Série de TD N° 04

Exercice 1 : Traduire les énoncés suivants en logique des prédicats :

1) Tous les hommes sont méchants. $\forall x\, (h(x) \to m(x))$
2) Seulement les hommes sont méchants. $\forall x\, (m(x) \to h(x))$
3) Il existe des hommes méchants. $\exists x\, (h(x) \wedge m(x))$
4) Il existe un homme qui n'est pas méchant. $\exists x\, (h(x) \wedge \neg\, m(x))$
5) Il n'existe pas d'homme méchant. $\exists x\, (h(x) \wedge m(x))$
6) Il existe un homme qui aime toutes les femmes. $\exists x\, (h(x) \wedge \forall y\, (f(y) \to aime(x, y))$
7) Chaque chat connaıt un chien qui le déteste. $\forall x\, (chat(x) \to \exists y\, (chien(y) \wedge connait(x, y) \wedge deteste\, (y, x)))$
8) Tous les poissons, sauf les requins, sont gentils avec les enfants.
$\forall x\, (poisson(x) \wedge \neg\, requin(x) \wedge \forall y\, (enfant(y) \to gentil(x, y)))$
9) Tous les oiseaux ne peuvent pas voler. $\exists x\, (oiseau(x) \wedge \neg\, vole(x))$
10) Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde, ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne. $(\forall x \exists y\, aime(x, y) \wedge \neg\, (\exists x \forall y\, aime(x, y))) \vee (\exists x \forall y\, aime(x, y) \wedge \exists x \forall y\, \neg\, aime(x, y))$
11) Il y a des gens que l'on peut rouler tout le temps et quelquefois on peut rouler tout le monde, mais on ne peut pas rouler tout le monde à chaque fois. $\exists x \forall t\, rouler(x, t) \wedge \exists t \forall x\, rouler(x, t) \wedge \forall t \forall x\, \neg\, rouler(x, t)$
12) N'importe qui peut apprendre la logique s'il travaille assez. $\forall x\, (travaille\_\, assez(x) \to apprend\_logique(x))$

Exercice 2 : Traduire en français les formules suivantes :

1) $\forall x\, (E(x) \to (\exists y\, (C(y) \wedge \exists z\, (M(z) \wedge T\, (x, y, z))))$,
avec E(x): x est étudiant,
C(y): y est un cours,
M(z): z est un enseignant,
T (x, y, z): x suit le cours y enseigné par z
Tout étudiant suit un cours assuré par un enseignant

2) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (T\, (x) \wedge C(y, x) \wedge C(w, x) \wedge D(y, z) \wedge D(y, w)) \to G(f(g(y), g(z)), g(w))$,
avec T (x) : x est un triangle,
C(x, y) : y est le coté de x,
D(x, y) : x est différent de y,
G(x, y) : x est plus grand que y,
f(x, y) : somme de x et de y,
g(x) : longueur de x.
Pour tout triangle dont les côtés sont distincts, la somme des longueurs de deux de ses côtés est supérieure à la longueur du troisième.

Exercice 3. On se place dans un langage du premier ordre modélisant les entiers qui utilise les symboles suivants :
– les constantes 0, 1;
– les symboles de fonction binaires + et $*$ qui représentent l'addition et la multiplication et seront notés de manière usuelle $x + y$ et $x * y$;
– les symboles de prédicats unaires Pair(x) et Prem(x) représentant respectivement le fait que x est un nombre pair et x est un nombre premier (on rappelle qu'un nombre est premier s'il est strictement plus grand que 1 et n'est divisible que par 1 et par lui-même).
– les symboles de prédicats binaires Div(y, x) qui représente le fait que y divise x, Egal(x,y) qui représente que x est égal à y et Inf_egal(x, y) qui représente que x est inférieur ou égal à y.

1. Formaliser les énoncés suivants :

(a) Il existe un entier plus petit ou égal à tous les autres. $\exists n\ \forall m\ (Inf\_egal\ (n, m))$

(b) Il n'existe pas d'entier plus grand ou égal à tous les autres, mais pour tout entier il en existe un qui est strictement plus grand. $\neg (\exists n, \forall m, \text{Inf\_egal}\,(m, n) \wedge \forall m, \exists n, (\text{Inf\_egal}\,(m , n) \wedge \neg egal(n, m)))$

(c) Tout nombre entier pair est égal à la somme de deux nombres entiers premiers.

$\forall n, (Pair(n) \Rightarrow \exists p, \exists q, (\text{egal}(n, p + q) \wedge Prem(p) \wedge Prem(q)))$

(d) L'ensemble des entiers premiers est non borné. $\forall n, \exists p, (Prem(p) \wedge \text{Inf\_egal}\,(n, p))$

2. Expliquer par des phrases le sens de chacune des formules suivantes et dire si elles sont vérifiées dans le modèle des entiers :

(a) $\forall xy, (\text{Pair}(x) \wedge \text{Pair}(y) \rightarrow Pair(x + y))$

La somme de deux entiers pairs est pair, ce qui est vrai dans le modèle des entiers.

(b) $\forall xy, \exists z, (\text{Div}(x, z) \wedge \text{Div}\,(z, y))$

Pour tout entiers x et u, il existe z tel que x divise z et z divise y.

3. Pour chacun des prédicats suivants, donner une formule équivalente qui n'utilise que les symboles de constantes 0 et 1, les fonctions + et ∗ et la relation d'égalité.

(a) $Pair(x) \equiv \exists y, \text{egal}\,(x, y + y)$

(b) $Div(y, x) \equiv \exists z, \text{egal}\,(x, y * z)$

(c) $Prem(x) \equiv (\text{Inf\_egal}\,(1 + 1, x) \wedge \forall y, (Div(y, x) \Rightarrow (\text{egal}(x, y) \vee egal(y, 1))))$

Exercice 4 Indiquer les occurrences libres et liées de la variable x dans les formules suivantes :

$\exists x\, Q(x) \wedge P(x,x) \rightarrow \neg Q(x) \wedge P(x,y)$

1ier occurrence de x est liée mais les autres occurrences sont libres, y tout libre

$\exists x\, \forall y\, p(x,y) \rightarrow \neg Q(y) \wedge P\,(x,y)$

Les 1ier occurrences de x et y sont liées mais les autres occurrences sont libres

$\forall x\, P(x,y) \rightarrow \exists x Q(x) \vee P(x,z) \wedge Q(y)$

1ier et 2eme occurrences de x sont liées mais les autres occurrences sont libres, yet z tout libre