sup} \left\{ \sigma_i - \sigma_j - \sigma_0 \mid i, j = 1, 2, 3 \right\} \leq 0$$

est  $\sigma = \sigma_0$ , d'où :

(2.2)

$$F^+ \geq \sigma_0 S$$

Pour le matériau de von Mises, la valeur maximale de  $\sigma$  permise par le critère :

$$f(\underline{\sigma}) = \left( \frac{1}{2} \text{tr } \underline{\underline{s}}^2 \right)^{1/2} - k \leq 0$$

est  $\sigma = k\sqrt{3}$ , d'où :

(2.3)

$$F^+ \geq k\sqrt{3} S.$$

## 2.3 - MÉTHODE CINÉMATIQUE

### 2.3.1 - UN CHAMP DE VITESSE DISCONTINU

On considère le mécanisme par blocs représenté à la figure 2, dans lequel le bloc 1 glisse à la vitesse  $V$ , le long d'un plan incliné à l'angle  $\alpha$  sur l'horizontale, le bloc 2 étant immobile.<sup>(1)</sup> L'angle  $\alpha$  est borné, en fonction de l'orientation du plan de glissement, par la géométrie du problème.

<sup>(1)</sup>  $\underline{V}$  est supposée parallèle aux lignes de pente du plan.

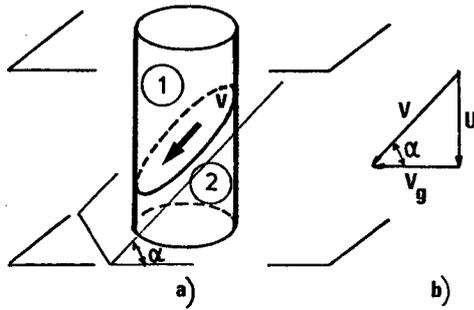


Figure 2 : Ecrasement d'un bloc cylindrique entre deux plateaux :

a) mécanisme par blocs ;

b) hodographe correspondant.

Comme cela est indiqué par l'hodographe tracé à la figure 2b, dans ce mécanisme il y a glissement sous le plateau supérieur à la vitesse  $V_g = V \cos \alpha$ , tandis que la vitesse d'enfoncement du plateau supérieur est  $U = V \sin \alpha$ .

D'où :

$$(2.4) \quad Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) = F V \sin \alpha .$$

♦ Pour le matériau de Tresca, on a alors :

$$(2.5) \quad P(\underline{v}) = \frac{\sigma_0}{2} V S / \cos \alpha$$

on en déduit :

$$(2.6) \quad F^+ \leq \sigma_0 S / \sin 2 \alpha .$$

Cette borne supérieure est minimale pour  $\alpha = \pi/4$ , si cette valeur est permise par la géométrie du problème (c'est-à-dire si  $h$  est supérieure au plus petit diamètre de l'enveloppe convexe de  $S$ ) ; on a alors :

$$(2.7) \quad F^+ \leq \sigma_0 S ,$$

d'où par comparaison avec (2.2) :

$$(2.8) \quad \boxed{F^+ = \sigma_0 S .}$$

Si la valeur maximale permise pour  $\alpha$  est  $\alpha_M < \pi/4$ , on obtient :

$$(2.9) \quad F^+ \leq \sigma_0 S / \sin 2\alpha_M \quad (1)$$

Pour le matériau de von Mises, l'expression de  $P(\underline{v})$  est modifiée :

$$(2.10) \quad P(\underline{v}) = k V S / \cos \alpha,$$

d'où le résultat :

$$(2.11) \quad F^+ \leq 2k S / \sin 2\alpha,$$

borne supérieure minimale pour  $\alpha = \pi/4$ , si cette valeur est permise :

$$(2.12) \quad F^+ \leq 2k S$$

sinon :  $F^+ \leq 2k S / \sin 2\alpha_M \quad (1)$ .

### 2.3.2 - CHAMP DE VITESSE DE DÉFORMATION UNIFORME

---

Avec les axes de la figure 1 on considère le champ de vitesse défini par :

$$(2.13) \quad v_z = -Uz/h, \quad v_y = Uy/2h, \quad v_x = Ux/2h$$

$$d'où : \quad \begin{cases} d_{zz} = -U/h, & d_{xx} = d_{yy} = U/2h, \\ \text{autres } d_{ij} = 0. \end{cases}$$

L'origine des axes, 0, est quelconque dans le plan Oxy, ce qui correspond pour le champ de vitesse à l'addition d'une translation d'ensemble, horizontale, sans effet dans le cas présent sur le calcul de  $Q.\dot{q}(\underline{v})$  et de  $P(\underline{v})$ .

On a alors :

$$(2.14) \quad Q.\dot{q}(\underline{v}) = F.U.$$

et

---

(1) Soit, puisque  $\alpha_M = \text{Arc tg}(h/D)$ , où D désigne le plus petit diamètre de l'enveloppe convexe de S :

$$F^+ \leq S \frac{h^2 + D^2}{hD} \times \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2} & (\text{Tresca}) \\ k & (\text{von Mises}). \end{cases}$$

♦ Pour le matériau de Tresca :

$$(2.15) \quad P(\underline{v}) = \int_0^h \frac{\sigma_0}{2} (|d_{xx}| + |d_{yy}| + |d_{zz}|) S dz = \sigma_0 U S ,$$

d'où :

$$(2.16) \quad F^+ \leq \sigma_0 S , \quad \forall h$$

♦ Pour le matériau de von Mises :

$$(2.17) \quad P(\underline{v}) = \int_0^h k \sqrt{2(d_{xx}^2 + d_{yy}^2 + d_{zz}^2)} S dz = k \sqrt{3} U S ,$$

d'où :

$$(2.18) \quad F^+ \leq k \sqrt{3} S , \quad \forall h .$$

#### 2.4 - COMMENTAIRES

♦ Dans le cas du matériau de Tresca, on remarque par comparaison de (2.2) et de (2.16) que la valeur exacte de  $F^+$  est connue,  $\forall h$  :

$$(2.19) \quad \boxed{F^+ = \sigma_0 S , \quad \forall h}$$

De plus, lorsque le bloc est suffisamment élancé, le mécanisme optimal ( $\alpha = \pi/4$ ) par blocs du § 2.3.1., conduit également à la détermination de la valeur exacte de  $F^+$  (ce mécanisme n'est d'ailleurs pas unique, dès que  $\alpha_M > \pi/4$ , et peut éventuellement se produire aussi suivant plusieurs positions du plan de glissement). On se trouve ainsi dans le cas où à une charge extrême (qui est en fait ici une charge d'écoulement plastique libre) correspondent plusieurs solutions complètes et on vérifie que le champ de vitesse de déformation homogène du § 2.3.2. et le champ optimal du § 2.3.1. ( $\alpha = \pi/4$ ) sont tous les deux associés au champ de contrainte maximisant du § 2.2, par la règle de normalité ; de même pour toute combinaison convexe de ces champs de vitesse.

♦ Dans le cas du *matériau de von Mises*, la comparaison de (2.3) et de (2.18) détermine la valeur exacte de  $F^+$  :

(2.20)

$$F^+ = k \sqrt{3} S, \quad \forall h .$$

Le champ de vitesse de déformation du § 2.3.2 est associé au champ de contrainte maximisant du § 2.2 par la règle de normalité pour le matériau de von Mises. Par contre le mécanisme minimisant du § 2.3.1. ne fournit qu'un majorant de  $F^+$ , même lorsque  $\alpha_M > \pi/4$  : on voit d'ailleurs qu'il n'est pas associé au champ de contrainte du § 2.2 puisque pour le matériau de von Mises, la règle de normalité indique qu'une discontinuité de vitesse ne peut se produire que si une contrainte principale est égale à la demi-somme des deux autres.

♦ En conclusion, on remarque que les résultats obtenus sont bien en accord avec la terminologie usuelle :  $\sigma_0$  et  $k \sqrt{3}$  sont bien, pour les matériaux de Tresca et de von Mises respectivement, les résistances en compression simple, quelle que soit la hauteur du spécimen.

## 2.5 - CAS DU CONTACT AVEC FROTTEMENT

### 2.5.1 - POSITION DU PROBLÈME

On suppose désormais qu'à chaque interface entre plateaux et blocs, le contact se fait avec frottement sec obéissant à la loi de Coulomb. L'interface globale est donc une interface de Coulomb située entre un matériau supposé infiniment rigide (le plateau) et un matériau de Tresca ou de von Mises.

On peut pour ce problème utiliser les théorèmes du calcul à la rupture, et notamment l'approche par l'extérieur pour évaluer par excès la charge extrême : ceci fournit alors une évaluation par excès des charges d'écoulement plastique libre de ce système non standard (cf. chapitre III § 6.1) ; l'application du théorème de Drucker-Radenkovic (cf. chapitre III, § 6.2) permet d'en obtenir une évaluation par défaut.

### 2.5.2 - APPLICATION DU THÉORÈME DE DRUCKER-RADENKOVIC

---

Le champ de contrainte présenté au § 2.2 est à nouveau utilisable pour l'application du théorème de Drucker-Radenkovic dans ce problème : ce théorème conduit en effet à supposer l'interface lisse et on a donc, pour les charges d'écoulement plastique libre, la minoration :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_0 S \\ k \sqrt{3} S \end{array} \right\} \leq F_{\lambda} \quad \begin{array}{l} \text{(Tresca)} \\ \text{(von Mises)} . \end{array}$$

### 2.5.3 - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR AU MOYEN

---

#### D'UN CHAMP DE VITESSE "PAR BLOCS"

---

L'utilisation de mécanismes de déformation par blocs permet d'obtenir une majoration des charges d'écoulement plastique libre :

on considère le mécanisme représenté à la figure 3, avec deux plans de glissement, inclinés tous deux à l'angle  $\alpha$  sur le plan horizontal, et dont l'intersection est parallèle à ce plan, de telle sorte que :

- le bloc 1 s'enfonce avec la vitesse verticale  $U$ ,
- le bloc 3 est immobile,
- les blocs 2 et 4 sont animés de vitesses de translation inclinées à l'angle  $\alpha$  sur l'horizontale, et de grandeur  $U/2 \sin \alpha$  (cf. hodographe, figure 3b) ;

$$\text{on a :} \quad Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) = F \cdot U ;$$

pour le calcul de  $P(\underline{v})$  : puisque le mécanisme n'implique aucun glissement aux interfaces plateaux - bloc, il n'y a à prendre en compte que les contributions dues au glissement dans les plans de glissement ; on obtient sans difficulté :

$$P(\underline{v}) = \sigma_0 S U / \sin 2\alpha \quad \text{(Tresca)}$$

$$P(\underline{v}) = 2 k S U / \sin 2\alpha \quad \text{(von Mises)}.$$

l'angle  $\alpha$  étant limité par la géométrie.

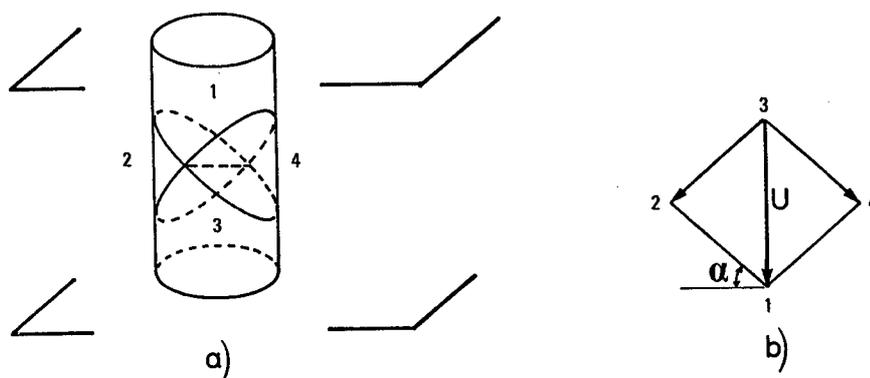


Figure 3 : Compression d'un bloc entre deux plateaux avec frottement :

- a) mécanisme par blocs  
b) hodographe.

On a ainsi les majorations :

$$F_{\ell} \leq \sigma_0 S / \sin 2 \alpha \quad (\text{Tresca})$$

$$F_{\ell} \leq 2k S / \sin 2 \alpha \quad (\text{von Mises}) .$$

Le raisonnement est alors le même qu'au § 2.3.1. Si l'on se place dans le cas où  $h \geq D$ , plus petit diamètre de l'enveloppe convexe de  $S$ , on voit que :

- ◆ pour le matériau de Tresca : la majoration de  $F_{\ell}$  coïncide avec la borne inférieure donnée par le théorème de Drucker-Radenkovic ; il y a donc une seule charge d'écoulement plastique libre, quelle que soit la condition de frottement aux interfaces "plateaux-bloc", c'est :

$$F_{\ell} = \sigma_0 S ;$$

- ◆ pour le matériau de von Mises : on a pour les charges d'écoulement plastique libre, l'encadrement :

$$k \sqrt{3} S \leq F_{\ell} \leq 2 k S ;$$

- ◆ si  $h$  est inférieure à la hauteur minimale indiquée ci-dessus, c'est-à-dire  $D$ , les deux bornes obtenues dans le cas du matériau de Tresca ne coïncident plus et il n'est plus possible de conclure quant à l'influence du frottement.

2.5.4. - APPROCHE CINÉMATIQUE AU MOYEN DE

CHAMPS DE VITESSE DE DÉFORMATION UNIFORME

On considère à nouveau le champ de vitesse (2.13) utilisé au § 2.3.2 :

$$v_z = -Uz/h, \quad v_x = Ux/2h, \quad v_y = Uy/2h.$$

Il y a glissement sous les plateaux : la vitesse de glissement en chaque point de l'aire de contact  $S$  est égale à  $Ur/2h$  et dirigée suivant le rayon-vecteur ( $r$  désigne le module de celui-ci).

Pour le calcul de  $P(\underline{v})$  on doit ajouter aux expressions trouvées au § 2.3.2, la contribution due aux glissements sous les plateaux. Ainsi, pour le matériau de von Mises :

$$P(\underline{v}) = k\sqrt{3}US + kU \int_S (r/h)dS$$

d'où, pour  $F_\ell$ , la majoration :

$$(2.21) \quad F_\ell \leq k\sqrt{3}S + k \int_S (r/h)dS.$$

La position de l'axe  $Oz$  étant arbitraire, on place  $O$  de manière à rendre minimale l'intégrale figurant au second membre de (2.21) : en particulier si la section possède un centre de symétrie, on place  $O$  en ce point. Désignant alors par  $\bar{r}$  la valeur moyenne de  $r$ , on a :

$$F_\ell \leq k(\sqrt{3} + \bar{r}/h)S \quad (\text{von Mises}).$$

Pour  $h$  suffisamment grand par rapport à  $\bar{r}$ , cette borne supérieure devient meilleure que la valeur  $2kS$  obtenue plus haut.

Ainsi, pour un bloc de section circulaire de diamètre  $D$ , on obtient :

$$F_\ell \leq k(\sqrt{3} + D/3h)S$$

$$\text{d'où pour :} \quad h = 2D \quad : \quad F_\ell \leq 1,9 \quad kS$$

$$h = 3D \quad : \quad F_\ell \leq 1,843 \quad kS.$$

### 2.5.5. - COMMENTAIRES SUR LES RÉSULTATS

---

Les exemples étudiés ont mis en évidence que :

- ♦ Dans certains cas le théorème de Drucker-Radenkovic, associé à l'approche cinématique de K, permet de déterminer de façon exacte la charge d'écoulement plastique libre en présence d'une condition de frottement ne satisfaisant pas la règle de normalité : bloc en matériau de Tresca, de hauteur supérieure au plus petit diamètre de l'enveloppe convexe de S .
- ♦ Pour le bloc en matériau de von Mises, quelle qu'en soit la hauteur, l'influence du frottement se traduit par une augmentation de la borne supérieure de  $F_{\ell}$ , conformément à l'intuition (le frottement "raidit" l'échantillon) ; cette influence est d'autant moins marquée que le bloc est plus élancé.

### 2.6 - REMARQUE GÉNÉRALE SUR L'UTILISATION DES

---

#### MÉCANISMES PAR BLOCS

---

L'utilisation de "mécanismes par blocs" en calcul à la rupture, tels que celui représenté à la figure 3, suscite parfois des interrogations touchant à la notion même de champ de vitesse cinématiquement admissible : on pourrait s'étonner, par exemple, de ce que la vitesse du bloc n°3 soit verticale descendante alors que celle du bloc n°1 est nulle et que ces deux blocs ont en commun l'arête intersection des deux plans de glissement. Il convient donc de rappeler que les champs de vitesse cinématiquement admissibles pour le milieu continu tridimensionnel sont des champs continus et dérivables par morceaux mais qu'*aucune condition ne leur est imposée quant aux discontinuités de vitesse.*

Il doit ainsi être bien compris que si nous avons supposé, dans les mécanismes des figures 2 et 3, que les discontinuités de vitesse sont tangentes aux plans de discontinuité (qui méritent alors le nom de *plans de glissement*) c'est uniquement dans le but d'écourter l'exposé en évitant une minimisation évidente :

ainsi qu'on l'a indiqué au chapitre I (§ 4.8) et au chapitre II (§ 2.2 et 2.3), pour les matériaux régis par les critères de Tresca et de von Mises,  $\pi(\underline{n}; [\underline{v}])$  est infini si  $[\underline{v}] \cdot \underline{n} \neq 0$ . Par contre, on utilisera dans la suite (§ 2.8.3 par exemple) des champs de vitesse par blocs où les discontinuités de vitesse ne seront plus tangentes aux surfaces de discontinuité : on a vu au chapitre II (§ 2.4) qu'il doit en être ainsi pour que  $\pi(\underline{n}; [\underline{v}])$  soit finie dans le cas du critère de Coulomb par exemple ; c'est ensuite le processus de minimisation dans l'approche par l'extérieur qui permettra de déterminer l'orientation optimale de cette discontinuité (cf par exemple § 2.8.3. *in fine*).

Il est clair enfin que cette même minimisation ne conduira jamais à aucune condition supplémentaire pour les discontinuités de vitesse le long d'une arête ; en effet la contribution d'une telle arête dans  $P(\underline{v})$  est toujours nulle car il n'existe pas, pour une ligne, l'homologue de la densité de surface  $\pi(\underline{n}; [\underline{v}])$  : ceci tient au modèle même de milieu continu tridimensionnel comme le montre l'expression du principe des puissances virtuelles où n'apparaît pas d'intégrale de ligne.

Des considérations identiques seraient évidemment à développer à propos de l'utilisation de champs de vitesse par blocs pour l'étude des problèmes plans de calcul à la rupture (cf chapitre V) : la dimension de l'espace étant réduite à deux, les rôles joués ci-dessus par les surfaces de discontinuités et les arêtes seront tenues respectivement par les *lignes de discontinuités* et les *sommets*.

## 2.7 - COMPRESSION EN DÉFORMATION PLANE

### 2.7.1. - POSITION DU PROBLEME

On étudie maintenant l'écrasement entre les plateaux d'une presse, pour un bloc en forme de parallélépipède rectangle dont les faces perpendiculaires à Ox sont astreintes à demeurer dans des plans fixes par des liaisons sans frottement. Le bloc est constitué d'un matériau homogène de Tresca ou de von Mises et le contact aux interfaces "plateaux-blocs" sera d'abord supposé sans frottement ; on étudiera ensuite le cas du frottement. Les notations sont précisées sur la figure 4.

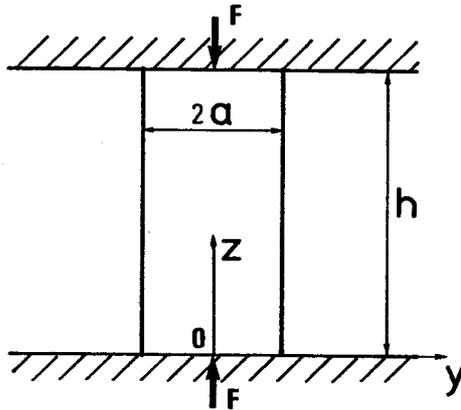


Figure 4 :  
Compression en déformation  
plane.

Ainsi posé le problème ressortit au type de ceux présentés au § 5.1 du chapitre V à propos du calcul à la rupture en déformation plane ; (on prendra garde au changement de notations par rapport à la figure 3 du chapitre V : interversion des rôles de  $x$  et  $z$ ) ; on remarquera que le contact plateaux-bloc avec frottement satisfait bien les conditions posées alors pour les données aux limites sur les facettes latérales : en effet, comme on l'a déjà dit (cf chapitre I, § 2.3.2), l'interface elle-même doit être considérée comme un matériau et la donnée à la limite sur les plateaux impose alors la nullité de la vitesse parallèle à  $Ox$ .

Le système est soumis à un mode de chargement à un paramètre :

on désigne par  $\ell$  l'épaisseur du bloc selon  $Ox$ ,  $U$  la vitesse de rapprochement relatif des plateaux,  $F$  l'intensité de la force de compression exercée par chaque plateau ;

le paramètre de chargement  $Q$  sera choisi égal à :

$$(2.22 a) \quad Q = F/\ell$$

tandis que la vitesse de déformation associée pour le système sera égale à :

$$(2.22 b) \quad \dot{q} = \ell U .$$

Ce problème satisfait toutes les conditions posées au chapitre V (§ 5) et pourrait être traité directement par la théorie du calcul à la rupture en déformation plane en construisant des champs de vitesse et de contrainte bidimensionnels ; le choix des paramètres explicité par (2.22) correspond à la formule (5.15) du chapitre V ; comme on l'a signalé alors il y aurait lieu, au cas où des solutions complètes pourraient être construites pour le problème bidimensionnel,

d'examiner comment elles pourraient permettre de construire des solutions complètes pour le problème tridimensionnel initial. Aussi on a préféré, afin de fournir un exemple illustratif qui puisse servir de préliminaire à l'étude de la théorie du chapitre V (§ 5), traiter directement le problème du point de vue tridimensionnel dans le cas du contact sans frottement ; le cas du contact avec frottement sera traité par la théorie du calcul à la rupture en déformation plane, la méthode de construction des solutions complètes tridimensionnelles étant alors claire à partir des solutions trouvées dans le cas précédent.

Enfin, en se référant au § 5.7 du chapitre V, sur les conditions d'emploi de la théorie du calcul à la rupture en déformation plane, il convient de signaler que le problème exposé ci-dessus pour lequel cette théorie est strictement applicable, constitue en quelque sorte la modélisation des problèmes plus pratiques suivants : compression d'un bloc parallélépipédique illimité dans la direction  $Ox$ , ou mieux encore, compression *simple* d'un bloc dont la dimension  $l$  selon  $Ox$  est très grande devant la largeur  $2a$ .

#### 2.7.2 - APPROCHE STATIQUE DANS LE CAS DU CONTACT

##### SANS FROTTEMENT

On considère le champ de contrainte homogène défini dans les axes de la figure 4 par les composantes :

$$(2.23) \quad \sigma_{zz} = -\sigma, \quad \sigma_{xx} = -\sigma/2, \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0 ;$$

dépendant du paramètre  $\sigma$ .

Ce champ est statiquement admissible pour le problème,  $\forall \sigma$ , et correspond pour le paramètre de chargement, à la valeur  $Q = \sigma \cdot 2a$ . On remarquera que la composante  $\sigma_{xx}$  est non nulle, ce qui est permis dans ce problème par la liaison imposant aux faces du bloc perpendiculaires à  $Ox$  de demeurer dans des plans fixes.

La valeur maximale de  $\sigma$  permise par le critère de Tresca est :

$$\sigma = \sigma_0 ,$$

et par le critère de von Mises :

$$\sigma = 2 k .$$

D'où pour  $Q^+$  :

$$Q^+ \geq \sigma_0 \cdot 2a \quad (\text{Tresca})$$

$$Q^+ \geq 2k \cdot 2a \quad (\text{von Mises})$$

### 2.7.3 - APPROCHE CINÉMATIQUE DANS LE CAS DU CONTACT

#### SANS FROTTEMENT

##### 2.7.3.1. - Champ de vitesse de déformation uniforme

On considère le champ de vitesse de déformation uniforme défini par :

$$v_z = -Uz/h, \quad v_y = Uy/h, \quad v_x = 0$$

d'où

$$d_{zz} = -U/h, \quad d_{yy} = U/h, \quad \text{autres } d_{ij} = 0.$$

Ce champ est cinématiquement admissible pour le problème avec  $\dot{q}(\underline{v}) = U\ell$ .

Pour le calcul de  $P(\underline{v})$ , les interfaces "plateaux-bloc" étant supposées sans frottement, de même que la liaison imposant aux faces normales à  $Ox$  de demeurer dans des plans fixes, on a :

♦ Pour le matériau de Tresca :

$$P(\underline{v}) = 2a \ell h (|d_{xx}| + |d_{yy}| + |d_{zz}|) \sigma_0 / 2$$

soit :  $P(\underline{v}) = 2a \ell \sigma_0 U$  ,

♦ Pour le matériau de von Mises :

$$P(\underline{v}) = 2a \ell h \sqrt{2(d_{xx}^2 + d_{yy}^2 + d_{zz}^2)} \cdot k$$

soit :  $P(\underline{v}) = 2a \ell 2kU$  .

On en déduit les majorations suivantes pour  $Q^+$  :

♦ matériau de Tresca,

$$Q^+ \leq \sigma_0 \cdot 2a \quad \forall h,$$

♦ matériau de von Mises,

$$Q^+ \leq 2k \cdot 2a \quad \forall h.$$

### 2.7.3.2. - Champ de vitesse par blocs

On considère un champ de vitesse par blocs analogue à celui présenté au § 2.3.1. (figure 2), où le plan de glissement est supposé parallèle à  $Ox$ , (figure 5).

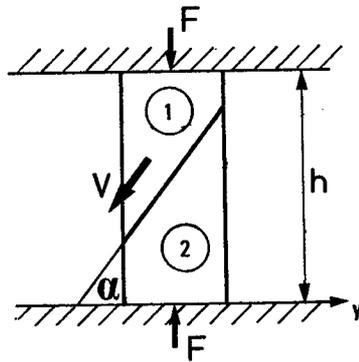


Figure 5 :  
Compression en déformation plane : champ de vitesse par blocs.

Avec les notations indiquées, il vient :

$$Q \dot{q} = Q \cdot v \sin \alpha \cdot l$$

$$P(\underline{v}) = \frac{\sigma_0}{2} v (2a/\cos \alpha) l \quad (\text{Tresca})$$

$$P(\underline{v}) = k \cdot v(2a/\cos \alpha) l \quad (\text{von Mises})$$

d'où pour  $Q^+$  :

$$Q^+ \leq \sigma_0 \cdot 2a/\sin 2 \alpha \quad (\text{Tresca})$$

$$Q^+ \leq 2k \cdot 2a/\sin 2 \alpha \quad (\text{von Mises}) .$$

On voit alors que, si  $h \geq 2a$ , le minimum de la borne supérieure de  $Q^+$  est atteint pour  $\alpha = \pi/4$ , soit :

$$Q^+ \geq \sigma_0 \cdot 2a \quad h \geq 2a \quad (\text{Tresca})$$

$$Q^+ \geq 2k \cdot 2a \quad h \geq 2a \quad (\text{von Mises}).$$

Dans le cas  $h < 2a$ , le type de mécanismes présenté ci-dessus conduira évidemment à des résultats analogues à ceux trouvés au § 2.3.1.

#### 2.7.4 - COMMENTAIRES

-----

♦ La comparaison des résultats des § 2.7.2. et 2.7.3.1. montre que la valeur exacte de  $Q^+$  est connue  $\forall h$  :

$$Q^+ = \sigma_0 \cdot 2a \quad (\text{Tresca})$$

$$Q^+ = 2k \cdot 2a \quad (\text{von Mises})$$

♦ Le champ de contrainte maximisant du § 2.7.2. et le champ de vitesse du § 2.7.3.1. sont associés par la règle de normalité pour le matériau de Tresca ou le matériau de von Mises.

On remarque que ce champ de vitesse correspond à une déformation plane du bloc parallèlement à Oyz :

ainsi  $\sigma_0$  apparaît comme la résistance en compression du matériau de Tresca en déformation plane ; elle est identique à la résistance en compression simple ;

$2k$  est la résistance en compression du matériau de von Mises en déformation plane ; elle est supérieure à la résistance en compression simple égale à  $k\sqrt{3}$ .

♦ Dans le cas où  $h \geq 2a$ , le (ou les) champ de vitesse par blocs, optimal du § 2.7.3.2. conduit aussi, tant pour le matériau de Tresca que pour le matériau de von Mises, à la valeur exacte de  $Q^+$ . On vérifie que ce champ est associé par la règle de normalité au champ de contrainte maximisant du § 2.7.2., pour les matériaux de Tresca et de von Mises. En effet, les conditions nécessaires pour l'existence d'une discontinuité de vitesse dans le cas du matériau de von Mises, sont bien satisfaites par le champ de contraintes :

la contrainte principale  $\sigma_{xx}$  est égale à la demi-somme des deux autres contraintes principales,

et la discontinuité de vitesse est dirigée suivant une bissectrice des contraintes principales extrêmes  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{yy}$  en respectant la condition de signe.

♦ Ainsi qu'on l'a dit (§ 2.7.1.), il eût été possible de traiter ce problème par application directe de la théorie du calcul à la rupture en déformation plane, mais on a préféré en faire une analyse du point de vue tridimensionnel que l'on peut maintenant examiner en se référant à cette théorie :

*a) pour les champs de vitesse*

on remarque que les champs de vitesse utilisés au § 2.7.3, parmi lesquels on a trouvé des champs minimisants, sont des champs de vitesse en déformation plane : le déroulement des approches par l'extérieur présentées est d'ailleurs en tout point conforme à ce qui a été décrit au § 5.2. du chapitre V.

*b) pour les champs de contrainte*

les champs de contrainte  $\underline{\sigma}$ , paramétrés en  $\sigma$ , utilisés au § 2.7.2. et qui ont permis d'obtenir un champ maximisant, peuvent être considérés comme construits à partir de champs de contrainte *bidimensionnels*  $\underline{\sigma}_2$  dans le plan Oyz dont les composantes, indépendantes de x, (et ici de y et z), sont :

$$\sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0 \quad \sigma_{zz} = -\sigma ;$$

ces champs  $\underline{\sigma}_2$  satisfont :

$$\left. \begin{array}{l} - \text{les équations d'équilibre,} \\ - \text{les conditions aux limites} \\ \text{sur les contraintes} \end{array} \right\} \text{bidimensionnelles dans } Oyz$$

et sont "complétés" tridimensionnellement en adjoignant en chaque point  $\underline{x}$  <sup>(1)</sup> à la matrice de  $\underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)$  les composantes :

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0 \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0 \\ \sigma_{xx} = (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})/2 \end{array} \right.$$

ce qui conduit à (2.23).

On remarque alors que le critère de résistance tridimensionnel peut s'exprimer pour ces champs  $\underline{\sigma}$ , en chaque point  $\underline{x}$ , en fonction des seules composantes de  $\underline{\sigma}_2(\underline{x}_2)$  :

ainsi pour le critère de Tresca :

$$(2.25) \quad f[\underline{\sigma}(\underline{x})] = |\sigma_{yy}(\underline{x}_2) - \sigma_{zz}(\underline{x}_2)| - \sigma_0$$

et pour le critère de von Mises :

$$(2.26) \quad f[\underline{\sigma}(\underline{x})] = |(\sigma_{yy}(\underline{x}_2) - \sigma_{zz}(\underline{x}_2))| - 2k ;$$

ces formules sont bien celles trouvées au chapitre V pour les critères de résistance des matériaux de Tresca et von Mises "en déformation plane", et sont équivalentes entre elles lorsque l'on y identifie  $\sigma_0$  et  $2k$  comme résistance en compression en déformation plane : il en résulte que les champs de contrainte et de vitesse construits pour un matériau conviennent automatiquement pour l'autre et conduisent dans les deux cas aux mêmes résultats, ce qui a été noté plus haut.

---

<sup>(1)</sup> On a ici :  $\hat{\underline{x}} = (x, y, z)$  et  $\hat{\underline{x}}_2 = (y, z)$ .

2.7.5. - CONTACT "PLATEAUX-BLOC" AVEC FROTTEMENT

-----

Le cas où le contact aux interfaces "plateaux-bloc" s'effectue avec frottement sera maintenant examiné en appliquant le théorème de Drucker-Radenkovic (cf. chapitre III, § 6.2) ; ceci conduit pour la détermination de la borne inférieure des charges d'écoulement plastique libre à considérer le cas du contact sans frottement, et pour la détermination de la borne supérieure de ces charges à considérer le cas de l'adhérence totale (interfaces "collées"). L'étude pourra alors être menée directement en appliquant la théorie du calcul à la rupture en déformation plane, les champs de contrainte bidimensionnels étant "complétés" tridimensionnellement" selon (2.24) ; de plus il suffira évidemment, comme on l'a dit plus haut, de traiter le problème pour l'un des matériaux, les résultats pour l'autre étant identiques.

Prenant le cas du matériau de Tresca :

♦ on utilise le champ de contrainte bidimensionnel homogène tiré du § 2.7.2., de composantes :

$$\sigma_{zz} = -\sigma, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{zy} = 0 ;$$

on voit, par application du théorème de Radenkovic-Drucker, que les charges d'écoulement plastique libre sont bornées inférieurement :

$$(2.27) \quad \sigma_0 \cdot 2a \leq Q_0$$

♦ on considère un champ de vitesse par blocs analogue à celui du § 2.5.3, dans lequel les plans de glissement sont parallèles à Ox (figure 6).

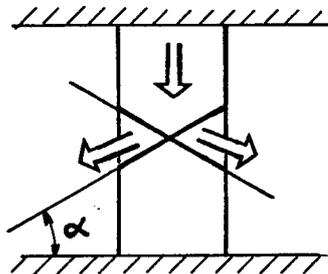


Figure 6 : Compression en déformation plane avec frottement : champ de vitesse par blocs.

On obtient un champ bidimensionnel conduisant pour les charges d'écoulement plastique libre, à la majoration :

$$Q_{\ell} \leq \sigma_0 \cdot 2a / \sin 2\alpha ,$$

dont la minimisation est identique à celles des § 2.3.1. puis 2.7.3.2. Ainsi, pour  $h \geq 2a$ , le minimum de la borne supérieure est atteint pour  $\alpha = \pi/4$ , et la meilleure majoration obtenue pour les charges d'écoulement plastique libre est alors :

$$(2.28) \quad Q_{\ell} \leq \sigma_0 \cdot 2a \quad (h \geq 2a) .$$

Par comparaison avec la minoration (2.27), et en application du théorème de Radenkovic-Drucker, on en déduit que :

la charge d'écoulement plastique libre pour le problème de la compression en déformation plane est unique quelle que soit la condition de frottement aux interfaces plateaux-bloc, lorsque la condition  $h \geq 2a$  est satisfaite, pour les matériaux de Tresca et de von Mises, elle vaut :

pour le matériau de Tresca :  $Q_{\ell} = \sigma_0 \cdot 2a$ , d'où  $F_{\ell} = \sigma_0 \cdot 2al$

pour le matériau de von Mises :  $Q_{\ell} = 2k \cdot 2a$ , d'où  $F_{\ell} = k \cdot 4al$ .

## 2.8 - CAS D'UN MATÉRIAU RÉGI PAR LE CRITÈRE DE COULOMB

### 2.8.1. - POSITION DU PROBLÈME

On reprend maintenant le problème posé au § 2.1, en faisant l'hypothèse que le matériau constituant le bloc a ses capacités de résistance définies par le critère de Coulomb :

$$f(\underline{\sigma}) = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \left\{ \sigma_i (1 + \sin \phi) - \sigma_j (1 - \sin \phi) - 2 C \cos \phi \right\} .$$

Les raisonnements à utiliser sont les homologues de ceux mis en oeuvre dans le cas du critère de Tresca : on ne les reprendra donc pas dans le détail, en particulier en ce qui concerne les minimisations à effectuer. On va montrer que les résultats obtenus pour le matériau de Tresca en ce qui concerne la charge extrême dans l'expérience de compression simple sont également valables pour le matériau régi par le critère de Coulomb.

Les notations des paragraphes précédents sont conservées ; les plateaux sont supposés lisses.

### 2.8.2. - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR

---

On considère le champ  $\underline{\sigma}$  homogène, uniaxial, défini dans les axes de la figure 1, comme au § 2.2, par :

$$(2.1) \quad \sigma_{zz} = -\sigma, \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0.$$

Ce champ est statiquement admissible avec  $Q = \sigma S$ .

La valeur maximale de  $\sigma$  permise par le critère de Coulomb est :

$$(2.29) \quad \sigma = 2 C \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2),$$

d'où :

$$(2.30) \quad F^+ \geq 2 C \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2) S.$$

### 2.8.3. - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR : CHAMP DE VITESSE DISCONTINU

---

On considère à nouveau un mécanisme par blocs comme au § 2.3.1. (fig. 7) : le bloc 2 est immobile, le bloc 1 est animé d'un mouvement de translation à la vitesse  $V$  ; la surface de discontinuité est un plan faisant avec l'horizontale l'angle  $\alpha = (\pi/4 + \phi/2)$ , et la vitesse du bloc 1 fait l'angle  $\beta = \phi$  avec la ligne de plus grande pente de ce plan<sup>(1)</sup> ; on suppose évidemment que ce mécanisme est permis par la géométrie du problème, c'est à dire que  $h \geq D \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$  où  $D$  est le plus petit diamètre de l'enveloppe convexe de  $S$ .

---

<sup>(1)</sup> La vitesse  $V$  est supposée dans un plan vertical parallèle aux lignes de pente de la surface de discontinuité.

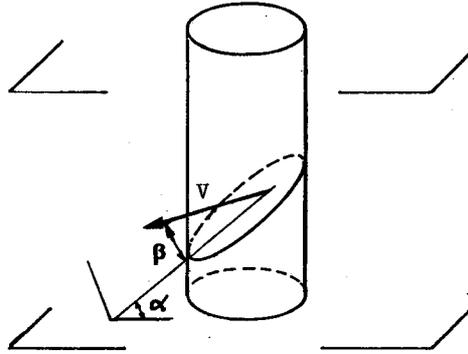


Figure 7 : Ecrasement d'un bloc cylindrique entre deux plateaux : critère de Coulomb, mécanisme par blocs.

On a dans ce mécanisme :

$$(2.31) \quad Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) = F \cdot V \sin(\pi/4 - \phi/2)$$

$$(2.32) \quad P(\underline{v}) = C V S \cos \phi / \cos(\pi/4 + \phi/2),$$

dont on déduit :

$$(2.33) \quad F^+ \leq 2 C \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2) S .$$

En comparant alors (2.30) et (2.33) on voit que, sous la condition de possibilité géométrique indiquée plus haut, la valeur exacte de la charge extrême est connue :  $F^+ = 2 C S \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$ . On remarque que dans le champ de vitesse discontinu ci-dessus, la discontinuité de vitesse n'est pas tangentielle : elle est inclinée à  $\phi$  sur la surface de discontinuité ce qui correspond à un décollement.

On aurait pu supposer a priori l'inclinaison  $\beta$  de  $V$  sur la surface de discontinuité quelconque, de même que l'inclinaison  $\alpha$  de la surface de discontinuité par rapport à l'horizontale. Dans ce cas :

$$Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) = F \cdot V \sin(\alpha - \beta)$$

$$\text{et } \begin{cases} P(\underline{v}) = +\infty & \text{si } \beta \notin [\phi, \pi - \phi] \\ P(\underline{v}) = C V S \operatorname{cotg} \phi \sin \beta / \cos \alpha & \text{si } \beta \in [\phi, \pi - \phi] \end{cases}$$

d'où, pour  $F^+$ , la majoration :

$$(2.34) \quad F^+ \leq C S \operatorname{cotg} \phi \sin \beta / \cos \alpha \sin(\alpha - \beta),$$

à minimiser par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$  : à  $\alpha$  donné, le second membre de (2.34) est une fonction croissante de  $\beta$  ; à  $\beta$  donné le minimum est atteint pour  $\alpha = \pi/4 + \beta/2$  ; d'où :

si  $h \geq D \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$ , le minimum est atteint pour :

$$\alpha = (\pi/4 + \phi/2) \text{ et } \beta = \phi$$

c'est le cas étudié plus haut.

si  $h \leq D \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$ , le minimum est atteint pour :

$$\alpha = \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(h/D) \text{ et } \beta = \phi$$

et on obtient :

$$F^+ \leq C S \cos \phi (h^2 + D^2) / [h D \cos \phi - D^2 \sin \phi] .$$

On notera que l'inclinaison optimale de la discontinuité de vitesse sur le plan de discontinuité est, pour ce mécanisme, toujours égale à  $\phi$  .

#### 2.8.4. - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR : CHAMP DE VITESSE DE

#### DÉFORMATION UNIFORME

Avec les axes de la figure 1, on considère le champ de vitesse défini par :

$$v_z = -Uz/h, \quad v_y = Uy \operatorname{tg}^2(\pi/4 + \phi/2)/2h, \quad v_x = Ux \operatorname{tg}^2(\pi/4 + \phi/2)/2h,$$

d'où :

$$\begin{cases} d_{zz} = -U/h, & d_{xx} = d_{yy} = U \operatorname{tg}^2(\pi/4 + \phi/2)/2h \\ \text{autres } d_{ij} = 0. \end{cases}$$

on a alors :

$$(2.35) \quad \operatorname{tr} \underline{d}(\underline{x}) = \frac{U}{h} \left[ \operatorname{tg}^2(\pi/4 + \phi/2) - 1 \right] = (2U/h) \sin \phi / (1 - \sin \phi),$$

et :

$$(2.36) \quad |d_1| + |d_2| + |d_3| = (2U/h) / (1 - \sin \phi),$$

d'où :

$$(2.37) \quad P(\underline{v}) = 2 C U S \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2),$$

ce qui, avec :

$$(2.38) \quad Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) = F U,$$

conduit pour  $F^+$  à la majoration :

$$F^+ \leq 2 C S \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$$

identique à (2.33) trouvée au § 2.8.3., mais sans condition de hauteur minimale pour le bloc.

Tous les commentaires faits au § 2.4 à propos du matériau de Tresca peuvent être repris ici et il ne nous paraît pas utile de les répéter. On notera simplement, qu'à la différence des matériaux plastiques de Tresca ou de von Mises où la charge extrême est aussi, sous les hypothèses explicitées au chapitre III, charge limite, on se trouve ici avec le critère de Coulomb dans un cas où il n'y a lieu de parler que de charge extrême, donnant donc le maximum de la résistance en compression simple du spécimen étudié.

#### 2.8.5. - CAS DU CONTACT AVEC FROTTEMENT SOUS LES PLATEAUX

-----

Si l'on examine le même problème dans l'hypothèse du contact avec frottement aux interfaces entre les plateaux et le bloc, il est clair que, sous la condition de hauteur minimale donnée au § 2.8.3., à savoir :  $h \geq D \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$ , il est possible de reprendre avec le matériau régi par le critère de Coulomb, les mêmes raisonnements que ceux développés au § 2.5 à propos du matériau de Tresca. Par contre l'interprétation et l'énoncé du résultat ainsi obtenu ne sont plus aussi simples : le théorème de Drucker-Radenkovic fait en effet référence à la notion d'écoulement plastique libre, il suppose que le matériau constitutif est *plastique*, et même, puisque seul le caractère non-standard du contact à l'interface est pris en compte, il suppose que le matériau constitutif du bloc obéit au principe du travail plastique maximal.

## 2.9 - COMPRESSION AVEC CONFINEMENT

### 2.9.1. - PRÉSENTATION

On se propose maintenant d'examiner le même problème de l'écrasement d'un bloc cylindrique présenté au § 2.1, dans le cas où l'échantillon est soumis à une pression de confinement  $p$ . Plus précisément (figure 8) : une pression uniforme  $p$  est appliquée au contour du cylindre de section  $S$  et de hauteur  $h$  (faces latérales et bases), tandis que les plateaux supposés parfaitement rigides et lisses ont une vitesse de rapprochement relative parallèle à  $Oz$  et d'amplitude  $U$ . Le système est ainsi soumis à un mode de chargement à deux paramètres où l'on a :

$$(2.39) \quad \begin{cases} Q_1 = F & \dot{q}_1 = U \\ Q_2 = p & \dot{q}_2 = -\Delta \end{cases}$$

$\Delta$  désignant la vitesse de variation du volume du spécimen :

$$(2.40) \quad \Delta = dV/dt \quad (V, \text{volume du spécimen}),$$

tandis que  $F$  est, comme au § 2.1, l'intensité de la force additionnelle de compression selon  $Oz$  exercée par chaque plateau.

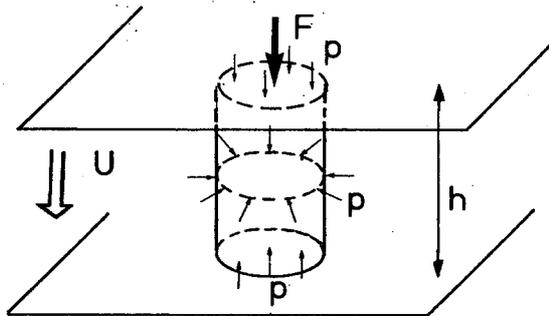


Figure 8 :  
Compression avec  
confinement.

Il s'agit donc de la généralisation du problème étudié aux paragraphes précédents. On examinera d'abord le cas des échantillons en matériaux de Tresca ou de von Mises, puis celui de l'échantillon en matériau régi par le critère de Coulomb qui est, évidemment, celui pour lequel le problème présente un intérêt pratique essentiel.

2.9.2. - ÉCHANTILLONS EN MATÉRIAUX DE TRESCA ET DE VON MISES

---

2.9.2.1. - Théorème

On va démontrer le théorème suivant :

$$(2.41) \quad \begin{array}{ccc} Q \in [0, Q^+] & & \underline{Q} = (Q, p) \in K, \forall p \\ \text{pour la compression} & \longleftrightarrow & \text{pour la compression} \\ \text{simple} & & \text{avec confinement} \end{array}$$

En effet :

$$\diamond \quad Q \in [0, Q^+] \iff \exists \underline{\sigma} \left\{ \begin{array}{l} \text{statiquement admissible avec } Q \text{ pour} \\ \text{le problème du § 2.1, et tel que :} \\ f[\underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0, \quad \forall \underline{x} \in V \end{array} \right.$$

où  $f$  est la fonction de charge de Tresca ou de Von Mises.

Soit alors  $\underline{\sigma}_p$  défini par :

$$(2.42) \quad \underline{\sigma}_p = \underline{\sigma} - p \underline{1},$$

il est clair que  $\underline{\sigma}_p$  est statiquement admissible pour le problème de la figure 8, avec :

$$Q_1 = Q \quad \text{et} \quad Q_2 = p,$$

et que l'on a :

$$(2.43) \quad f[\underline{\sigma}_p(\underline{x})] = f[\underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0, \quad \forall \underline{x} \in V;$$

♦ la réciproque, partant de  $\underline{Q} \in K$ , se démontre de la même manière.

2.9.2.2. - Conséquences

En conséquence de (2.41), les chargements extrêmes pour la compression avec confinement sont définis par (figure 9) :

♦ *Matériau de Tresca*

$$(2.16)_p \quad \underline{Q}^+ = (\sigma_0 S, p), \quad \forall p, \quad \forall h \quad (1)$$

♦ *Matériau de von Mises*

$$(2.20)_p \quad \underline{Q}^+ = (k \sqrt{3} S, p), \quad \forall p, \quad \forall h .$$

On remarque que les résultats énoncés sont valables que  $p$  soit une pression ou une traction, toutefois seul le cas  $p > 0$  (pression) est réaliste et est représenté sur la figure 9.

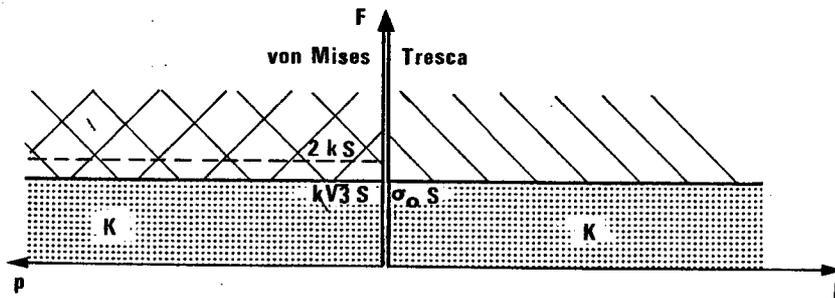


Figure 9 : Matériaux de Tresca et de von Mises en compression avec confinement.

#### 2.9.2.3. - Remarque

Le théorème (2.41) permet donc, sans raisonnement ni calcul supplémentaire, d'obtenir le domaine  $K$  à partir du cas, déjà traité, de la compression sans confinement. Ce domaine pourrait aussi être construit par les méthodes statique et cinématique en suivant les raisonnements homologues de ceux développés pour le cas "sans confinement". On verrait que :

♦ pour la méthode statique, il suffit de modifier les champs de contrainte (2.1) en appliquant (2.42), ce qui conduit aux résultats :

*matériau de Tresca,*

$$(2.2)_p \quad \underline{Q} = (\sigma_0 S, p) \in K, \quad \forall p ,$$

*matériau de von Mises,*

$$(2.3)_p \quad \underline{Q} = (k \sqrt{3} S, p) \in K, \quad \forall p .$$

(1) Lorsqu'il y a lieu, les formules sont repérées par les mêmes numéros que leurs homologues écrites dans l'étude du cas sans confinement, suivis d'un indice "p".

♦ pour la méthode cinématique, en utilisant les mêmes champs de vitesse qu'au § 2.3, la seule modification concerne l'expression de la puissance des forces extérieures puisque  $\underline{Q}$  et  $\dot{\underline{q}}$  sont maintenant des vecteurs, ce qui conduit à l'interprétation des formules homologues de (2.6), (2.7), etc., dans l'espace des paramètres de chargement comme représenté à la figure 9.

#### 2.9.2.4. - Cas du contact avec frottement

On montrerait sans difficulté par les calculs et les raisonnements homologues de ceux du § 2.5, que l'utilisation de la méthode d'approche par l'extérieur d'une part et du théorème de Drucker-Radenkovic de l'autre conduisent à des bornes pour les charges  $F_\ell$  d'écoulement plastique libre, indépendantes de la pression de confinement  $p$ .

#### 2.9.3. - ÉCHANTILLON EN MATÉRIAU RÉGI PAR LE CRITÈRE DE COULOMB

---

##### 2.9.3.1. - Théorème

On va démontrer le théorème suivant <sup>(1)</sup> :

$$(2.44) \quad \left. \begin{array}{l} Q \in [0, Q^+] \\ \text{pour la compression} \\ \text{simple} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \underline{Q} = \left( Q \left( 1 + \frac{p \operatorname{tg} \phi}{C} \right), p \right) \in K, \quad \forall p \geq 0 \\ \text{pour la compression} \\ \text{avec confinement} \end{array} \right.$$

En effet :

$$\diamond \quad Q \in [0, Q^+] \iff \exists \underline{\sigma} \left\{ \begin{array}{l} \text{statiquement admissible avec } Q \text{ pour le} \\ \text{problème du § 2.1, et tel que :} \\ f[\underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0, \quad \forall \underline{x} \in V \end{array} \right.$$

où  $f$  est le critère de Coulomb :

$$f[\underline{\sigma}(\underline{x})] = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \left\{ \sigma_i(\underline{x}) \cdot (1 + \sin \phi) - \sigma_j(\underline{x}) \cdot (1 - \sin \phi) - 2 C \cos \phi \right\} ;$$

---

<sup>(1)</sup> En fait les résultats sont valables pour  $p \geq -C \cotg \phi = -H$ , mais seul le cas  $p \geq 0$  (pression) sera considéré comme réaliste.

soit alors  $\underline{\underline{\sigma}}_p$  défini par :

$$(2.45) \quad \underline{\underline{\sigma}}_p = \underline{\underline{\sigma}} \left( 1 + \frac{p \operatorname{tg} \phi}{C} \right) - p \underline{\underline{1}},$$

il est clair que  $\underline{\underline{\sigma}}_p$  est statiquement admissible pour le problème de la figure 8 avec :

$$Q_1 = Q \left( 1 + \frac{p \operatorname{tg} \phi}{C} \right) \quad \text{et} \quad Q_2 = p,$$

de plus on a alors avec le critère de Coulomb, si  $p \geq -C \cotg \phi$ ,

$$(2.46) \quad f[\underline{\underline{\sigma}}_p(\underline{x})] = \left( 1 + \frac{p \operatorname{tg} \phi}{C} \right) f[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})] \leq 0, \quad \forall \underline{x} \in V;$$

♦ la réciproque, partant de  $\underline{Q} \in K$ , se démontre de la même manière.

#### 2.9.3.2. - Conséquences

Il résulte de (2.44) que les chargements extrêmes pour la compression avec confinement sont définis par (figure 10) :

$$(2.47) \quad \underline{Q}^+ = \left( 2(C + p \operatorname{tg} \phi) \cdot \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2) \cdot S, p \right), \quad \forall p \geq 0;$$

ce qui met en évidence l'équivalence "pression de confinement-cohésion" : c'est le *théorème des états correspondants* en mécanique des sols.

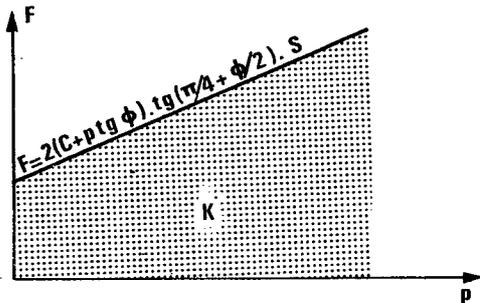


Figure 10 : Matériau régi par le critère de Coulomb : compression avec confinement.

#### 2.9.3.3. - Remarque

Comme au § 2.9.2., on a pu par le théorème (2.44) obtenir  $K$  pour l'expérience avec confinement, à partir du cas déjà traité de la compression sans confinement. Il est clair que ce domaine peut aussi être construit en suivant les

raisonnements homologues de ceux développés au § 7.8. Alors que l'application de l'approche par l'intérieur est évidente en modifiant le champ  $\underline{\sigma}$  défini par (2.1) selon (2.45), il n'est pas sans intérêt d'examiner l'approche par l'extérieur, par exemple en faisant usage du champ de vitesse de déformation uniforme du § 2.8.4 ; on a alors :

$$\text{(2.37)} \quad P(\underline{v}) = 2 C U S \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$$

et :  $\dot{p}$

$$\text{(2.35)} \quad \operatorname{trd}(\underline{x}) = 2(U/h) \sin\phi / (1 - \sin\phi)$$

d'où :

$$\text{(2.48)} \quad \Delta = 2 U S \sin\phi / (1 - \sin\phi)$$

ce qui conduit à :

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) = F U - 2 p U S \sin\phi / (1 - \sin\phi) ,$$

de là, il vient, comme représenté à la figure 10 :

$$K \subset \left\{ F - 2(C + p \operatorname{tg}\phi) \cdot \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2) S \leq 0 \right\} .$$

---

### 3 - POINÇONNEMENT D'UN DEMI-ESPACE

---

#### 3.1 - POSITION DU PROBLÈME

On étudie maintenant le poinçonnement d'un demi-espace constitué d'un matériau homogène non-pesant dont le critère de résistance est celui de von Mises. Ce problème est posé dans la forme indiquée au chapitre V (§ 5.1) à propos de la théorie du calcul à la rupture en déformation plane (figure 11)

- ♦ le "demi-espace" est la "tranche" d'épaisseur  $\ell$  selon Oz définie par :

$$-\infty < x < +\infty, \quad y \leq 0, \quad -\ell \leq z \leq 0;$$

- ♦ cette tranche est maintenue sans frottement entre deux parois indéformables parallèles à Oxy ( $z = -\ell$  et  $z = 0$ ) ;
- ♦ elle est soumise à l'action d'un poinçon indéformable, lisse, de largeur B, de longueur  $\ell$  parallèlement à Oz, dont le mouvement est astreint à être parallèle à Oxy ;
- ♦ la surface de la tranche ( $y = 0$ ), non soumise à l'action du poinçon, est libre ;
- ♦ les vitesses à l'infini sont nulles.

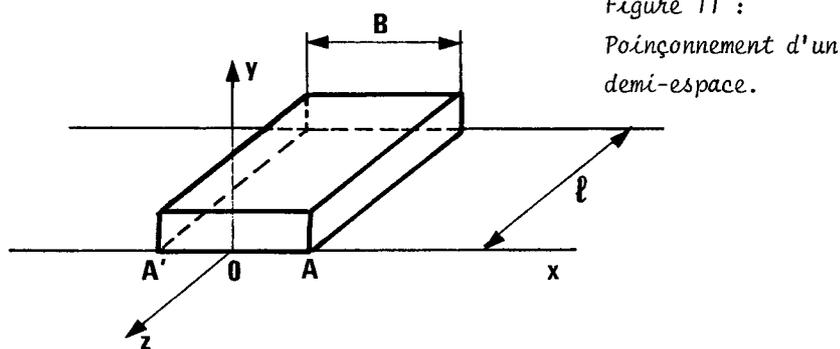


Figure 11 :  
Poinçonnement d'un  
demi-espace.

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$(3.1) \quad \sigma_{zx} = T_x = 0, \quad \sigma_{zy} = T_y = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{pour } z = -\ell \text{ ou } z = 0$$

$$(3.2) \quad v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{pour } y \leq 0 \text{ et } (x^2 + y^2)^{1/2} = \infty$$

$$(3.3) \quad \sigma_{yx} = T_x = 0, \quad \sigma_{yy} = T_y = 0, \quad \sigma_{yz} = T_z = 0 \quad \text{pour } y = 0 \text{ et } |x| > B/2$$

$$\sigma_{yx} = T_x = 0, \quad \sigma_{yz} = T_z = 0, \quad v_y = \dot{\lambda} + \dot{\theta}x$$

$$(3.4) \quad \dot{\lambda} \text{ et } \dot{\theta} \text{ constantes quelconques}$$

$$\text{pour } y = 0 \text{ et } |x| \leq B/2 .$$

Les conditions (3.4) correspondent à une interface dont le critère de résistance ne permet aucun effort tangentiel mais admet les efforts normaux quels que soient leur grandeur et leur signe : par l'équation portant sur  $v_y$  on a mis sous forme de condition à la limite le résultat auquel conduit la condition  $\pi(\underline{n}, \underline{V}) < +\infty$  pour cette interface. Ce critère de résistance à l'interface a été choisi pour sa commodité dans l'exposé, en dépit de son caractère irréaliste, car l'on montrera au § 3.5 que les résultats obtenus dans ce cas sont valables pour toute autre condition de résistance à l'interface.

Le système étudié est ainsi soumis à un mode de chargement à deux paramètres ; on choisira :

$$(3.5) \quad Q_1 = -\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^0 dz \int_{-B/2}^{B/2} \sigma_{yy}(x, 0, z) dx = F, \quad \dot{q}_1 = -\ell \dot{\lambda} = -\ell v_y(0, 0, z)$$

$$(3.6) \quad Q_2 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^0 dz \int_{-B/2}^{B/2} x \sigma_{yy}(x, 0, z) dx = M, \quad \dot{q}_2 = \ell \dot{\theta} .$$

Rappelons que selon la théorie du calcul à la rupture en déformation plane exposée au chapitre V (§ 5), le problème ainsi posé peut être traité du point de vue bidimensionnel, tout en sachant qu'il y aurait lieu de se préoccuper *in fine* de la construction des solutions complètes tridimensionnelles à partir d'éventuelles solutions complètes bidimensionnelles trouvées. On a vu aussi que, pour cette analyse bidimensionnelle, le critère de von Mises adopté ici pour caractériser la résistance du milieu est équivalent au critère de Tresca. Nous préférerons toutefois traiter le problème directement du point de vue tridimensionnel par la construction de champs de contrainte et de vitesse tridimensionnels ; on remarquera que les champs utilisés seront en fait :

- pour les vitesses, des champs en déformation plane,
- pour les contraintes, des champs obtenus en "complétant" des champs bidimensionnels en équilibre et respectant le critère bidimensionnel de "résistance en déformation plane", de façon à ce qu'ils soient en équilibre et respectent le critère de résistance tridimensionnel ;

les résultats qui seront ainsi obtenus avec le critère de von Mises, seront également valables avec le critère de Tresca en remplaçant  $k$  par  $\sigma_0/2$  dans les formules : cela est évident pour l'approche par l'extérieur, quant à l'approche par l'intérieur, on vérifiera que le champ de contrainte "complété" respecte bien, après le changement de notation indiqué, le critère de résistance de Tresca.

Tel qu'il est posé à la figure 11, avec les conditions aux limites explicitées en (3.1) à (3.4), le problème étudié correspond aux essais idéaux sur modèles réduits par lesquels on tente de réaliser des expériences en déformation plane ; mais, ainsi qu'on l'a expliqué au chapitre V (§ 5.7), il peut aussi être considéré comme représentant le cas du système cylindrique parallèlement à Oz et illimité dans cette direction et par suite, de façon plus pratique, le cas d'un poinçon rectangulaire de longueur  $L$  selon Oz, grande par rapport à la largeur  $B$ , et agissant sur un demi-espace (en négligeant les effets d'extrémités et en s'interressant à la section "courante" du système). Ceci vient justifier le choix fait pour les paramètres de chargements  $Q_1$  et  $Q_2$  ( $F$  et  $M$  : résultante verticale et moment autour de Oz, par unité de longueur selon Oz), choix conforme également à ce qui avait été fait au chapitre V (§ 5.3.1.) de façon à avoir pour les problèmes tridimensionnel et bidimensionnel homologues les mêmes paramètres de chargement.

### 3.2 - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR

#### 3.2.1. - CHAMP DE CONTRAINTE DISCONTINU A TROIS ZONES

Le champ de contrainte utilisé est représenté à la figure 12 a, et défini par :

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{zones 1 et 1'} : \sigma_{xx} = -2k, \sigma_{yy} = 0, \sigma_{zz} = -k, \text{ autres } \sigma_{ij} = 0 \\ \text{zone 2} : \sigma_{xx} = -2k, \sigma_{yy} = -4k, \sigma_{zz} = -3k, \text{ autres } \sigma_{ij} = 0. \end{array} \right.$$

Ce champ est statiquement admissible dans le mode de chargement avec  $\underline{Q}$  défini par :

$$(3.8) \quad Q_1 = F = 4 B k \quad \text{et} \quad Q_2 = M = 0 .$$

Considérant le trajet de chargement radial caractérisé par :

$$(3.9) \quad M = 0 ,$$

on en déduit par le chargement extrême  $\underline{Q}^+$  sur ce trajet, la minoration :

$$(3.10) \quad F^+ \geq 4 B k$$

### 3.2.2. - CHAMP DE CONTRAINTE DISCONTINU A SIX ZONES

---

On utilise le champ représenté à la figure 12 b et défini par :

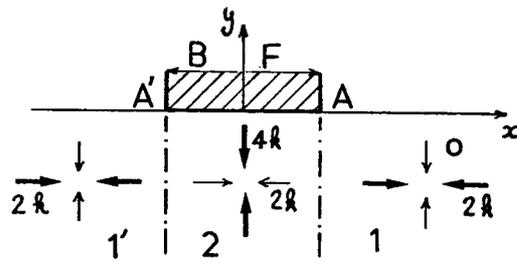
$$(3.11) \quad \begin{array}{l} \text{zones 1 et 1'} : \sigma_{xx} = -2k, \sigma_{yy} = 0, \sigma_{zz} = -k, \text{ autres } \sigma_{ij} = 0 \\ \text{zone 2} \\ \text{(resp. 2')} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -k(1 + \sqrt{2}) = \sigma_{yy}, \sigma_{xy} = k \text{ (resp. } = -k) \\ \sigma_{zz} = -k(1 + \sqrt{2}) \quad \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{array} \right. \\ \text{zone 3} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -2k\sqrt{2}, \sigma_{yy} = -2k(1 + \sqrt{2}), \sigma_{zz} = -k(1 + 2\sqrt{2}) \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 \end{array} \right. \\ \text{zone 4} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -2k \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{zz} = -k \\ \text{autres } \sigma_{ij} = 0 . \end{array} \right. \end{array}$$

Ce champ est statiquement admissible dans le mode de chargement avec  $\underline{Q}$  défini par :

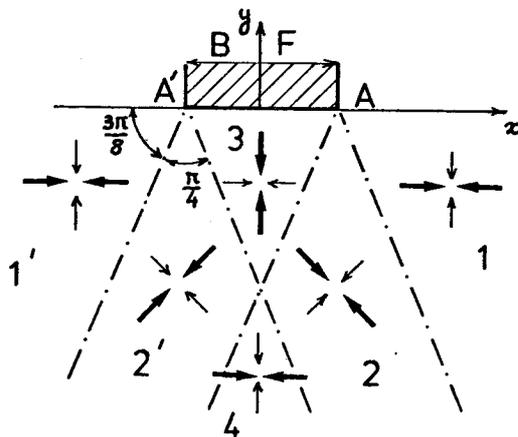
$$(3.12) \quad Q_1 = 2(1 + \sqrt{2})B k \approx 4,83 B k , \quad M = 0 .$$

D'où, sur le trajet radial (3.9) :

$$(3.13) \quad F^+ \geq 4,83 B k .$$



a) Champ de contrainte  
à 3 zones ;



b) Champ de contrainte  
à 6 zones ;

Figure 12 a) et b) : Poinçonnement d'un demi-espace : approche par l'intérieur.

### 3.3. - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR

#### 3.3.1. - CHAMP DE VITESSE PAR BLOCS EN TRANSLATION

On utilise le champ de vitesse en déformation plane parallèlement à  $Oxy$ , défini par des translations de blocs cylindriques parallèles à  $Oz$  : ces blocs, comme représenté à la figure 13 a), ont une section en forme de triangle isocèle (l'angle au sommet  $2\alpha$  est le paramètre de la classe de champs utilisée).

Le bloc 1 est animé d'une vitesse de translation verticale descendante de module  $U$  ; les vitesses des autres blocs sont obtenues par construction de l'hodographe (figure 13 b) en supposant que les discontinuités de vitesse entre les blocs eux-mêmes et entre ceux-ci et le reste du milieu, immobile, sont tangentes aux surfaces de discontinuité : cette dernière condition est, on le sait, une conséquence du fait que, pour le critère de von Mises, on a (avec les notations du chapitre II § 2.2) :  $\pi(\underline{n} ; \underline{v}) = +\infty$  si  $\underline{v} \cdot \underline{n} \neq 0$ . La vitesse du poinçon est identique à celle du bloc 1.

On a alors :

$$(3.14) \quad Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) = F.U.\ell$$

$$(3.15) \quad P(\underline{v}) = 2 B k U \ell \left[ \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right]$$

(glissement le long des faces AB, AC, BC, CD et symétriques).

On en déduit pour le domaine des chargements potentiellement supportables dans l'espace (F, M) le résultat :

$$(3.16) \quad K \subset \left\{ F - 2 B k \left[ \operatorname{tg} \alpha + 1/\sin \alpha \cos \alpha \right] \leq 0 \right\} ;$$

l'optimum du second membre de (3.16) par rapport à  $\alpha$  est obtenu pour  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}/2$  et conduit à :

$$(3.17) \quad K \subset \left\{ F - 5,66 B k \leq 0 \right\} .$$

En particulier, on voit que sur le trajet de chargement radial (3.9), on aura :

$$(3.18) \quad F^+ \leq 5,66 B k .$$

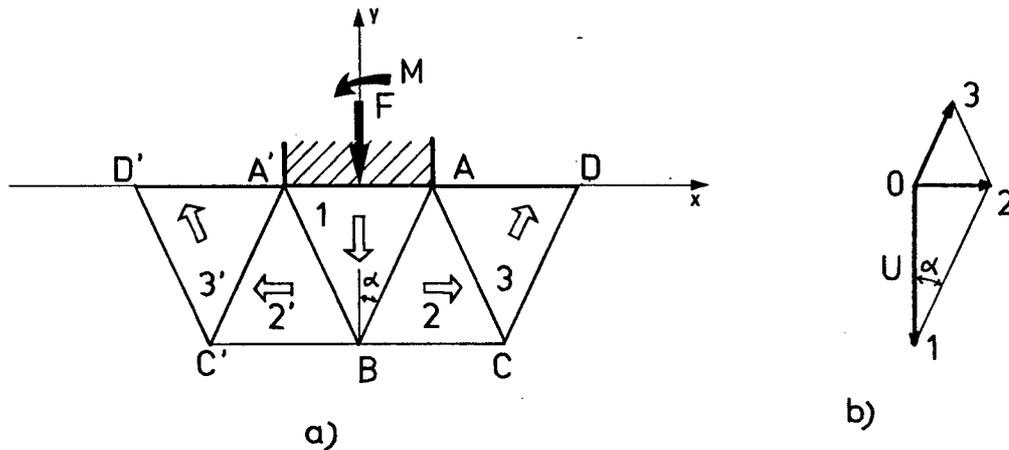


Figure 13 : Poinçonnement d'un demi-espace, approche par l'extérieur :  
 a) Champ de vitesse par blocs isocèles en translation      b) Hodographe.

Il est clair que ce mécanisme par blocs pourrait susciter, comme celui présenté au § 2.5.2, des interrogations qui touchent à la notion même de champs de vitesse cinématiquement admissibles (conditions de continuité à écrire aux arêtes des blocs, c'est-à-dire aux sommets des triangles de la figure 13 a). Sur ce sujet nous renvoyons le lecteur à la remarque générale faite au § 2.6.

On doit remarquer enfin que l'étude de ce mécanisme a été particulièrement simple en raison même de la géométrie choisie pour les blocs en translations, qui ne dépend que du paramètre  $\alpha$  ; malgré cette simplicité un résultat fort intéressant a pu être obtenu puisqu'il est ainsi possible, en rapprochant (3.13) et (3.18) d'encadrer  $F^+$  pour le trajet de chargement radial par :

$$(3.19) \quad 4,83 Bk \leq F^+ \leq 5,66 Bk$$

soit une évaluation à 8 % près. Cette constatation vient confirmer ce que nous avons annoncé au chapitre I (§ 4.8) à propos des résultats obtenus "à coups de serpe" (pour peu que ces derniers soient bien appliqués !).

Il est clair que le mécanisme de la figure 13 peut être généralisé comme indiqué à la figure 14 : les blocs 2 et 3 (et symétriques) ne sont plus des triangles isocèles, BC est supposé parallèle à Ox, et la géométrie dépend ainsi des 3 paramètres ( $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ).

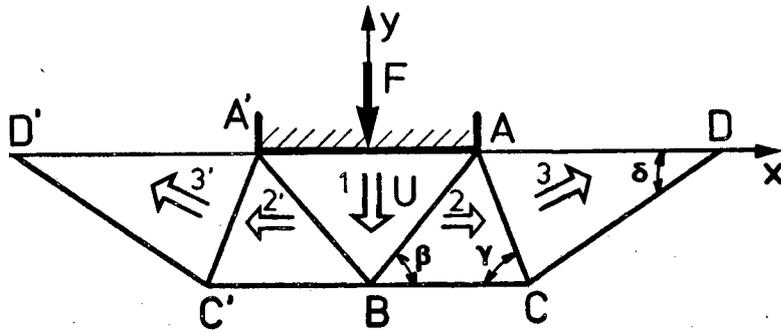


Figure 14 : Poinçonnement d'un demi-espace, approche par l'extérieur : champ de vitesse par blocs en translations.

Il convient alors de procéder, comme plus haut, à la minimisation de  $P(\underline{v})$  à  $U$  donné sur cette classe de champs de vitesse (c'est à dire minimisation par rapport à  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ ). L'optimum est atteint pour :  $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{2}$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{7}$ ,  $\operatorname{tg} \delta = \sqrt{7}/3$ , soit ( $\beta = 54,^\circ 7$ ,  $\gamma = 69,^\circ 3$ ,  $\delta = 41,^\circ 4$ ) et l'on aboutit à la formule homologue de (3.17) :

$$(3.20) \quad K < \left\{ F - 5,47 B k \leq 0 \right\},$$

d'où pour le trajet de chargement radial :

$$(3.21) \quad F^+ \leq 5,47 B k,$$

améliorant ainsi sensiblement les résultats précédents.

On peut aussi faire intervenir un paramètre supplémentaire dans la géométrie du mécanisme en ne fixant pas *a priori* l'inclinaison de  $BC$ , et aussi multiplier le nombre de blocs ; ces généralisations ont été étudiées par Tristán-López (1981) afin, plus généralement, de traiter le cas où le matériau constitutif est anisotrope.

### 3.3.2. - CHAMP DE VITESSE PAR BLOC EN ROTATION

On utilise le champ de vitesse en déformation plane défini par la rotation autour d'un axe  $\Omega z$ , d'un bloc cylindrique parallèle à  $Oz$ . La vitesse angulaire est  $\omega$ . Le bloc cylindrique a pour section dans le plan  $Oxy$  un cercle de centre  $\Omega$  de façon à ce que la discontinuité de vitesse entre le bloc et le reste du milieu, immobile, soit tangente à la surface de discontinuité (puisque  $\pi(\underline{n}; [\underline{v}]) = +\infty$  si  $[\underline{v}] \cdot \underline{n} \neq 0$  pour le critère de von Mises). Les notations sont indiquées sur la figure 15 ; le cercle est supposé passer par le coin du poinçon le plus éloigné de  $\Omega$ , et le poinçon est animé du même mouvement que le bloc (il n'y a pas de glissement le long de  $A'A$ ). Cette classe de champs de vitesse dépend donc des paramètres  $\alpha$ ,  $R$  et  $\omega$ .

On a alors :

$$(3.22) \quad P(\underline{v}) = 2 \alpha |\omega| R^2 k \ell$$

$$(3.23) \quad \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) = F \cdot \omega (R \sin \alpha - B/2) \ell + M \omega \ell ;$$

en se restreignant au cas représenté sur la figure 15 où  $\omega$  est positif, on en déduit pour les chargements potentiellement supportables :

$$(3.24) \quad K \subset \left\{ F \cdot (R \sin \alpha - B/2) + M - 2\alpha R^2 k \leq 0 \right\}$$

Pour le trajet de chargement radial (3.9), (3.24) fournit alors la majoration :

$$(3.25) \quad F^+ \leq 2\alpha R^2 k / (R \sin \alpha - B/2) \quad \text{si } (R \sin \alpha - B/2) > 0 ;$$

le second membre en est minimum par rapport à R, pour  $R \sin \alpha = B$ , (ce qui correspond au cas où  $\Omega$  est à l'aplomb de A), et l'on a :

$$(3.26) \quad F^+ \leq 4 B k \alpha / \sin^2 \alpha$$

minoration qui est minimale pour  $\text{tg } \alpha = 2\alpha$ , d'où

$$(3.27) \quad F^+ \leq 5,53 B k .$$

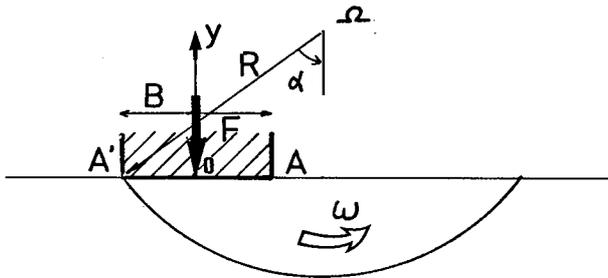


Figure 15 : Poinçonnement d'un demi-espace, approche par l'extérieur : champ de vitesse par cercle de glissement.

On remarque qu'en additionnant le champ de vitesse représenté à la figure 15 et son symétrique par rapport à Oy, on obtient un nouveau champ dans lequel le bloc 1 est animé d'un mouvement de translation verticale et les blocs 2 et 2' sont animés de mouvements de rotations symétriques autour de  $\Omega$  et  $\Omega'$  respectivement (figure 16).

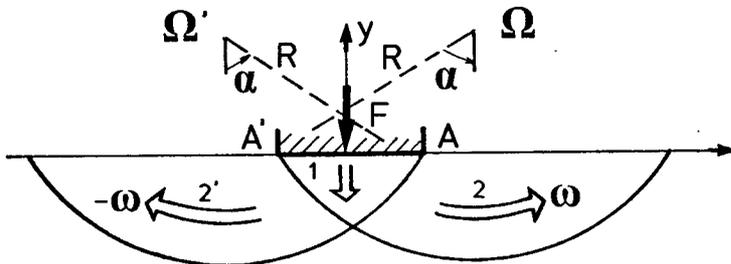


Figure 16 : Poinçonnement d'un demi-espace, approche par l'extérieur : champ de vitesse avec blocs en translation et rotations.

Dans ce champ de vitesse on a évidemment :

$$P(\underline{v}) = 4\alpha |\omega| R^2 k \ell$$

$$Q \cdot \underline{q}(\underline{v}) = F \cdot 2\omega(R \sin \alpha - B/2)\ell$$

d'où, de la même manière que ci-dessus :

$$(3.28) \quad K \subset \left\{ F(R \sin \alpha - B/2) - 2\alpha R^2 k \leq 0 \right\}$$

et la même minimisation par rapport à  $R$  et  $\alpha$  conduit à :

$$(3.29) \quad K \subset \left\{ F - 5,53 B k \leq 0 \right\}$$

ce qui améliore le résultat (3.27) car celui-ci ne concernait que le cas du trajet de chargement radial.

#### 3.4. - COMMENTAIRES ET AMÉLIORATION DE L'ENCADREMENT

Les résultats obtenus au moyen des champs de contrainte ou de vitesse simples présentés aux paragraphes précédents permettent d'encadrer  $F^+$  pour le trajet de chargement radial ( $M = 0$ ) par :

$$(3.30) \quad 4,83 B k \leq F^+ \leq 5,53 B k .$$

En raffinant le mécanisme par blocs en translations on a vu qu'il est possible de ramener la borne supérieure à  $5,47 B k$  .

La borne inférieure peut être améliorée en utilisant des champs de contrainte discontinus où l'on augmente le nombre de zones ; ainsi le champ proposé par Shield et Drucker (1953), ou celui de la figure 17, permettent de relever la borne inférieure à  $5 B k$ , d'où :

$$(3.31) \quad 5 B k \leq F^+ \leq 5,47 B k .$$

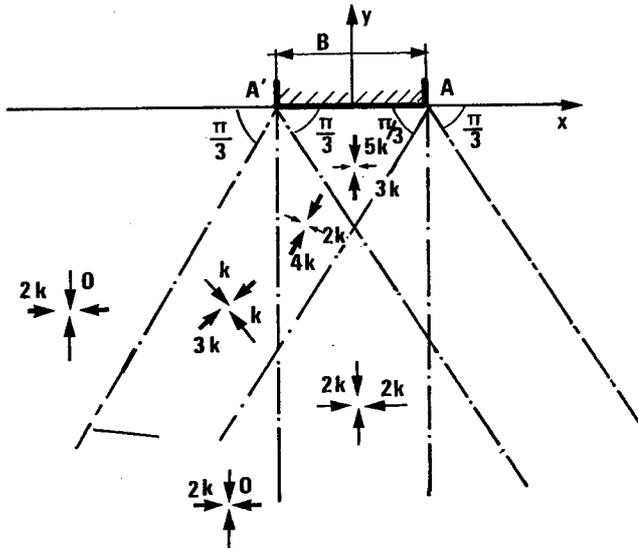


Figure 17 : Poinçonnement d'un demi-espace, approche par l'intérieur ; champ de contrainte discontinu à 10 zones.

On remarque, en considérant les figures 12 a, 12 b, et 17 que c'est l'accroissement du nombre de lignes de discontinuité issues des points A' et A qui, en augmentant le nombre de zones à champ de contrainte homogène pour passer de la condition à la limite sur  $x'A'$  et Ax (surfaces libres) à la répartition de contraintes sous A'A, permet d'améliorer la borne inférieure obtenue pour  $F^+$ . La construction de ce type de champs se fait par exemple en utilisant la représentation de Mohr pour les contraintes (cf notamment : Mandel, 1966) : ceci est en particulier très commode pour les zones situées autour des points A' et A, mais on ne doit pas perdre de vue que la construction est à faire dans toutes les zones ce qui complique assez rapidement le problème. On notera enfin l'intérêt de la représentation des directions principales des champs de contrainte dans les différentes zones, telle qu'elle a été faite sur les figures 12 et 17, qui met en évidence la rotation de ces directions quand on chemine depuis la surface libre jusque sous le poinçon.

Une meilleure borne supérieure pour  $F^+$  peut être obtenue en utilisant le champ de vitesse en déformation plane parallèlement à Oxy représenté à la figure 18 (dans Oxy) :

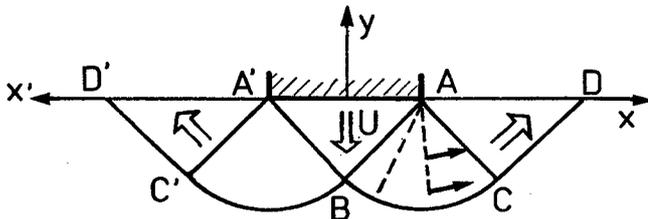


Figure 18 : Poinçonnement d'un demi-espace, approche par l'extérieur : champ de vitesse avec cisaillement pur dans ABC et A'BC'.

Ce champ de vitesse, symétrique par rapport à  $Oy$ , est défini comme suit :

- ♦ dans  $A'BA$  (triangle rectangle isocèle) : translation en bloc, verticale, à la vitesse  $U$
- ♦ dans  $ABC$  (secteur circulaire d'ouverture  $\pi/2$ ), le champ de vitesse s'écrit en coordonnées polaires  $(r, \omega)$  de centre  $A$  :

$$(3.32) \quad v_r = 0 \quad v_\omega = U \sqrt{2}/2 \quad (v_z = 0)$$

- ♦ dans  $ACD$  (triangle rectangle isocèle) : translation en bloc, parallèle à  $\underline{CD}$ , de vitesse  $U \sqrt{2}/2$ .
- ♦ les vitesses dans  $A'BC'$  et  $A'C'D'$  sont symétriques des précédentes par rapport à  $Oy$
- ♦  $\underline{v} \equiv 0$  dans le reste du demi-espace.

Il y a donc des discontinuités de vitesse au franchissement de  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  et symétriques. On vérifie que ces discontinuités sont tangentielles ; elles ont pour module  $U \sqrt{2}/2$ .

Il n'y a pas de déformation des blocs  $A'AB$  et  $ACD$  (et symétrique).

Dans  $ABC$  la vitesse de déformation  $\underline{d}$  a pour composantes en coordonnées polaires  $(r, \omega)$  de centre  $A$  :

$$(3.33) \quad d_{rr} = 0, \quad d_{\omega\omega} = 0, \quad d_{r\omega} = -v_\omega/2r = -U \sqrt{2}/4r = d_{\omega r}$$

autres  $d_{ij} = 0$  ;

il s'agit d'un cisaillement pur ; on a :  $\text{tr } \underline{d}(\underline{x}) = 0$ .

Pour l'application de la méthode d'approche par l'extérieur on a :

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) = F.U \ell,$$

$P(\underline{v})$  se compose de deux contributions : l'une due aux discontinuités de vitesse le long de  $A'BCD$  et  $ABC'D'$ , l'autre au cisaillement pur dans les secteurs circulaires.

En tenant compte des symétries et en se reportant aux expressions de  $\pi(\underline{n}(\underline{x}), \underline{V}(\underline{x}))$  et  $\pi(\underline{d}(\underline{x}))$  données au chapitre II, § 2.2, il vient :

$$P(\underline{v}) = B k U \ell(2 + \pi/2) + B k U \ell \pi/2$$

On en déduit la formule :

$$(3.34) \quad K \subset \left\{ F - (\pi + 2)B k \leq 0 \right\} ,$$

d'où, pour le trajet de chargement radial, la majoration :

$$(3.35) \quad F^+ \leq (\pi + 2)B k = 5,14 B k .$$

Cette majoration est en fait la *valeur exacte* de la charge extrême pour le trajet de chargement radial ( $M = 0$ ) : plusieurs autres champs de vitesse, analogues à celui de la figure 18 dû à Prandtl (1920, 1923), peuvent être construits qui conduisent au même résultat (3.34), cf. (Hill, 1950), (Rychlewski, 1966 et 1967); et d'autre part des champs de contrainte ont été construits qui permettent d'équilibrer  $F = (\pi + 2)B k$ ,  $M = 0$ , en respectant le critère de résistance (Bishop, 1953), (Shield, 1954), (Sayir et Ziegler, 1968) ; on obtient ainsi :

$$(3.36) \quad F^+ = (\pi + 2)B k .$$

Les problèmes pour lesquels ce type de détermination exacte est possible sont rares. Aussi des méthodes telles que celles présentées dans les paragraphes précédents se révèlent-elles souvent très fécondes : on en apprécie la rapidité et le fait qu'elles ne nécessitent pas la connaissance d'une théorie raffinée.

### 3.5 - REMARQUES FINALES SUR CE PROBLÈME

1° Il est clair que le mode de déformation représenté à la figure 18 pourrait susciter à propos du mouvement du bloc A'BA la même question que celle déjà posée pour celui de la figure 13 ; nous renvoyons à nouveau le lecteur à la réponse générale faite au § 2.6.

2° Comme on l'a indiqué au § 3.1, à propos des conditions aux limites, l'interface A'A a été supposée lisse et sans limitation sur la contrainte normale quel que soit son signe (donc : non limitée en traction). Du point de vue du calcul à la rupture, l'approche par l'intérieur menée tout au long de l'étude précédente demeure valable pour toute autre condition classique de résistance à l'interface : en effet les champs de contrainte construits correspondent à des efforts normaux compressifs sous A'A ; quant à l'approche par l'extérieur elle demeure également valable car aucun des champs de vitesse construits n'introduit de discontinuité de vitesse à l'interface.

Ainsi les conclusions tirées sont intégralement maintenues quelles que soit la condition de résistance à l'interface A'A. En particulier,  $F^+ = (\pi + 2)Bk$  apparaîtra toujours comme *le chargement extrême dans le trajet de chargement radial* ( $M = 0$ ).

Il s'ensuit aussi que du point de vue des chargements d'écoulement plastique libre, dans le cas où le matériau constitutif du demi-espace serait considéré comme parfaitement-plastique standard et où la condition de frottement à l'interface A'A serait entièrement donnée, on obtient par utilisation des théorèmes de Drucker et Radenkovic (chapitre III "Analyse limite" § 6.4.7) que : les résultats obtenus plus haut dans le cas de l'interface lisse par les approches par l'intérieur et par l'extérieur pour les chargements extrêmes, se conservent avec la même signification pour les chargements d'écoulement plastique libre quelle que soit la condition de frottement à l'interface A'A. En particulier, le chargement d'écoulement plastique libre sur le trajet de chargement radial ( $M = 0$ ) est toujours égal à  $(\pi + 2)Bk$ .

Mais on insistera sur le fait que ce qui vient d'être dit ne vise que les résultats établis dans la présente étude et ne saurait être considéré comme vrai de façon générale pour toute approche par l'intérieur, toute approche par l'extérieur, et tous les chargements extrêmes.

Le domaine des chargements potentiellement supportables a pu être déterminé exactement dans le cas d'une interface lisse sans résistance à la traction (Salençon 1972, 1974) ; en posant :

$$F_0 = (\pi + 2)Bk , \quad M_0 = F_0 B/2 = (\pi + 2)B^2k/2$$

il est défini par :

$$(3.37) \quad (F/F_0)^2 - (F/F_0) + |M/M_0| \leq 0.$$

3° On peut, à partir des résultats déjà présentés, étudier sans nouveau calcul le même problème que celui posé au § 3.1, pour un matériau *pesant*, de poids volumique dirigé suivant Oy, égal à  $-\gamma$  ( $\gamma > 0$ ).  $\gamma$  constitue un nouveau paramètre de chargement pour le problème et l'on peut poser :

$$\underline{Q}_3 = (F, M, \gamma) ,$$

et désigner par  $K_3$  le domaine des chargements potentiellement supportables correspondants.

On démontre alors le théorème suivant :

$$(3.38) \quad (F, M) \in K \iff (F, M, \gamma) \in K_3, \quad \forall \gamma > 0 .$$

valable quelle que soit la condition de résistance à l'interface A'A.

En effet, on vérifie aisément pour toute condition classique de résistance à l'interface, que si  $\underline{\sigma}$  est un champ de contrainte statiquement admissible pour le problème initial ( $\gamma = 0$ ), en équilibre avec des valeurs F et M des paramètres de chargement et respectant les critères de résistance du matériau (von Mises) et de l'interface, alors le champ  $\underline{\sigma}'$  est défini par :

$$(3.39) \quad \underline{\sigma}'(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) + \gamma y \underline{1}$$

est statiquement admissible pour le nouveau problème ( $\gamma > 0$ ), en équilibre avec les valeurs F, M,  $\gamma$  des paramètres de chargement et respecte les mêmes critères de résistance du matériau et de l'interface. La réciproque est également facile à démontrer. Il en résulte donc l'équivalence (3.38) qui signifie que pour des conditions

de résistance du matériau (von Mises) et de l'interface données, le poids volumique n'a pas d'influence sur les chargements extrêmes (force normale, moment).

4° On peut aussi examiner le cas où la surface du demi-espace est soumise, à l'extérieur du poinçon, à une surcharge compressive uniformément répartie de densité  $\bar{\omega}$  ( $\bar{\omega} > 0$ ).  $\bar{\omega}$  constitue un paramètre de chargement supplémentaire pour le problème et, de façon analogue à ce qui a été fait plus haut, on posera :

$$\underline{Q}'_3 = (F, M, \bar{\omega}) ,$$

et on désignera par  $K'$  le domaine des chargements potentiellement supportables correspondants.

On démontre alors le théorème :

$$(3.40) \quad (F, M) \in K \implies (F + \bar{\omega}B, M, \bar{\omega}) \in K'_3 \quad \forall \bar{\omega} > 0 ,$$

valable quelle que soit la condition de résistance à l'interface A'A.

Pour ce faire, à partir de  $\underline{\sigma}$  champ statiquement admissible quelconque pour le problème initial ( $\bar{\omega} = 0$ ) en équilibre avec des valeurs  $(F, M)$  et respectant les critères de résistance, on introduit  $\underline{\sigma}'$  défini par :

$$(3.41) \quad \underline{\sigma}'(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) - \bar{\omega} \underline{l}$$

et on vérifie que  $\underline{\sigma}'$  est statiquement admissible pour le nouveau problème, en équilibre avec  $(F + \bar{\omega}B, M, \bar{\omega})$ , et respecte les mêmes critères de résistance du matériau (von Mises) et de l'interface. Par contre la réciproque n'est pas toujours vraie, sauf si le critère de résistance de l'interface n'impose aucune limitation sur la contrainte normale (c'est-à-dire admet les tractions). On en déduit donc l'implication (3.40) qui signifie que la surcharge a au moins un rôle additif sur la résultante dans les chargements extrêmes.

Une étude cas par cas des approches par l'intérieur et par l'extérieur utilisées permettra de vérifier, pour un chargement extrême  $(F, M)$  donné, si le chargement  $(F + \bar{\omega}B, M, \bar{\omega})$  est bien lui-même extrême dans le cas du demi-espace avec surcharge. C'est ainsi que l'on peut montrer que :

quelle que soit la condition de résistance à l'interface, le chargement  $((\pi + 2)Bk + \bar{\omega}B, 0, \bar{\omega})$  est extrême ; autrement dit, la surcharge joue toujours un rôle *purement additif* sur le chargement extrême dans le trajet de chargement radial ( $M = 0$ ).

---

## 4 - ANALYSE DE STABILITÉ D'UNE FOUILLE VERTICALE

---

### 4.1 - POSITION DU PROBLÈME

On étudie la "stabilité" d'une tranchée horizontale parallèle à  $Oz$ , dont la paroi est verticale et de hauteur  $h$  (figure 19). On suppose que cette tranchée est de longueur illimitée selon  $Oz$ , ou plus précisément que sa longueur selon  $Oz$  est grande devant  $h$ . Le matériau constitutif (sol) est homogène, de poids volumique  $\gamma$ , et isotrope.

Il s'agit d'un problème de calcul à la rupture dans lequel le chargement du système, dans la géométrie déterminée par  $h$ , est constitué des forces de volume dues à la gravité et proportionnelles à  $\gamma$ .

En application directe de la théorie du calcul à la rupture, l'analyse de stabilité de cet ouvrage consiste donc à déterminer, en fonction de  $h$  et des caractéristiques de résistance du matériau constitutif, la valeur extrême du paramètre de chargement  $\gamma$ , soit  $\gamma^+$ , et à lui comparer la valeur réelle  $\gamma$ . On verra dans la suite que l'on aboutira à une formulation équivalente portant sur la hauteur de la tranchée à  $\gamma$  fixé.

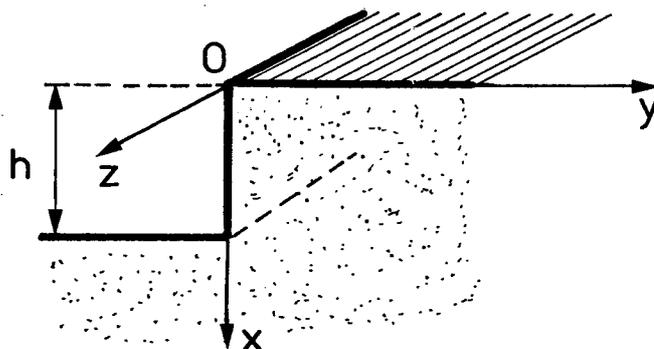


Figure 19 :  
Analyse de stabilité d'une  
fouille verticale.

En se reportant aux § 5.1, 5.2 et 5.7 du chapitre V consacré aux problèmes plans de calcul à la rupture on constate que les données de ce problème en permettent l'étude directement comme un problème de calcul à la rupture en déformation plane ; au § 5.7 notamment on voit que la notion de système cylindrique de

longueur illimitée selon Oz signifie en fait que dans  $P([\underline{v}_2]_D^{(x,y)})$  la "contribution supplémentaire" due aux effets d'extrémités doit être négligeable devant les termes donnés par les formules (5.9) et (5.10) : ceci correspond ici au fait que la longueur de la tranchée doit être grande devant une longueur caractéristique des zones déformées dans les champs de vitesse en déformation plane que l'on sera amené à utiliser, c'est-à-dire devant  $h$ .

Le problème sera donc étudié dans ce formalisme bidimensionnel.

Le paramètre de chargement, unique, est :

$$(4.1) \quad Q(\underline{\sigma}) = \gamma \quad ;$$

pour le problème plan, le paramètre de déformation associé est :

$$(4.2) \quad \dot{q}(\underline{v}) = \int_V \underline{v}_x dV \quad ;$$

dans ces formules  $V$  désigne le volume *bidimensionnel*,  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{v}$  les champs *bidimensionnels*. Il en sera ainsi dans toute la suite.

On examinera les cas où le matériau constitutif est régi par les critères de résistance suivants (écrits au chapitre II § 2.3, 2.6, 2.4 et 2.7 respectivement) :

- ◆ critère de Tresca avec cohésion  $C$  ( $= \sigma_0/2$ ) ,
- ◆ critère de Tresca avec cohésion  $C$  sans résistance à la traction,
- ◆ critère de Coulomb avec cohésion  $C$  et angle de frottement  $\phi$  ,
- ◆ critère de Coulomb avec cohésion  $C$  et angle de frottement  $\phi$  , sans résistance à la traction.

Dans chacun de ces cas la valeur extrême  $\gamma^+$  sera donc une fonction des paramètres définissant le problème, à savoir :  $h$ ,  $C$ , et  $\phi \geq 0$  ; on peut lui appliquer les résultats classiques de l'analyse dimensionnelle ; ainsi  $\gamma^+$  est nécessairement de la forme :

$$(4.3) \quad \gamma^+ = K^+(\phi) \cdot \frac{C}{h} \quad ,$$

où  $K^+$  est une fonction sans dimension, du seul paramètre  $\phi$ , à déterminer pour chacun des quatre problèmes examinés.

Ainsi le problème d'analyse de stabilité revient donc à la détermination de  $K^+ = \left(\frac{\gamma h}{C}\right)^+$ , valeur extrême du paramètre sans dimension  $\left(\frac{\gamma h}{C}\right)$ . Sous cette forme on traite donc aussi le problème dans sa formulation plus courante :

détermination de la hauteur extrême d'une tranchée verticale dans un matériau de caractéristiques données ; cette hauteur ne sera autre que :

$$(4.4) \quad h^+ = K^+(\phi) \cdot \frac{C}{\gamma} .$$

Enfin, on peut utiliser, pour caractériser la stabilité de cet ouvrage, le coefficient de rupture introduit au chapitre I (§ 7) ; pour une tranchée donnée c'est par définition :

$$(4.5) \quad F(C, \phi, h ; \gamma) = \frac{\gamma^+}{\gamma} ,$$

qui, par application de (4.3), se met sous la forme :

$$(4.6) \quad F(C, \phi, h ; \gamma) = K^+(\phi) \cdot \frac{C}{\gamma h} .$$

#### 4.2. - MATÉRIAU CONSTITUTIF RÉGI PAR LE CRITÈRE DE TRESCA

##### 4.2.1. - CRITÈRE DE RÉSISTANCE DU MATÉRIAU

Les capacités de résistance du matériau constitutif sont supposées définies par le critère de Tresca, écrit au chapitre V (§ 6.2.2.) pour la déformation plane, avec les notations habituelles :

$$(4.7) \quad f(\underline{\sigma}) = |\sigma_1 - \sigma_2| - 2 C \leq 0 .$$

Remarquons qu'ici, comme dans la suite, bien qu'il s'agisse d'un problème typique de mécanique des sols, on a conservé la convention de signe de la mécanique pour compter les contraintes. On verra notamment dans (Coussy et Salençon, 1979) comment utiliser en calcul à la rupture la convention de signes de la mécanique des sols : on prendra garde en particulier à l'écriture du principe des puissances virtuelles, le terme en  $\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})$  devant, ou non, être changé en  $-\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x})$  suivant la définition adoptée pour  $\underline{d}(\underline{x})$  ; (de même pour le terme en  $[[\underline{v}(\underline{x})]] \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$ ).

4.2.2. - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR PAR LES CONTRAINTES

-----

4.2.2.1. - Champ de contrainte discontinu à 3 zones

La figure 20 présente le champ de contrainte discontinu à trois zones proposé par Drucker et Prager (1952).

Ce champ, fonction linéaire de  $x$  dans chacune des zones, a pour expression :

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \sigma_{xx} = -\gamma x, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0 ; \\ \textcircled{2} \quad \sigma_{xx} = -\gamma(x-h), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = -\gamma x + a(x) ; \\ \textcircled{3} \quad \sigma_{xx} = -\gamma x, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = -\gamma x + a(x) ; \end{array} \right.$$

$a(x)$  étant arbitraire sous la condition  $0 \leq a(x) \leq \gamma h$ .

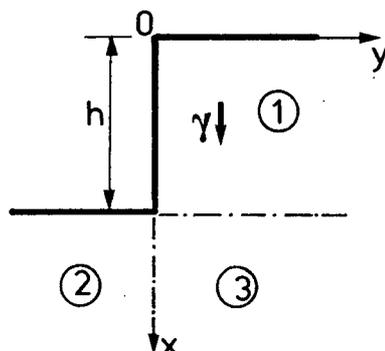


Figure 20 : Stabilité d'une fouille verticale, approche par l'intérieur : champ de contrainte discontinu à 3 zones.

Ce champ est évidemment statiquement admissible dans le mode de chargement étudié, en équilibre avec  $\gamma$ . La valeur maximale de  $f(\underline{\sigma})$  y est atteinte pour :

$$x = h, \quad y > 0 \quad \text{dans } \textcircled{1} ;$$

on a alors :

$$(4.9) \quad f(\underline{\sigma}) = \gamma h - 2 C ,$$

ce qui prouve que le critère est respecté tant que  $\frac{\gamma h}{C} \leq 2$ .

D'où, pour  $K^+$  la minoration :

$$(4.10) \quad 2 \leq K^+ .$$

#### 4.2.2.2. - Autres champs proposés

De nombreux auteurs se sont attachés à construire, soit par voie analytique, soit par voie numérique, des champs de contrainte conduisant à de meilleures majorations de  $K^+$ .

Ainsi Heyman (1973) et de Josselin de Jong ont obtenu pour  $K^+$  la minoration :  $2,73 \leq K^+ .$

Palmer a porté cette minoration à :  $3 \leq K^+ .$

De Josselin de Jong (1977) a réussi à obtenir :  $3,39 \leq K^+ .$

Pastor (1978), en utilisant la méthode des éléments finis et en imposant au champ de contrainte déterminé dans la zone à maillage triangulaire, nécessairement de dimension finie, des conditions permettant de construire un prolongement du champ de contraintes jusqu'à l'infini sans violer le critère, a réussi à obtenir la minoration :

$$(4.11) \quad 3,635 \leq K^+ ,$$

qui est le meilleur résultat actuel.

#### 4.2.3. - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR PAR LES VITESSES

---

##### 4.2.3.1. - Mécanisme avec plan de glissement

On considère le mécanisme représenté à la figure 22 dans lequel le bloc OAB glisse à la vitesse  $U$  sur la droite AB, le reste du massif étant immobile.

On a :

$$\begin{aligned} P(\underline{v}) &= C U h / \cos \alpha \\ Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) &= \gamma \frac{U h^2}{2} \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

ce qui conduit pour  $K^+$  à la majoration :

$$K^+ \leq 2 / \sin \alpha \cos \alpha .$$

L'optimum de cette majoration correspond à  $\alpha = \pi/4$ , d'où :

(4.12)

$$K^+ \leq 4$$

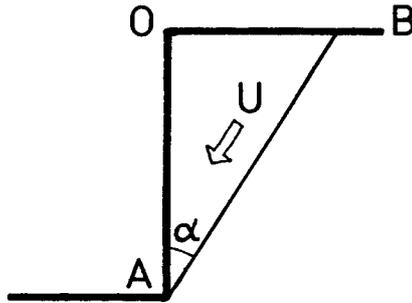


Figure 21 : Stabilité d'une fouille verticale ; approche par l'extérieur : mécanisme avec plan de glissement.

#### 4.2.3.2. - Mécanisme avec cercle de glissement

La figure 22 représente un mécanisme par bloc, dans lequel le bloc OAB, animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire  $\omega$  autour du centre instantané  $\Omega(\xi, \eta)$ , glisse le long de l'arc de cercle AB sur le massif immobile.

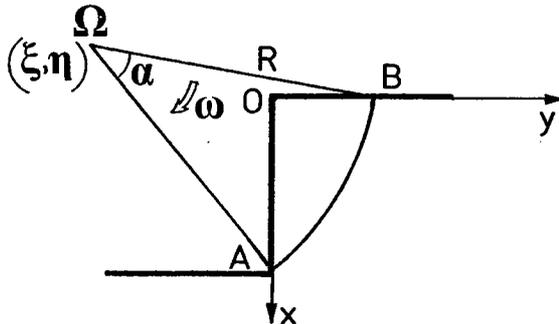


Figure 22 : Stabilité d'une fouille verticale, approche par l'extérieur : mécanisme avec cercle de glissement.

Avec les notations indiquées sur la figure 22, on a :

$$P(\underline{v}) = C \omega R^2 \alpha$$

$$Q \cdot \dot{q}(\underline{v}) = \int_0^h \omega \gamma x (x - \xi) dx \quad (1)$$

où  $\omega$  est comptée positivement dans le sens rétrograde : R et  $\alpha$  sont des fonctions de  $\xi$  et  $\eta$ .

(<sup>1</sup>) Cette formule s'obtient par application du théorème "de la divergence" à l'intégrale de volume sur OAB ; on remarque en effet que dans ce mouvement on a :  $\gamma \underline{v}_x = \text{div}(\gamma x \cdot \underline{v})$ .

On a ainsi pour  $K^+$  la majoration :

$$(4.13) \quad K^+ \leq \alpha(R^2/h^2) \int_0^1 \bar{x}(\bar{x} - \bar{\xi}) d\bar{x}$$

où l'on a posé :  $\bar{\xi} = \xi/h$  et  $\bar{x} = x/h$ .

A titre d'exemple, pour  $\xi = \eta = 0$ , on a  $R = h$  et  $\alpha = \pi/2$  d'où :

$$K^+ \leq 3\pi/2 \quad \# \quad 4,71 \quad .$$

En minimisant l'expression analytique de la borne supérieure de  $K^+$ , dans (4.13) par rapport aux variables  $\xi$  et  $\eta$  dont dépendent  $R$ ,  $\alpha$ , et  $\bar{\xi}$ , on obtient pour  $K^+$  la majoration :

$$(4.14) \quad K^+ \leq 3,83$$

les coordonnées du centre du cercle optimal étant (Taylor 1937, 1948 ; Pastor, 1978) :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = -1,21 h \\ \eta = -1,41 h . \end{array} \right.$$

La majoration (4.14) est la meilleure actuellement connue.

#### 4.2.3.3. - Remarque sur ces mécanismes par blocs

On pourrait encore, à propos des mécanismes par blocs qui viennent d'être présentés s'interroger sur la compatibilité géométrique du point A lorsque la vitesse de ce point dans le bloc en mouvement tendrait à le faire pénétrer dans le reste du massif : en effet il semblerait alors que la zone OAB doive demeurer immobile, étant bloquée par le reste du massif. Nous avons déjà levé ce paradoxe au § 2.6 en nous référant à la notion même de champ de vitesse virtuel pour les milieux continus.

### 4.3 - MATÉRIAU CONSTITUTIF RÉGI PAR LE CRITÈRE DE TRESCA SANS RÉSISTANCE A LA TRACTION

#### 4.3.1. - CRITÈRE DE RÉSISTANCE DU MATÉRIAU

Le critère de Tresca sans résistance à la traction a été écrit au chapitre II (§ 2.6) pour le milieu continu tridimensionnel. Pour les problèmes de calcul à la rupture en déformation plane, on obtient pour  $\underline{\sigma}$  bidimensionnel :

$$(4.16) \quad f(\underline{\sigma}) = \text{Max} \left\{ |\sigma_1 - \sigma_2| - 2C, \sigma_1, \sigma_2 \right\} \leq 0 .$$

#### 4.3.2. - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR

On reprend le champ de contrainte discontinu à 3 zones présenté au § 4.2.2.1. (figure 20 et formules (4.8)). On voit que, sous la même condition que celle énoncée alors, soit  $\gamma h/C \leq 2$ , ce champ respecte le critère (4.16). Il en résulte que pour ce nouveau problème on trouve pour  $K^+$  la même minoration qu'au § 4.2.2.1. :

$$(4.17) \quad 2 \leq K^+$$

On remarque au passage, car ceci interviendra au § suivant, que pour  $\gamma h/C = 2$ , ce champ vérifie  $f(\underline{\sigma}) = 0$  dans toute la zone (1) (et éventuellement dans d'autres zones suivant la forme adoptée pour  $a(x)$ ).

#### 4.3.3. - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR

Les majorations de  $K^+$  obtenues au § 4.2.3. demeurent évidemment valables pour le problème actuel puisque l'on a affaire à un matériau (le sol) dont les capacités de résistance sont maintenant inférieures à ce qu'elles étaient auparavant.

Il convient donc d'essayer de mettre en évidence des champs de vitesse conduisant à des majorations plus faibles pour  $K^+$ , en faisant intervenir par exemple la possibilité de "décollement" par une discontinuité de vitesse normale, permise par le critère de Tresca sans résistance à la traction. La figure 23 rappelle la "courbe intrinsèque de déformation plane" pour ce critère : comme on l'a indiqué au § 5.2, du chapitre V, elle permet d'obtenir par normalité les discontinuités de vitesse admissibles,  $\pi(\underline{n}, \llbracket \underline{v} \rrbracket)$  étant la fonction d'appui du domaine convexe limité par cette courbe.

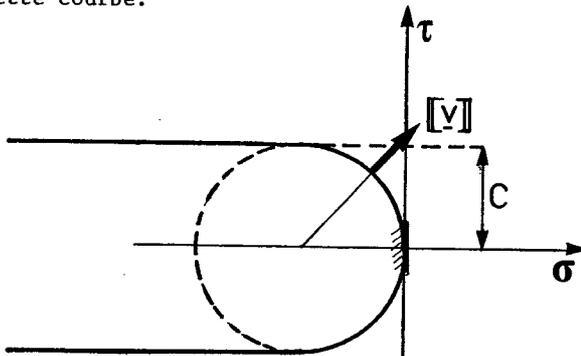


Figure 23 : Courbe intrinsèque de déformation plane pour le critère de Tresca sans résistance à la traction.

On considère le mode de déformation représenté à la figure 25 dans lequel on a  $h \geq 2l$  et où :

- ♦ le bloc ODBC tourne autour du point B avec la vitesse angulaire  $\omega$ ,
- ♦ il y a décollement (discontinuité de vitesse normale et positive) le long de BC,
- ♦ dans le triangle rectangle isocèle ABD, il y a cisaillement uniforme : avec les axes  $\xi$  et  $\eta$  indiqués sur la figure, le champ de vitesse  $y$  est :

$$(4.18) \quad \begin{cases} u_{\xi} &= 0 \\ u_{\eta} &= \omega \xi \end{cases},$$

d'où :

$$(4.19) \quad d_{\xi\xi} = d_{\eta\eta} = 0, \quad d_{\xi\eta} = d_{\eta\xi} = \omega/2 .$$

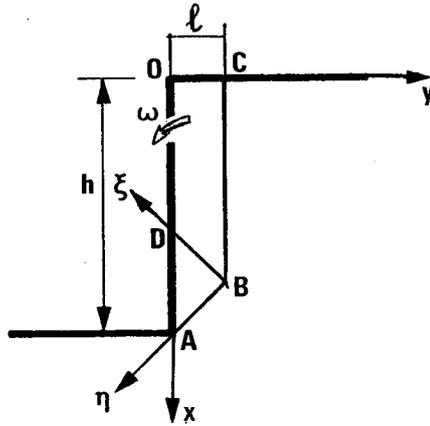


Figure 24 : Stabilité d'une fouille verticale pour le matériau cohérent sans résistance à la traction : mode de déformation avec "décollement".

Le calcul de  $P(\underline{v})$  pour ce champ de vitesse ne présente pas de difficulté :

on voit, par exemple en se reportant aux formules (2.15) du chapitre II, ou de façon évidente sur la figure 23, que la contribution de la discontinuité de vitesse (normale et positive) le long de BC est nulle ;  
la vitesse est continue le long de BD et de BA ;  
 $P(\underline{v})$  se réduit au terme dû au cisaillement uniforme dans ABD :

$$(4.20) \quad P(\underline{v}) = C \omega \ell^2 .$$

Sans procéder au calcul exact de la puissance des forces extérieures dans ce champ de vitesse, on a de façon évidente l'encadrement :

$$(4.21) \quad \gamma(h - 2\ell) \frac{\ell^2}{2} \omega < Q \dot{q}(\underline{v}) < \gamma h \frac{\ell^2}{2} \omega .$$

En appliquant alors la formule de l'approche par l'extérieur on obtient pour  $K^+ = \frac{\dot{\gamma}^+ h}{C} = \left( \frac{\gamma h}{C} \right)^+$ , une majoration fonction de  $\ell$ , soit  $K(\ell)$  :

$$(4.22) \quad K^+ \leq K(\ell)$$

où  $K(\ell)$  est, compte tenu de (4.20) et (4.21), encadré par :

$$(4.23) \quad 2 < K(\ell) < 2/(1 - 2\ell/h) .$$

En faisant tendre  $\ell/h$  vers zéro on voit que  $K(\ell) \searrow 2$ , d'où pour  $K^+$  :

$$(4.24) \quad K^+ \leq 2 .$$

La comparaison de (4.24) et de (4.17) montre alors que la valeur exacte de  $K^+$  est ainsi connue :

(4.25)

$$K^+ = 2$$

Ce résultat est dû à Drucker (1953).

On remarque que le mécanisme qui correspond à la valeur exacte de  $K^+$  est en quelque sorte un mécanisme "évanescent", limite d'une famille de mécanisme ; de plus on vérifie qu'il est bien associé au champ de contrainte utilisé au § 4.3.2. lorsque  $\gamma h/C = 2$  : ce champ  $\underline{\sigma}$  satisfait en effet  $f(\underline{\sigma}) = 0$  le long de BC avec  $\sigma_{yy} = 0$ , or lorsque  $l/h \searrow 0$  la zone déformée dans le mode de déformation de la figure 24 se réduit à BC et la vitesse de décollement est bien dirigée selon  $Oy$ .

#### 4.4. - MATÉRIAU CONSTITUTIF RÉGI PAR LE CRITÈRE DE COULOMB

##### 4.4.1. - CRITÈRE DE RÉSISTANCE DU MATÉRIAU

On se place maintenant dans le cas où le critère de Coulomb écrit, en déformation plane, au § 6.3 du chapitre V :

$$(4.26) \quad f(\underline{\sigma}) = \sigma_1(1 + \sin \phi) - \sigma_2(1 - \sin \phi) - 2 C \cos \phi \leq 0 .$$

##### 4.4.2. - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR

On utilise à nouveau le champ discontinu à trois zones selon le schéma de la figure 20 avec pour  $\underline{\sigma}$  les mêmes expressions (4.8)

Pour ce champ statiquement admissible dans le mode de chargement, en équilibre avec  $\gamma$ , la valeur maximale de  $f(\underline{\sigma})$  dans (4.26) est atteinte pour  $x = h$  en zone (1), (et éventuellement en zones (2) et (3) selon le choix de  $a(x)$ ), où l'on a :

$$(4.27) \quad f(\underline{\sigma}) = \gamma h(1 - \sin \phi) - 2 C \cos \phi .$$

La valeur maximale de  $\gamma h/C$  pour que ce champ respecte le critère est donc  $\gamma h/C = 2 \cos \phi / (1 - \sin \phi) = 2 \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$  ; on a ainsi pour  $K^+$  la minoration :

$$(4.28) \quad 2 \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2) \leq K^+ ,$$

(qui contient bien (4.10)).

#### 4.4.3. - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR

##### 4.4.3.1. - "Prisme de Coulomb"

Dans le même esprit qu'au § 4.2.3.1. on considère un mode de déformation par bloc (figure 25) : le bloc OAB est en translation à la vitesse  $U$  inclinée à l'angle  $\beta$  ( $\phi \leq \beta \leq \pi - \phi$ ) sur la ligne de discontinuité de vitesse AB.

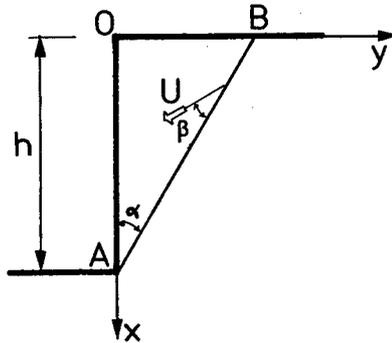


Figure 25 : Stabilité d'une fouille verticale pour un matériau régi par le critère de Coulomb : "prisme de Coulomb".

Le calcul de  $P(\underline{v})$  ne fait intervenir qu'un terme, dû à la discontinuité de vitesse sur AB, soit :

$$P(\underline{v}) = U h C \cotg \phi \sin \beta / \cos \alpha .$$

(en application de la formule (2.9) du chapitre II donnant  $\pi(\underline{n} ; \llbracket \underline{v} \rrbracket)$  .

La puissance des forces extérieures est :

$$Q \dot{q}(\underline{v}) = \gamma U \frac{h^2}{2} \operatorname{tg} \alpha \cos(\beta + \alpha)$$

d'où, en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  , la majoration pour  $K^+(\phi)$  :

$$(4.29) \quad K^+(\phi) \leq 2 \cotg \phi \cdot \sin \beta / \sin \alpha \cos(\beta + \alpha)$$

avec  $\phi \leq \beta \leq \pi - \phi$  et  $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi/2$ .

A  $\beta$  donné, la minimisation en  $\alpha$  donne  $\alpha = \pi/4 - \beta/2$  et conduit à :

$$K^+(\phi) \leq 4 \cotg \phi \cdot \sin \beta / (1 - \sin \beta) ;$$

le minimum par rapport à  $\beta$  est atteint pour  $\beta = \phi$  et on en déduit :

$$(4.30) \quad K^+(\phi) \leq 4 \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2) .$$

Ainsi le minimum de la majoration donnée par ce mécanisme correspond au plan AB incliné à  $(\pi/4 - \phi/2)$  sur la verticale, et la vitesse de translation du bloc est inclinée à l'angle  $\phi$  sur AB. (On rapprochera ce résultat de celui obtenu au § 2.8.3.).

On retrouve ainsi, avec une interprétation cinématique rigoureuse, le mécanisme dit du "prisme de Coulomb".

#### 4.4.3.2. - Mécanisme avec bloc en rotation

On considère maintenant un mécanisme de déformation dans lequel le bloc OAB est animé d'un mouvement de rotation, de vitesse angulaire  $\omega$ , comptée positivement dans le sens rétrograde, autour du centre instantané  $\Omega(\xi, \eta)$ . La ligne de discontinuité de vitesse AB fait en chaque point un angle  $\psi$  avec le rayon vecteur, tel que  $\pi/2 + \phi \leq \psi \leq \pi$ , en sorte que la discontinuité de vitesse est inclinée à  $\beta = \psi - \pi/2$ ,  $\phi \leq \beta \leq \pi/2$  sur la ligne de discontinuité (fig. 26).

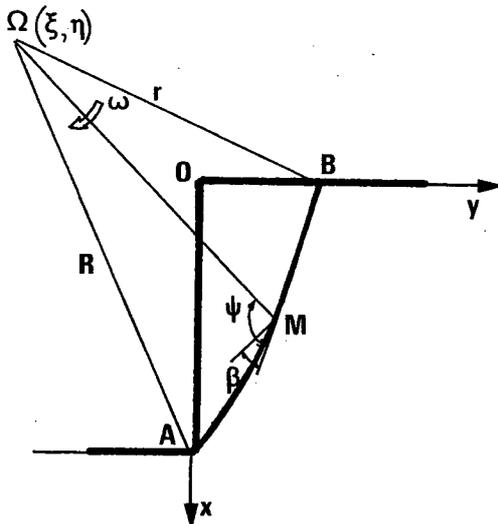


Figure 26 : Stabilité d'une fouille verticale pour un matériau régi par le critère de Coulomb : mécanisme avec bloc en rotation.

Le calcul de  $P(\underline{v})$  ne fait intervenir qu'un seul terme dû à la discontinuité de vitesse le long de  $AB$  :

$$P(\underline{v}) = \int_{AB} C \cotg \phi \cdot \omega \cdot \Omega M \sin \beta \, ds$$

L'intégrale de volume de la puissance des forces extérieures se transforme aisément, par la formule de la divergence, en :

$$Q \dot{q}(\underline{v}) = \int_0^h \omega \gamma x(x - \xi) dx - \int_{AB} \gamma x \cdot \omega \cdot \Omega M \sin \beta \, ds .$$

D'où pour  $K^+(\phi)$  la majoration :

$$(4.31) \quad K^+(\phi) \leq \frac{\cotg \phi \int_{AB} \Omega M \sin \beta \, ds}{h^2 \int_0^1 \bar{x}(\bar{x} - \bar{\xi}) d\bar{x} - \int_{AB} \frac{x}{h} \Omega M \sin \beta \, ds}$$

$$\text{où } \bar{\xi} = \xi/h \quad \text{et} \quad \bar{x} = x/h .$$

Cette majoration dépend de la courbe  $AB$ , c'est à dire de la fonction  $\beta(s)$  sous la condition posée  $\phi \leq \beta \leq \pi/2$ , et de  $\xi$  et  $\eta$  .

Posons  $\Omega A = R$ ,  $\Omega B = r$ , la majoration s'écrit :

$$(4.32) \quad K^+(\phi) \leq \frac{\cotg \phi}{2} \frac{R^2 - r^2}{h^2} \left( \int_0^1 \bar{x}(\bar{x} - \bar{\xi}) d\bar{x} - \frac{R^2}{2h^2} + \int_B^A \frac{\rho^2}{2h^2} \frac{dx}{h} \right)^{-1}$$

où  $\rho = \Omega M$  est le rayon vecteur sur la courbe  $AB$ .

Pour  $\Omega$  fixé, c'est à dire  $\xi$  et  $\eta$  donnés,  $R$  est constant ainsi que le premier terme du dénominateur qui est égal à  $1/3 - \bar{\xi}/2$  ;  $r$  est alors maximal ainsi que le dernier terme du dénominateur, si l'on fait  $\beta(s) \equiv \phi$  tout au long de  $AB$  ; ceci fournit donc la majoration minimale pour  $K^+(\phi)$  : à  $\Omega$  fixé la majoration minimale pour  $K^+(\phi)$  donnée par ce type de mécanisme est obtenue lorsque  $AB$  est une spirale logarithmique définie par  $\psi = \pi/2 + \phi$  <sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> On constate encore que dans le mécanisme optimal la discontinuité de vitesse est inclinée à  $\phi$  sur la ligne de discontinuité.

Il est à remarquer que le numérateur de (4.32) qui représente  $P(\underline{v})$  à un facteur multiplicatif constant près, est, une fois  $\Omega$  et  $B$  fixés, indépendant de la courbe  $AB$ , choisie comme ligne de discontinuité pourvu que la condition  $\phi \leq \beta(s) \leq \pi - \phi$  soit satisfaite ; le dénominateur représentant, à un facteur multiplicatif constant près la puissance des forces extérieures est maximal lorsque le secteur  $OAB$  est d'aire maximale ( $\eta$  étant négatif).

Il reste alors à minimiser par rapport à  $\xi$  et  $\eta$ , coordonnées de  $\Omega$ .

On obtient finalement le résultat (Chen, 1975) :

$$(4.33) \quad K^+(\phi) \leq 3,83 \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2),$$

homologue de (4.14).

En regroupant les résultats des deux approches on obtient l'encadrement :

$$(4.34) \quad 2 \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2) \leq K^+(\phi) \leq 3,83 \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2) .$$

#### 4.5. - MATÉRIAU CONSTITUTIF RÉGI PAR LE CRITÈRE DE COULOMB

##### SANS RÉSISTANCE A LA TRACTION

##### 4.5.1. - CRITÈRE DE RÉSISTANCE DU MATÉRIAU

Le critère de Coulomb sans résistance à la traction a été écrit au chapitre II (§ 2.7) pour le milieu continu tridimensionnel. Pour les problèmes de calcul à la rupture en déformation plane il s'écrit en fonction de  $\underline{\sigma}$  bidimensionnel :

$$(4.35) \quad f(\underline{\sigma}) = \operatorname{Max} \left\{ (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi + |\sigma_1 - \sigma_2| - 2 C \cos \phi, \sigma_1, \sigma_2 \right\}$$

La figure 27 représente la courbe intrinsèque de déformation plane correspondante.

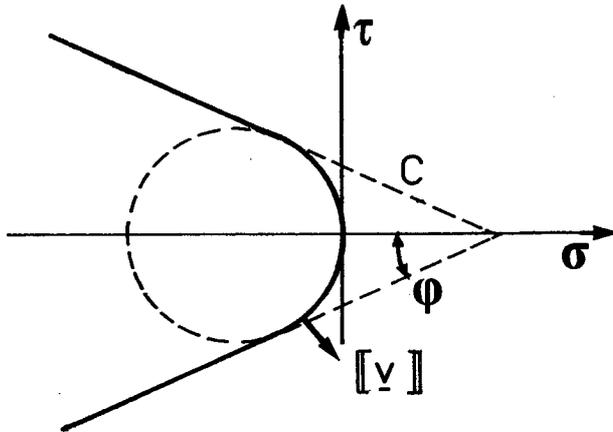


Figure 27 : Courbe intrinsèque de déformation plane pour le critère de Coulomb sans résistance à la traction.

Le problème étudié est l'homologue de celui du § 4.3 ; il ne sera que brièvement traité car la méthode suivie est semblable à celle utilisée alors.

#### 4.5.2. - APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR

On voit sans difficulté que le champ de contrainte discontinu à trois zones de la figure 20, explicité par (4.8), statiquement admissible, respecte le critère de Coulomb sans résistance à la traction, conservant ainsi pour  $K^+(\phi)$  la minoration précédente :

$$(4.36) \quad 2 \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2) \leq K^+(\phi)$$

#### 4.5.3. - APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR

La figure 28 représente un mode de déformation avec bloc en rotation avec décollement, analogue à celui de la figure 24 utilisé au § 4.3.3.

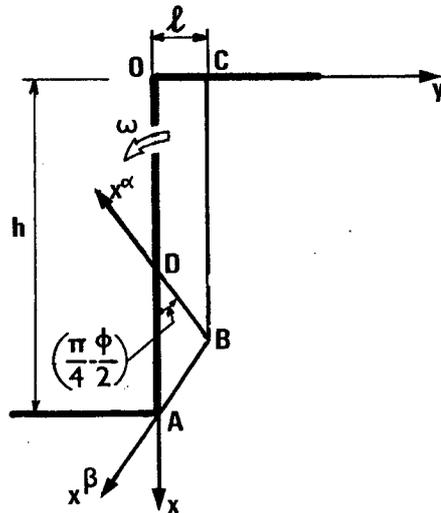


Figure 28 : Stabilité d'une fouille verticale pour le matériau régi par le critère de Coulomb sans résistance à la traction : mode de déformation avec décollement.

Dans ce mécanisme, le bloc ODBC tourne autour du point B avec la vitesse angulaire  $\omega$ . Il y a décollement le long de BC. La vitesse est continue au franchissement de BD et de AB, et le champ de vitesse dans ABD est défini dans les axes  $(Bx^\alpha, Bx^\beta)$  représentés sur la figure, par ses composantes covariantes :

$$v_\alpha = 0, \quad v_\beta = \omega x^\alpha \cos \phi;$$

d'où pour le tenseur  $\underline{d}$  :

$$d_{\alpha\alpha} = d_{\beta\beta} = 0; \quad d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \omega \cos \phi;$$

$$\text{tr } \underline{d} = (d_{\alpha\beta} + d_{\beta\alpha}) \sin \phi / \cos^2 \phi = \omega \text{tg } \phi;$$

et les valeurs principales :

$$d_{xx} = -d_{\alpha\beta} / (1 + \sin \phi) = -\frac{\omega}{2} \text{tg}(\pi/4 - \phi/2)$$

$$d_{yy} = d_{\alpha\beta} / (1 - \sin \phi) = \frac{\omega}{2} \text{tg}(\pi/4 + \phi/2).$$

Pour le calcul de  $P(\underline{v})$ , la contribution de la discontinuité normale de vitesse le long de BC est nulle ; dans ABD on a :

$$\text{tr } \underline{d} = \omega \text{tg } \phi = \sin \phi (|d_{xx}| + |d_{yy}|)$$

d'où :

$$\pi(\underline{d}) = C \text{tg}(\pi/4 + \phi/2) (|d_{xx}| + |d_{yy}| - \text{tr } \underline{d}) = C\omega$$

et :

$$(4.37) \quad P(\underline{v}) = C\omega \ell^2 \text{tg}(\pi/4 + \phi/2).$$

On encadre, comme précédemment la valeur de  $Q \dot{q}(\underline{v})$  :

$$(4.38) \quad \gamma\omega \frac{\ell^2}{2} [h - 2\ell \text{tg}(\pi/4 + \phi/2)] < Q \dot{q}(\underline{v}) < \gamma\omega \frac{\ell^2}{2} h.$$

La majoration  $K(\phi, \ell)$ , fonction de  $\ell$ , donnée par ce mode de déformation peut alors être encadrée et, en faisant tendre le paramètre  $\ell/h$  vers zéro, on voit que  $K(\phi, \ell) \searrow 2\text{tg}(\pi/4 + \phi/2)$ . On en déduit :

$$(4.39) \quad K^+(\phi) \leq 2 \text{tg}(\pi/4 + \phi/2)$$

D'où par comparaison de (4.39) et de (4.36) :

(4.40)

$$K^+(\phi) = 2 \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$$

Ce résultat est dû à Drucker (1953).

#### 4.6. - RETOUR SUR LA MÉTHODE DU PRISME DE COULOMB :

##### APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR PAR LES CONTRAINTES

Après avoir étudié le problème de la tenue de la fouille verticale par application directe des approches développées en calcul à la rupture, il est intéressant de reprendre l'exemple de la méthode dite du "prisme de Coulomb", pour quelques réflexions théoriques se rattachant au raisonnement initialement développé et encore souvent employé à son propos (cf par exemple (Caquot et Kérisel, 1966)).

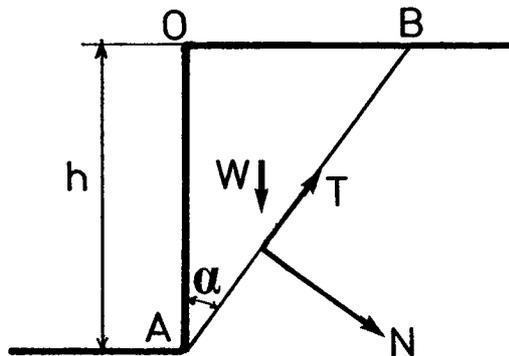


Figure 29 : Stabilité d'une fouille verticale pour un matériau régi par le critère de Coulomb : approche par l'extérieur par les contraintes.

Reprenant le raisonnement fondamental de l'approche par l'intérieur, on peut énoncer que :

pour que  $\gamma h/C$  soit inférieur à la valeur extrême  $K^+(\phi)$  il est nécessaire et suffisant qu'il existe au moins un champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  en équilibre avec les conditions aux limites, avec les forces de masse ( $\gamma$ ), avec le critère ( $C, \phi$ ), dans tout le volume du système. Pour cela, si l'on considère un triangle quelconque du type OAB (figure 29), il faut qu'il existe dans OAB, au moins un champ de contrainte en équilibre avec les conditions aux limites nulles sur OA et OB, avec ( $\gamma$ ), et qui respecte le critère ( $C, \phi$ ).

Pour cela encore, *il faut* que l'équilibre global de n'importe quel triangle de type OAB, sous l'action de la pesanteur  $\gamma$  et de contraintes normales  $\sigma$  et tangentielles  $\tau$  sur AB respectant la condition :

$$(4.41) \quad |\tau| \leq C - \sigma \operatorname{tg} \phi$$

soit possible. En particulier cela *nécessite* que cet équilibre soit possible du point de vue de la résultante des forces appliquées.

Désignant par  $W = (1/2)\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha$  le poids du triangle OAB, par N et T, les composantes normale et tangentielle de la résultante des actions de contact sur OAB le long de AB, comptées positivement comme indiqué sur la figure 29 :

$$(4.42) \quad N = \int_{AB} \sigma \, dl, \quad T = \int_{AB} \tau \, dl$$

on peut écrire :

pour que  $\gamma h/C \leq K^+(\phi)$  il est nécessaire que :

$$(4.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} W \cos \alpha - T = 0 \\ \text{et} \\ W \sin \alpha + N = 0 \\ \text{soient possibles sous} \\ |\tau| \leq C - \sigma \operatorname{tg} \phi \\ \forall \alpha \in (0, \pi/2) \end{array} \right.$$

Compte tenu de (4.42) et de l'inégalité évidente :

$$T \leq \int_{AB} |\tau| \, dl,$$

(4.43) s'écrit :

$$(4.44) \quad W \cos \alpha \leq C h / \cos \alpha + W \sin \alpha \operatorname{tg} \phi, \quad \forall \alpha \in (0, \pi/2),$$

soit, en exprimant W :

$$(4.45) \quad \gamma h/C \leq \frac{4}{(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \phi) \sin 2\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, \pi/2).$$

Ainsi on a :

$$\gamma h/C \leq K^+(\phi) \implies (4.45)$$

on en déduit donc :

$$(4.46) \quad K^+(\phi) \leq 4/(1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \phi) \sin 2\alpha, \quad \forall \alpha \in (0, \pi/2).$$

Le minimum du second membre est atteint pour  $\alpha = \pi/4 - \phi/2$ , ce qui conduit au résultat final :

$$K^+(\phi) \leq 4 \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2).$$

On constate que ce résultat est celui obtenu par l'approche par l'extérieur par les vitesses au § 4.3.1. en considérant les champs de vitesse avec bloc triangulaire OAB en translation.

Le raisonnement ci-dessus met bien en évidence le caractère de dualisation mathématique de l'approche par l'extérieur vis-à-vis de l'approche par l'intérieur. Basé sur des considérations relatives aux champs de contrainte, il part de la condition nécessaire et suffisante pour que  $\gamma h/C \leq K^+(\phi)$  et, par un affaiblissement progressif de cette condition, aboutit à une condition nécessaire portant sur l'équilibre global de tout bloc tracé dans le massif pour des conditions au contour satisfaisant le critère. Un tel raisonnement est très proche si ce n'est identique à la démarche suivie par Coulomb lui-même, mais il importe de bien en voir le caractère de *condition nécessaire* qui se traduit en particulier par le fait que l'on doit procéder ici à une *minimisation* comme dans l'approche par l'extérieur par les vitesses. Il s'agit d'une approche par l'extérieur par les contraintes comme indiqué au chapitre I § 4.1.

De la même manière dans l'approche par l'extérieur, le fait de ne considérer que des champs de vitesse cinématiquement admissibles particuliers correspond à un affaiblissement du résultat fourni par cette méthode, c'est à dire à une majoration plus large de  $K^+(\phi)$  : ainsi en ne considérant que des champs de vitesse par déplacement d'un bloc triangulaire OAB en translation, on procède purement et simplement à la dualisation de la condition d'équilibre du point de vue de la résultante pour ce bloc triangulaire,  $P(\underline{v})$  dû uniquement à la discontinuité de vitesse sur AB y traduisant la condition imposée par le critère de Coulomb.

On peut procéder de la même manière pour tout bloc OAB limité par une courbe AB quelconque, en écrivant la possibilité de l'équilibre global du point de vue des trois équations en résultante et en moment : on pourra se reporter à ce propos à [Coussy et Salençon (1979)] où le raisonnement correspondant est donné en détail dans le cas du matériau purement cohérent. D'une manière générale cette démarche est assez délicate (cf. Baker et Garber, (1978)), et conduira au résultat  $K^+(\phi) \leq 3,83 \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$ , obtenu au § 4.4.3.2., de façon relativement aisée par l'approche duale. Ceci montre que, de même que le bloc triangulaire défini par  $\alpha = \pi/4 - \phi/2$  est parmi tous les blocs triangulaires OAB celui pour lequel la condition de compatibilité de l'équilibre global avec le critère de Coulomb est la plus contraignante, de même le bloc OAB limité par la spirale minimisante <sup>(1)</sup> définie par  $\beta = \phi$  est, parmi tous les blocs OAB, celui dont l'équilibre global est le plus "faiblement" compatible avec le critère de Coulomb le long de AB : on dira aussi que la spirale minimisante AB est la "ligne faible". L'utilisation de ce type de courbes (spirales logarithmiques inclinées à  $\psi = \pi/2 + \phi$  sur le rayon vecteur) par Rendulic (1935) dans son analyse de stabilité se trouve ainsi pleinement justifiée.

---

<sup>(1)</sup> Rappelons que cette spirale correspond au minimum sur toutes les courbes issues de A .

# *Bibliographie*

CHAPITRE I : THÉORIE DU CALCUL À LA RUPTURE

- BISHOP A.W. (1966)  
*The strength of soils as engineering material*  
Géotechnique, vol 16, n°2, pp. 89-130.
- CASAGRANDE A. et CARRILLO N. (1944)  
*Shear failure of anisotropic materials*  
Journ. Boston Soc. Civ. eng., vol 31, n°4, pp. 74-87.
- COULOMB C.A. (1773)  
*Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*  
Mémoire présenté à l'Académie Royale des Sciences.
- COUSSY O. (1978)  
*Le calcul à la rupture dans la tenue des ouvrages en terre*  
Th. Doct. Ing. Univ. P. et M. Curie, Paris.
- COUSSY O. et SALENGON J. (1979)  
*Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture*  
Annales des Ponts et Chaussées, n°12, pp. 7-35.
- CULMANN K. (1866)  
*Die graphische Statik*  
Zurich.
- DELBECQ J.M. (1981)  
*Analyse de la stabilité des voûtes en maçonnerie de Charles Augustin Coulomb à nos jours*  
Ann. Ponts et Chaussées, n°19, pp. 36-43.
- DELBECQ J.M. (1982)  
*Analyse de la stabilité des voûtes en maçonnerie par le calcul à la rupture*  
J. Méc. Th. Appl., vol 1, n°1, pp. 91-121.
- DELBECQ J.M., FRÉMOND M., PECKER A. et SALENGON J. (1977)  
*Éléments finis en plasticité et viscoplasticité*  
J. Méc. Appl., vol 1, n°3, pp. 267-304.
- DURAND-CLAYE A. (1867)  
*Stabilité des voûtes en maçonnerie*  
Ann. des Ponts et Chaussées, I, pp. 63-96.
- DURAND-CLAYE A. (1880)  
*Stabilité des voûtes et des arcs*  
Ann. des Ponts et Chaussées, I, pp. 416-440.
- FRÉMOND M. et FRIAA A. (1978)  
*Analyse limite. Comparaison des méthodes statique et cinématique généralisée*  
C.R. Ac. Sc. Paris, t. 286, série A, pp. 107-110.
- FRÉMOND M. et FRIAA A. (1979)  
*Plasticité et matériau de Norton-Hoff généralisé*  
5ème Congrès brésilien de mécanique, (COBEM), Campinas (Brésil).
- FRÉMOND M., PECKER A. et SALENGON J. (1974)  
*Méthodes variationnelles pour le matériau rigide plastique*  
Symp. Franco-Polonais "Rhéologie et Mécanique des Sols", Nice, publié dans : Problèmes de rhéologie et de mécanique des sols, Varsovie 1977, pp. 145-155.
- FRÉMOND M. (1980)  
*Méthodes variationnelles en calcul des structures*  
Cours E.N.P.C., Paris.
- FRIAA A. (1978)  
*Le matériau de Norton-Hoff généralisé et ses applications en analyse limite*  
C.R. Ac. Sc. Paris, t. 286, série A, pp. 953-956.
- FRIAA A. (1979) a)  
*Le matériau de Norton-Hoff généralisé. Applications*  
7ème Congrès Canadien de mécanique appliquée, Sherbrooke (Canada).
- FRIAA A. (1979) b)  
*La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité*  
Thèse D. es Sc., Univ. P. et M. Curie, Paris.
- GALILÉE G. (1638)  
*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*  
Dialogo secundo, Leyden.

- HEYMAN J. (1966)  
*The stone skeleton*  
Int. J1 Solids and Structures,  
vol 2, n°2, pp. 249-279.
- HEYMAN J. (1969)  
*The safety of masonry arches*  
Int. J1 Mech. Sc., vol 11,  
pp. 363-385.
- HEYMAN J. (1972)  
*Coulomb's memoir on statics : an  
essay in the history of civil  
engineering*  
Cambridge, G.B.
- HEYMAN J. (1980)  
*The estimation of the strength of  
masonry arches*  
Proc. A.S.C.E., Part. 2, n°69,  
pp. 921-937.
- HEYMAN J. (1982)  
*The masonry arch*  
Ellis Horwood Ltd. John Wiley.
- JOHANSEN K.W. (1932)  
*Bruchmomente der kreuzweise  
bewehrten Platten*  
Mémoire de l'A.I.P.C., vol 1,  
pp. 277-296, Zurich, Avril 1932.
- JOHANSEN K.W. (1952)  
*Brudlinieteorier*  
Copenhague.
- MATAR M. et SALENÇON J. (1979)  
*Capacité portante des semelles  
filantes*  
Revue Française de Géotechnique,  
n°9, pp. 51-76.
- MERCIER B. (1977)  
*Sur la théorie et l'analyse numérique  
de problèmes de plasticité*  
Th. D. es Sc., Univ. P. et M. Curie,  
Paris.
- MÉRY E. (1840)  
*Equilibre des voûtes en berceau*  
Ann. Ponts et Chaussées, I, pp. 50-70.
- MOREAU J.J. (1966)  
*Fonctionnelles convexes*  
Séminaire.
- NAYROLLES B. (1970)  
*Essai de théorie fonctionnelle des  
structures rigides plastiques parfaites*  
Journal de Mécanique, vol 9, n°3,  
pp. 491-506.
- SALENÇON J. et COUSSY O. (1979)  
*Analyse de la stabilité des remblais  
sur sols mous*  
C.R. Symposium Int. Méc. des Sols,  
Oaxaca, (Mexique), mars 1979, vol I,  
pp. 145-153.
- SALENÇON J. et HALPHEN B. (1981)  
*Cours de calcul des structures  
anelastiques. Elasto-plasticité*  
E.N.P.C., Paris.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1980)  
*Analyse de la stabilité des talus en  
sols cohérents anisotropes*  
C.R. Ac. Sc., Paris, t. 290, série B,  
pp. 493-496.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1981a)  
*Force portante des semelles filantes  
sur sols cohérents anisotropes homogènes*  
C.R. Ac. Sc., Paris, série II, t. 292,  
pp. 1097-1102.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1981b)  
*Analyse de stabilité des ouvrages cons-  
titués de sols cohérents anisotropes*  
C.R. X Cong. Int. Méc. sols, Stockholm  
(Suède), vol 3, pp. 515-518.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1981c)  
*Capacité portante des fondations sur  
sols anisotropes*  
Journée de rhéologie ENTPE, Juin 1981.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1981d)  
*Analyse de stabilité de remblais sur  
sols cohérents anisotropes*  
Colloque Int. CNRS, "Comportement  
Plastique des solides anisotropes",  
Grenoble, 15-19 Juin 1981.
- SUQUET P.M. (1978a)  
*Existence et régularité des solutions  
des équations de la plasticité*  
C.R. Ac. Sc., Paris, t. 286, Série A,  
pp. 1201-1204.

SUQUET P.M. (1978b)

*Existence et régularité des solutions  
des équations de la plasticité parfaite*  
Th. Doct., 3<sup>e</sup> cycle, Univ. P. et M. Curie,  
Paris.

TRISTAN-LOPEZ A. (1979)

*Application du calcul à la rupture à un  
problème de mécanique des sols anisotropes*  
Mémoire de D.E.A. (Labo. Méca. Solides,  
Palaiseau, E.N.P.C., Paris).

TRISTAN-LOPEZ A. (1981)

*Stabilité d'ouvrages en sols  
cohérents anisotropes*  
Th. Doct. Ing. ENPC, Paris.

ZYCZKOWSKI M. (1981)

*Combined loadings in the theory  
of Plasticity*  
P.W. N , Varsovie ; Nijhoff,  
La Haye.

CHAPITRE II : CRITÈRES DE RÉSISTANCE USUELS

ET FONCTIONS  $\pi( . )$  CORRESPONDANTES

- CHEN W.F. (1970)  
*Extensibility of concrete and theorems of limit analysis*  
Jl. Mech. Div., ASCE, vol 96, n°EM 3, pp. 341-352.
- CHEN W.F. (1975)  
*Limit analysis and soil plasticity*  
Elsevier Scientific Publishing Company.
- CHEN W.F. et COVARRUBIAS S. (1971)  
*Bearing capacity of concrete blocks*  
Jl. Eng. Mech. Div., ASCE, vol 97, n°EM 5, pp. 1413-1430.
- CHEN W.F. et DRUCKER D.C. (1969)  
*Bearing capacity of concrete blocks or rock*  
Jl. Eng. Mech. Div., ASCE, vol 95, n°EM 4, pp. 955-978.
- COURBON J. (1965)  
*Résistance des matériaux*  
Tome II, Dunod, Paris.
- COURBON J. (1975)  
*Plasticité appliquée au calcul des structures*  
Cours E.N.P.C., Paris.
- DRUCKER D.C. (1953)  
*Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems*  
Jl. Mech. Phys. Solids, vol. 1, n°4, pp. 217-226.
- DRUCKER D.C. (1954)  
*Coulomb friction plasticity and limit loads*  
Jl. Appl. Mech. Trans. ASME, vol 21, n°1, pp. 35-42.
- JOHANSEN K.W. (1962)  
*Yield line theory*  
Traduit du danois, ed. Cement and Concrete Association, Londres.
- MASSONNET Ch. et SAVE M. (1963)  
*Calcul plastique des constructions*  
Vol II, "Structures spatiales", ed. C.B.L.I.A., Bruxelles.
- SAVE M. et MASSONNET Ch. (1972)  
*Calcul plastique des constructions*  
Vol II, "Structures dépendant de plusieurs paramètres" 2ème édition, ed. C.B.L.I.A., Bruxelles.
- ZYCZKOWSKI M. (1981)  
*Combined loadings in the theory of Plasticity*  
P.W. N , Varsovie ; Nijhoff, La Haye.

CHAPITRE III : ANALYSE LIMITE

- BAQUÉ P., FELDER E., HYAFIL J. et d'ESCATHA Y. (1973)  
*Mise en forme des métaux, calculs par la plasticité*  
Dunod, Paris.
- BISHOP J.F.W. (1953)  
*On the complete solution to problem of deformations of a plastic rigid material*  
J. Mech. Phys. Solids, vol 2, n°1, pp. 43-53.
- BRINCH-HANSEN J. (1953)  
*Earth pressure calculation*  
Danish technical Press, Copenhagen.
- CHEN W.F. (1975)  
*Limit analysis and soil plasticity*  
Elsevier Scientific Publishing Company.
- COLLINS I.F. (1969)  
*The upper bound theorem for rigid-plastic solids generalized to include Coulomb friction*  
Jl. Mech. Phys. Solids, vol 17, n°5, pp. 323-338.
- DELBECQ J.M., FRÉMOND M., PECKER A. et SALENÇON J. (1977)  
*Eléments finis en plasticité et viscoplasticité*  
Jl. Méca. Appl. vol 1, n°3, pp. 267-304.
- DRUCKER D.C., GREENBERG H.J. & PRAGER W. (1951)  
*The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain*  
Jl. Appl. Mech. Trans. A.S.M.E., vol 18, p. 371.
- DRUCKER D.C., PRAGER W. & GREENBERG H.J. (1952)  
*Extended limit design theorems for continuous media*  
Quart. Appl. Math. vol 9, p. 381.
- DRUCKER D.C. (1954)  
*Coulomb friction plasticity and limit loads*  
Jl. Appl. Mech. Trans. A.S.M.E., vol 21, n°1, pp. 71-74.
- DRUCKER D.C. (1956)  
*On uniqueness in the theory of Plasticity*  
Quart. Appl. Math., vol 14, n°1, pp. 35-42.
- FRÉMOND M. et FRIAA A. (1978)  
*Analyse limite. Comparaison des méthodes statique et cinématique*  
C.R. Ac. Sc., Paris, t. 286, série A, pp. 107-110.
- FRÉMOND M., PECKER A. & SALENÇON J. (1974)  
*Méthodes variationnelles pour le matériau rigide-plastique*  
Symp. Franco-Polonais "Rhéologie et Mécanique des Sols", Nice, 1974.
- HILL R. (1948)  
*A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity*  
Quart. Jl. Mech. & Appl. Math., vol 1, p. 18.
- HILL R. (1950)  
*The mathematical theory of Plasticity*  
Clarendon Press, Oxford.
- HILL R. (1951)  
*On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point*  
Phil. Mag., vol 42, pp. 868-875.
- HILL R. (1952)  
*Comment on Dr. Lee's paper*  
Phil. Mag. vol 43, n°7, pp. 560-561.
- JOHNSON W. & KUDO H. (1962)  
*The mechanics of metal extrusion*  
Manchester University Press (G.B.).
- DE JOSSELIN DE JONG (1954)  
*Lower bound collapse theorem and lack of normality of strain rate to yield surface for soils*  
Proc. IUTAM Symp. on Rheology and Soil Mech., Grenoble, pp. 69-75.
- DE JOSSELIN DE JONG (1973)  
*A limit theorem for materials with internal friction*  
Proc. Symp. on the Role of Plasticity in Soil Mechanics, Cambridge (G.B.), pp. 12-21.

- KOBAYASHI S. (1965)  
*Mechanics of plastic deformation in metal processing*  
Mc Millan.
- KUDO H. (1960 - 1961)  
*Some analytical and experimental studies of axisymmetric cold-forging and extrusion*  
Int. J1 Mech. Sc. vol 2, pp. 102-107, vol 3, pp. 91-117.
- LEE E.H. (1952)  
*On the significance of the limit load theorems for an elastic-plastic body*  
Phil. Mag., vol 43, n°7, pp. 549-560.
- MANDEL J. (1965)  
*Sur l'unicité du champ de contraintes lors de l'équilibre limite dans un milieu rigide-plastique*  
C.R. Ac. Sc., Paris, t. 261, pp. 35-37.
- MANDEL J. (1966)  
*Cours de Mécanique des milieux continus, annexe XX*  
Gauthier-Villars, Paris.
- NAYROLES B. (1972)  
*Structure algébrique des théories classiques de plasticité*  
Plasticité et visco-plasticité, séminaire Ecole Polytechnique, (1972), Ediscience, Paris, 1974, pp. 149-173.
- LOUDIN J. et RAVALARD Y. (1978)  
*Contribution à la détermination des lois de comportement des métaux à froid par l'essai de compression*  
J1 Mécanique Appl., vol 2, n°1, pp. 19-46.
- PALMER A.C. (1966)  
*A limit theorem for materials with non-associated flow laws*  
J1 Mécanique, vol 5, n°2, pp. 217-222.
- RADENKOVIC D. (1961)  
*Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée*  
C.R. Ac. Sc., Paris, t. 252, pp. 4103-4104.
- RADENKOVIC D. (1962)  
*Théorie des charges limites*  
Séminaire Plasticité, Ecole Polytechnique, 1961, ed. J. Mandel, 1962, pp. 129-142.
- SACCHI G. & SAVE M. (1968)  
*A note on the limit loads of non-standard materials*  
Meccanica, vol 3, n°1, pp. 43-45.
- SALENÇON J. (1969)  
*La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane*  
Thèse D. es Sc., Paris.
- SALENÇON J. (1972 a)  
*Un exemple de non validité de la théorie classique des charges limites pour un système non standard*  
Proc. Symp. on the Foundations of Plasticity, Warsaw, (1972).  
Nordhoff Int. Pub., Leyden, 1974, vol II, pp. 432-439.
- SALENÇON J. (1972 b)  
*Théorie des charges limites*  
Séminaire Plasticité et visco-plasticité, Ecole Polytechnique, 1972, Ediscience Paris, 1974, pp. 205-229.
- SALENÇON J. (1974)  
*Bearing capacity of a footing on a  $\phi = 0$  soil with linearly varying shear strength*  
Géotechnique, vol 24, n°3, pp.443-446.
- SALENÇON J. (1975)  
*La méthode des lignes de glissement*  
Ecole d'été - "Mise en forme des métaux et alliages", Villars sur Ollon, Suisse.
- SALENÇON J. et HALPHEN B. (1981)  
*Cours de calcul des structures anélastiques. Elasto-plasticité*  
E.N.P.C., Paris.
- SAVE M. (1972)  
*Théorie des charges limites. Plaques et coques.*  
Séminaire "Plasticité et viscoplasticité", 1972, Ecole Polytechnique, Paris, Ediscience, pp. 251-292.
- SAVE M. et MASSONNET Ch. (1973)  
*Calcul plastique des constructions*  
Vol 2, 2ème ed., Ed. CBLIA, Bruxelles, 1972.

CHAPITRE IV : CALCUL À LA RUPTURE ET DIMENSIONNEMENT

- AUGUSTI G. (1975)  
*Some observations on the calculation of structural failure probability*  
Meccanica, vol 10, n°1, pp. 61-63.
- AUGUSTI G. et BARATTA A. (1972)  
*Theory of probability and limit analysis of structures under multi-parameter loading*  
Int. Symp. on Foundations of Plasticity, Varsovie 1972, in "Problems of Plasticity", ed. A. Sawczuck, Noordhoff, Leyden, 1974, pp. 347-364.
- CARMASOL A. (1983)  
*Approche probabiliste du calcul à la rupture*  
Thèse Dr. Ing., E.N.P.C. Paris.
- FREMOND M. et FRIAA A. (1978)  
*Analyse limite. Comparaison des méthodes statique et cinématique*  
C.R. Ac. Sc. Paris, t. 286, série A, pp. 107-110.
- FRIAA A. (1979)  
*La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité*  
Thèse D. es Sc., Univ. P. et M. Curie, Paris.
- GAVARINI C. (1969)  
*Concezione probabilistica del calcolo a rottura*  
Giornale del Genio Civile, n°8.
- GAVARINI C. (1972)  
*L'analyse limite des structures au moyen de la programmation mathématique*  
Séminaire "Plasticité et Viscoplasticité", 1972, Ecole Polytechnique, Paris. Ediscience, pp. 231-250.
- GAVARINI C. (1977)  
*Aspect probabiliste de la rupture*  
C.R. Séminaire "Evolution et théories modernes en élasticité et plasticité", CISCO, St Rémy-lès-Chevreuse, 12-15 Déc. 1979, pp. 131-157.
- GAVARINI C. et VENEZIANO D. (1970)  
*Calcolo a rottura e programmazione stocastica*  
Giornale del Genio Civile, n°4.
- GAVARINI C. et VENEZIANO D. (1971)  
*On the safety domain of structures*  
1ère Conf. Nat. italienne de Mécanique Théorique et Appliquée, Udin, Juin 1971.
- HEYMAN J. (1975)  
*Les principes du calcul plastique*  
"Les méthodes d'optimisation dans la construction", séminaire UTI-CISCO, 1973, Eyrolles, Paris, pp. 85-109.
- KRÉE P. et MET P.N. (1973)  
*Probabilité de ruine des structures élastiques*  
Construction métallique, 1973, n°4, pp. 49-60.
- LESCOUARC'H Y. et BROZZETTI J. (1972)  
*Dimensionnement optimal des structures*  
"Méthodes de calcul aux états limites des structures à barres", séminaire CTICM, 1972, pp. 407-455.
- MASSONNET Ch. (1972)  
*Problème des cas de charge à considérer. Problème du dimensionnement plastique optimal*  
"Méthodes de calcul aux états limites des structures à barres", séminaire CTICM, 1972, pp. 371-405.
- MASSONNET Ch. et ANSLIJN R. (1975)  
*Dimensionnement plastique optimal des structures planes formées de barres*  
"Les méthodes d'optimisation dans la construction", séminaire UTI-CISCO, 1973, Eyrolles, Paris, pp. 125-161.
- MASSONNET Ch. et SAVE M. (1967)  
*Calcul plastique des constructions*  
Vol 1, 2ème ed., Ed. CBLIA, Bruxelles, 1967.

- NAYROLES B. (1970)  
*Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites*  
Journal de Mécanique, vol 9, n°3, pp. 491-506.
- PALMER A.C. (1975)  
Commentaire sur "*Optimisation des structures en béton armé préfabriqué*"  
"Les méthodes d'optimisation dans la construction", séminaire UTI-CISCO, 1973, Eyrolles, Paris, p. 220.
- PARIMI S.R. et COHN M.Z. (1978)  
*Optimal solutions in probabilistic structural design*  
J. Mécanique Appliquée, vol 2, n°1, pp. 47-92.
- SALENÇON J. (1969)  
*La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane*  
Thèse D. es Sc., Paris.
- SALENÇON J. (1975)  
*Optimisation des structures par le calcul aux états limites*  
"Les méthodes d'optimisation dans la construction", séminaire UTI-CISCO, 1973, Eyrolles, Paris, pp. 117-124.
- SAVE M. (1972)  
*Théorie des charges limites. Plaques et coques*  
Séminaire "Plasticité et viscoplasticité", 1972, Ecole Polytechnique, Paris, Ediscience, pp. 251-292.
- SAVE M. et MASSONNET Ch. (1972)  
*Plastic analysis and design of plates, shells and disks*  
North-Holland Publ. Cy, Amsterdam, Londres.
- SAVE M. et MASSONNET Ch. (1973)  
*Calcul plastique des constructions*  
Vol 2, 2ème ed., Ed. CBLIA, Bruxelles, 1972.
- SAVE M. et SHIELD R.T. (1966)  
*Minimum weight design of sandwich shells subjected to fixed and moving loads*  
Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech. Munich, 1964, pp. 341-349.  
H. Görtler ed., Springer.
- TOAKLEY A.R. (1968)  
*"Optimum design using available sections"*  
Journal of the structural division  
Proceedings ASCE - Mai 1968.
- TRÉZOS C. (1977)  
*Approche probabiliste de la sécurité et remarques sur les codes actuels*  
Construction métallique, 1977, n°2, pp. 25-29.

CHAPITRE V : PROBLÈMES PLANS DE CALCUL À LA RUPTURE

- BISHOP J.F.W. (1953)  
*On the complete solution to problems of deformations of a plastic-rigid material*  
 J. Mech. Phys. Sol. vol 2, n°1,  
 pp. 43-53.
- HILL R. (1950)  
*The mathematical theory of Plasticity*  
 Clarendon Press, Oxford (G.B.).
- HILL R. (1952)  
*On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheets*  
 Jl. Mech. Phys. Solids, vol 1, n°1,  
 pp. 19-30.
- MANDEL J. (1942)  
*Equilibres par tranches planes des solides à la limite d'écoulement*  
 Thèse (ed. Louis Jean, Gap),  
 Cf. Travaux, Juin-Juillet-Décembre 1943.
- MANDEL J. (1966)  
*Mécanique des milieux continus*  
 Tome II, Gauthier-Villars, Paris.
- MANDEL J. et PARSY F. (1961)  
*Quelques problèmes tridimensionnels de la théorie du corps parfaitement plastique*  
 Séminaire plasticité, Ec. Polytechnique,  
 P.S.T. Ministère de l'Air n°116,  
 pp. 105-127.
- SALENÇON J. (1969)  
*La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane*  
 Thèse D. es Sc., Paris.
- SALENÇON J. (1974)  
*Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*  
 Eyrolles, Paris.
- SALENÇON J. et HALPHEN B. (1981)  
*Cours de calcul des structures anélastiques. Elasto-plasticité*  
 E.N.P.C., Paris.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1980)  
*Analyse de la stabilité des talus en sols cohérents anisotropes*  
 C.R. Ac. Sc., Paris, série B,  
 t. 290, pp. 493-496.
- SOKOLOVSKI V.V. (1955)  
*Theorie der Plastizität*  
 VEB Verlag Technik, Berlin.
- SOKOLOVSKI V.V. (1960)  
*Statics of soil media*  
 Butterworths, Londres.
- SOKOLOVSKI V.V. (1965)  
*Statics of granular media*  
 Pergamon Press.

CHAPITRE VI : EXEMPLES D'APPLICATIONS POUR LE MILIEU CONTINU

- BAKER R. et GARBER M. (1978)  
*Theoretical analysis of the stability of slopes*  
 Géotechnique, vol 28, n°4, pp. 395-411.
- BISHOP J.F.W. (1953)  
*On the complete solution to problem of deformations of a plastic rigid material*  
 J. Mech. Phys. Solids, vol 2, n°1, pp. 43-53.
- CAQUOT A. et KÉRISEL J. (1966)  
*Traité de mécanique des sols - 4ème édition*  
 Gauthier-Villars, Paris.
- CHEN W.F. (1975)  
*Limit analysis and soil plasticity*  
 Elsevier.
- COUSSY O. (1978)  
*Le calcul à la rupture dans la tenue des ouvrages en terre*  
 Thèse Dr. Ing. Univ. P. et M. Curie, Paris.
- COUSSY O. et SALENÇON J. (1979)  
*Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture*  
 Ann. Ponts et Chaussées, Nlle série, n°12, pp. 7-35.
- DE JOSSELIN DE JONG (1977)  
*Improvement of the lowerbound solution for the vertical cutoff in a cohesive, frictionless soil*  
 Géotechnique, vol 28, n°2, pp. 197-201.
- DRUCKER D.C. et PRAGER W. (1952)  
*Soil mechanics and plastic analysis or limit design*  
 Quart. Appl. Math., vol 10, pp. 157-165.
- DRUCKER D.C. (1953)  
*Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems*  
 Jl. Mech. Phys. Solids, vol 1, n°4, pp. 217-226.
- HEYMAN J. (1973)  
*The stability of a vertical cut*  
 Int. Jl. Mech. Sc., vol 15, n°10, pp. 845-854.
- HILL R. (1950)  
*The mathematical theory of plasticity*  
 Clarendon Press, Oxford (G.B.).
- PASTOR J. (1978)  
*Analyse limite : détermination numérique de solutions statiques complètes. Application au talus vertical*  
 Jl. Mécanique Appliquée, vol 2, n°2, pp. 167-196.
- PRANDTL L. (1920)  
*Über die Härte plastischer Körper*  
 Göttinger Nachrichten, Mat. Phys.
- PRANDTL L. (1923)  
*Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht*  
 Z. Angew. Math. Mech. 3, p. 401.
- RENDULIC L. (1935)  
*Ein Beitrag zur Bestimmung der Gleitsicherheit*  
 Der Bauingenieur n°19/20.
- REVILLA J. et CASTILLO E. (1977)  
*The calculus of variations applied to stability of slopes*  
 Géotechnique, vol 27, n°1, pp. 1-11.
- RYCHLEWSKI J. (1966)  
*Sur l'écoulement initial plastique d'un demi-espace dû à une distribution donnée de la vitesse*  
 C.R. Ac. Sc. Paris, série A, t. 263, pp. 417-420.
- RYCHLEWSKI J. (1967)  
*On a certain class of incipient plastic flow problems for the semi-espace*  
 Arch. Mech. Stosowanej, vol 19, n°2, pp. 261-281.
- SALENÇON J. (1972)  
*Butée d'une paroi lisse sur un massif plastique*  
 Jl. Mécanique, vol 11, n°1, pp. 135-146.

- SALENÇON J. (1974)  
*Quelques résultats théoriques concernant  
la butée d'une paroi sur un coin plastique*  
Ann. I.T.B.T.P., n°313, pp. 185-194.
- SAYIR M. et ZIEGLER M. (1968)  
*Zum Prandtlschen Stampelproblem*  
Ingenieur Archiv, vol 36, n°5, pp. 294-302.
- SHIELD R.T. (1954)  
*Plastic potential theory and Prandtl  
bearing capacity solution*  
Jl. Appl. Mech. trans A.S.M.E.,  
vol 21, pp. 193-194.
- SHIELD R.T. et DRUCKER D.C. (1953)  
*The application of limit analysis  
to punch-indentation problems*  
J. Appl. Mech. trans. A.S.M.E.,  
vol 20, pp. 453-460.
- TAYLOR D.W. (1937)  
*Stability of earth slopes*  
Jl. Boston Society Civil  
Engineers, vol 24, n°3,  
pp. 337-386.
- TAYLOR D.W. (1948)  
*Fundamentals of Soil Mechanics*  
John Wiley, 1960.
- TRISTAN-LOPEZ A. (1981)  
*Calcul à la rupture des ouvrages  
en sols anisotropes*  
Thèse Dr. Ing. Génie civil,  
E.N.P.C., Paris, 1981.

# *Index alphabétique*

**A**

Aléatoire (*chargement* -) - IV.7  
 Aléatoire (*dimensionnement* -) - IV.7  
 Analyse dimensionnelle - VI.4.1  
 Analyse limite - III.9  
 Anisotrope (*matériau* -) - I.3.4 ; I.4.8  
 Approche par l'extérieur  
 par les contraintes - I.4.1  
 Approche par l'extérieur  
 par les vitesses - I.4.2  
 Approche par l'intérieur - I.3.3  
 Appui (*fonction d'*-) - I.4.4 ; I.4.5  
 Association  
 (*théorème d'*-) - I.5.2 ; III.4.4  
 Autocontrainte (*champ d'*-) - I.2.2.2  
 Autodéformation (*champ d'*-) - I.2.2.2

**B**

Blocs (*champs  
de vitesse  
par* -) } III.5.2 ; VI.2.3.1 ;  
 VI.2.5.3 ; VI.2.6 ;  
 VI.2.7.3 ; VI.2.8.3 ;  
 Blocs }  
 (*mécanisme  
par* -) } VI.3.3 ; VI.4.2.3 ;  
 VI.4.4.3  
 Borne supérieure  
 (*méthode de la* -) - III.5.3

**C**

Capacités de résistance - I.2.1  
 Caractéristiques  
 (*méthode des* -) - I.4.8 ; V.3.4 ; V.5.4

Chargement extrême - I.2.3.1  
 Chargement limite - III.2 ; III.4.5  
 Chargement potentiellement  
 supportable - I.2.1  
 Charges limites (*théorie des* -) - III.1  
 Cinématique (*méthode* -) - III.2.4.2  
 Cinématiquement admissible  
 (*champ de vitesse* -) - I.2.2.2  
 Combinaison des approches - I.5.1  
 Compatibilité  
 "équilibre-résistance" - I.2.1  
 Compression avec confinement - VI.2.9  
 Compression en déformation plane - VI.2.7  
 Compression simple - VI.2  
 Confiance (*domaines de* -) - IV.7.4  
 Confinement - VI.2.9  
 Contrainte plane - V.2 ; V.3  
 Convexité (- de  $G(x)$ ) - I.2.2.3 ; I.4.6  
 Convexité (- de  $K$ ) - I.2.2.6  
 COULOMB - I.1  
 COULOMB (*critère de* -) - II.2.4 ; II.2.7 ;  
 II.2.9 ; VI.2.8 ; VI.4  
 COULOMB (*prisme de* -) - I.1 ; VI.4.2.3.1 ;  
 VI.4.4.3.1 ; VI.4.6  
 Courbe intrinsèque de  
 contrainte plane - V.3.4  
 Courbe intrinsèque de déformation  
 plane - I.4.6.2 ; V.5.2 ; V.5.4  
 Courbure (*tenseur des  
vitesses de* -) - II.5.1  
 Courbure (*vitesse de* -) - II.4.1  
 Critère de résistance - I.3.4  
 CULMANN - I.1  
 Curviligne (*milieu* -) - II.4

## D

Dalle mince - II.5  
 Décollement - VI.4.3.3 ; VI.4.5.3  
 Défaut (*approche par -*) - I.7.3  
 Déformation plane - V.4 ; V.5  
 Descente de charges - I.1  
 Différences finies  
 (*méthode des -*) - I.4.8  
 Dimensionnement - IV.1  
 Dimensionnement  
 (*paramètres de -*) - IV.2 ; IV.3.2  
 Dimensionnement extrême - IV.4.5  
 Dimensionnement potentiellement  
 stable - IV.1 ; IV.2 ; IV.4.1 ;  
 IV.4.4 ; IV.6.2  
 Dimensionnement surabondant - IV.4.5  
 Discontinuité de contrainte - VI.3.2 ;  
 VI.3.4 ; VI.4.2.2 ; VI.4.4.2  
 Discontinuité de vitesse -  
 I.2.2.2 ; I.4.2 ; I.4.5 ; I.4.6 ;  
 VI.2.6 ; VI.3.3  
 Domaine admissible pour  
 les contraintes - I.2.2.3  
 Domaine de sécurité - III.2.3  
 Domaines de confiance - IV.7.4  
 DRUCKER (*théorème de -*) - III.6.4.7 ;  
 VI.2.5.2 ; VI.3.5  
 DRUCKER-PRAGER (*critère de -*) - I.5.3 ;  
 II.2.5

## E

Ecoulement plastique  
 libre - III.3.2 ; III.4  
 Elasto-plasticité - I.7.7.1  
 Éléments finis (*méthode des -*) - I.4.8  
 Enveloppe convexe - I.4.4  
 Équilibres limites plans  
 (*théorie des -*) - V.3.4 ; V.5.4  
 États correspondants  
 (*théorème des -*) - VI.2.9.3.2

Etoilé ( $G(x)$  est -) - I.2.2.3  
 Etoilé ( $K$  est -) - I.2.2.6  
 Excès (*approche par -*) - I.7.4 ; I.7.5  
 Extérieur (*approches par l'-*) - I.4

## F

Flexion - II.4.3 ; II.4.9  
 Flexion déviée - II.4.5 ; II.4.6 ; II.4.7  
 Fonction économique - IV.6.3  
 Fonctions  $\pi$  - I.4.2 ; I.4.4 ; I.4.5  
 Force de masse - I.2.3.3  
 Forces constantes - I.2.3.4  
 Fouille verticale (*stabilité d'une -*) - VI.4  
 Fragile (*matériau -*) - I.7.7.2  
 Frottement (*contact avec -*) - VI.2.5 ;  
 VI.2.7.5 ; VI.2.8.5

## G

GALILÉE - I.1

## H

Homogène (*champ -*) - VI.2.2

## I

Incompatibilité "équilibre-résistance" - I.4  
 Indicatrice (*fonction -*) - I.4.6.1  
 Interface - I.2.3.3 ; II.3 ; III.6.4  
 Intérieur (*approche par l'-*) - I.3.3  
 Intérieur (*construction par l'-*) - I.3.1  
 Isotrope (*matériau -*) - I.4.6.2

## J

JOHANSEN (*critère de -*) - I.3.4 ; II.5.4  
 JOHANSEN (*dalle de -*) - II.5.4

- L**
- LEGENDRE (*transformée de -*) - I.4.6.1
- Ligne faible - VI.4.6
- Lisse (*interface -*) - II.3.2
- M**
- Matériau constitutif - I.2.3.2
- MÉRY - I.1
- Minimisation de  $P(V)$  - I.4.2 ; I.4.3 ; VI.2 ; VI.3 ; VI.4
- Mise en forme - III.5
- Mode de chargement  
(- à n paramètres) - I.2.2.2
- Modes de chargements homologues - V.3.3.1 ; V.5.3.1
- MOHR (*cercle de -*) - I.4.6.2
- MOHR (*représentation de -*) - I.4.6.2 ; VI.3.4
- N**
- Noeud (*mécanisme de -*) - IV.6.4.3
- O**
- Optimisation - IV.6.4.4 ; IV.6.5
- P**
- PALMER (*théorème de -*) - III.6.3.5
- Panneau (*mécanisme de -*) - IV.6.4.3
- Paramètres de chargement - I.2.2.2
- Parfaitement plastique (*comportement -*) - III.1
- Plaques - II.5
- Poinçonnement - VI.3
- Potentiellement critique (*section -*) - IV.6.4.3
- Potentiellement stable (*dimensionnement -*) - IV.1 ; IV.2 ; IV.4.1 ; IV.4.4 ; IV.6.2
- Potentiellement stable (*système -*) - I.2.1
- Potentiellement supportable (*chargement -*) - I.2.1
- Poutre (*mécanisme de -*) - IV.6.4.3
- Principe du travail plastique maximal - III.1 ; III.2
- Probabiliste (*approche -*) - IV.7
- Probabilité de ruine - IV.7
- Probabilité de stabilité - IV.7
- Problèmes plans (- de calcul à la rupture) - V
- Puissances virtuelles (*principe des -*) - I.2.2.2 ; I.4.2
- R**
- RADENKOVIC (*théorème de -*) - III.6.2 ; III.7.1 ; VI.2.5.2 ; VI.3.5
- Radial (*trajet -*) - I.3.1 ; I.7.2
- Résistance (*capacités de -*) - I.2.1
- Résistance (*critères de -*) - I.3.4
- Résistance totale - I.7.6.2
- Réticulée (*structure -*) - I.2.1 ; I.5.4
- Rigide parfaitement plastique (*matériau -, système -, structure -*) - III.4
- Rugueuse (*interface parfaitement -*) - II.3.5
- Ruine plastique - III.1 ; III.2.5 ; III.3 ; III.4.5
- Rupture (*coefficient de -*) - I.7.2 ; I.7.6.2
- S**
- Sécurité (*coefficient de -*) - I.7.7.1 ;
- Sols - III.7
- Solution complète - I.5.2 ; III.3.2 ; V.3.5 ; V.3.6 ; V.5.5 ; V.5.6
- Sous-différentiel - I.4.6.1
- Spirale logarithmique - VI.4.4.3.2
- Stabilité potentielle - I.2.1
- Standard (*matériau -*) - III.8.2
- Statique (*méthode -*) - III.2.4.1
- Statiquement admissible (*champ de contrainte -*) - I.2.2.2

## T

Torsion - II.4.4 ; II.4.8 ; II.4.9  
 Traction - II.4.2 ; II.4.8  
 Tranches minces (*hypothèse des -*) - V.3.6  
 TRESCA (*critère de -*) - II.2.3 ; II.2.6 ;  
 II.2.8 ; II.3.3 ; VI.2 ; VI.3 ; VI.4  
 TRESCA (*plaque de -*) - II.5.3

## U

Unicité (*- des chargements  
 limites*) - III.2.2

## Unicité

(*théorème d'-*) - I.5.3 ; III.4.4

## Uniforme

(*champ de vitesse de  
 déformation -*) - VI.2.3.2 ;  
 VI.2.5.4 ; VI.2.7.3 ; VI.2.8.4

## V

Von MISES (*critère de -*) - II.2.2 ;  
 VI.2 ; VI.3

Von MISES (*plaque de -*) - II.5.2

Achévé d'imprimer  
sur les presses  
de l'Imprimerie Marcel Bon  
70 Vesoul  
Dépôt légal n° 2688  
Juin 1983