

Exercice 3 Montrer que la fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq.

$$\psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Solution :

$\text{Supp } \psi = \{x \in \mathbb{R}, \psi(x) \neq 0\} = [-1, 1]$ qui est cpt ds $\mathbb{R}$

ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En effet, on remarque

que $\psi(x) = (\psi \circ h)(x)$ où

$$h(x) = x^2 \in \mathbb{R}_+$$

$$\ell(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Puisque $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que ℓ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$. Si $0 \leq x < 1$;

$$\ell'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\text{Si } x > 1, \ell'(x) = 0.$$

$$\text{Si } x = 1 :$$

$$\ell'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ell(x) - \ell(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{0-0}{x-1} = 0$$

$$\ell'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ell(x) - \ell(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-1} \stackrel{y=\frac{1}{x-1}}{=} \lim_{y \rightarrow -\infty} \lim_{y \rightarrow -\infty} y e^y = 0$$

Donc ℓ est dérivable au point $x=1$ et sa dérivée

$$\ell'(1) = 0 \text{ Alors,}$$

$$\ell'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

De plus, ℓ' est continue sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ et au point

$$x=1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^+} \ell'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ell'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} \right),$$

Donc ℓ' est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi ℓ est de classe C^1

sur $\mathbb{R}_+$, il en est alors de même pour ψ sur $\mathbb{R}$.

$$E''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \\ [2(x-1)^{-3} + (x-1)^{-4}] e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

E'' est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc ψ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Raisonnons par récurrence sur l'ordre de dérivation, en supposant qu'à l'ordre n , E est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$E^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \\ \sum_{i=1}^{m_n} a_i (x-1)^{-i} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

où $m_n \in \mathbb{N}^*$ et $a_i \in \mathbb{R}$.

Calculons la dérivée d'ordre $(n+1)$ de E .

Si $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} E^{(n+1)}(x) &= \sum_{i=1}^{m_n} (-ia_i) (x-1)^{-i-1} e^{\frac{1}{x-1}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m_n} (-a_i) (x-1)^{-i-2} e^{\frac{1}{x-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{m'_n} b_i (x-1)^{-i} e^{\frac{1}{x-1}}, \text{ avec } m'_n \in \mathbb{N}^*, b_i \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Si } x > 1, \quad E^{(n+1)}(x) = 0$$

$$\text{Si } x = 1, \quad E^{(n+1)}(1) = 0$$

$$E^{(n+1)}(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{E^{(n)}(x) - E^{(n)}(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{i=1}^{m_n} a_i (x-1)^{-i-1} e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} \sum_{i=1}^{m_n} a_i y^{i+n} e^y = 0$$

$$E^{(n+1)}(1) = 0$$

Donc

$$E^{(n+1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 1 \\ \sum_{i=1}^{n+1} b_i (x-1)^{-i} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Il est clair que $E^{(n+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $E \in C^n(\mathbb{R}_+)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou alors $E \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 8 Soit S une fct continue sur $\mathbb{R}$ tq.
 $0 \leq S(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$

On pose $S_n(x) = S(\frac{x}{n}), n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose

$$f_n = f S_n, n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que le support de S_n est contenu dans $[-2n, 2n], n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dx, n \rightarrow +\infty$

Solutions

1) Rappelons que le support d'une fct est le complémentaire du plus grand ouvert où cette fonction est nulle. Si $x \notin [-2n, 2n]$, on a bien $|\frac{x}{n}| > 2$, alors $S_n(x) = 0$. Ainsi S_n est nulle dans l'ouvert $]-\infty, -2n[\cup]2n, +\infty[$, ce qui implique par déf. que $]-\infty, -2n[\cup]2n, +\infty[\subset \mathbb{R} \setminus \text{supp } S_n$ ou encore

$$\text{supp } S_n \subset [-2n, 2n], \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2) Il est clair que f est mesurable sur $\mathbb{R}$, de plus :

$$|f_n(x)| = |f(x) S_n(x)| = |f(x)| S_n(x) \leq |f(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty.$$

puisque f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

3) On a $|f_n| \leq |f|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et f sont int.
 et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$.
 Reste à montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement et

vers f sur $\mathbb{R}$ on envoie pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite
 numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $f(x)$.

En effet, soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, tq $|x| \leq p$, pour
 tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p$, on a $\rho_n(x) = 1$ car $|x| \leq n$ et
 par suite $f_n(x) = f(x)$ pour tout $n \geq p$.

Autre dit aut, x étant fixé, il existe $p \in \mathbb{N}$,
 $|f_n(x) - f(x)| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq p$ i.e.
 $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le T.C.D de Lebesgue affirme que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Exercice 18

Soit (f_n) la suite de fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \exp\left(-\frac{1}{1 - \frac{|t|^2}{n^2}}\right) & \text{si } |t| < n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que, pour chaque $k \geq 0$, la suite de fcts $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout cpt vers une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

A t-on convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

Solutions

Introduisons la fct $\theta(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

qui est bien un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

On a, $f_n(t) = \frac{1}{2^n} \theta\left(\frac{t}{n}\right)$. On en déduit que

$$f_n^{(k)}(t) = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n^k} \theta^{(k)}\left(\frac{t}{n}\right)$$

En particulier, si K est n'importe quel cpt de $\mathbb{R}$, on a

$$\sup_{x \in K} |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{\|\theta^{(k)}\|_\infty}{2^n n^k}$$

Ceci prouve que $f_n^{(k)}$ conv. unif sur tout cpt de $\mathbb{R}$ vers la fct nulle (le terme $\frac{1}{2^n}$ n'est pas utile que pour $k=0$).

En revanche, la convergence n'a pas lieu dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: si tel était le cas, les supports des (f_n) seraient tous inclus dans un mêm cpt K il est clair que $\text{supp}(f_n) = [-n, n]$.

Exercice 20 : Fonction plateau

Soit ϕ une fct C^∞ , à supp cpt, telle que ϕ est nulle en dehors de $[-1, 1]$, et $\int_{-1}^1 \phi(x) dx = 1$.

Le but de l'exercice est de contraindre à l'aide de ϕ

une fct C^∞ , égale à 1 sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et nulle en dehors de $[-1, 1]$.

$\Rightarrow$ Construire à partir de ϕ une fct C^∞ n égale à 0

sur $] -\infty, -1[$ et à 1 sur $[1, +\infty[$

2) En déduire une fct v égale à 1 sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et nulle sur $] -\infty, -1]$ et une fct w égale à 1 sur $] -\infty, \frac{1}{2}[$ et égale à 0 sur $]1, +\infty[$

3) Construire ψ

Solution:

On pose $u(x) = \int_{-\infty}^x e(t) dt$. Alors

• u est C^∞ comme primitive d'une fct C^∞

• Pour $x < -1$, $u(x) = 0$ puisque e est nulle sur $] -\infty, x[$

• Pour $x > 1$, on a

$$u(x) = \int_{-\infty}^x e(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} e(t) dt}_{=0} + \int_{-1}^1 e(t) dt + \int_1^x e(t) dt = 1$$

car $e \equiv 0$ hors $[-1, 1]$.

2) On va poser $v(x) = u(ax+b)$, de sorte que la fct affine $x \mapsto ax+b$ transforme -1 en -1 et $-\frac{1}{2}$ en 1 (ceci de sorte que l'intervalle $] -\infty, -1]$ soit transformé en $] -\infty, -1]$ et $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ en $[1, +\infty[$). On a donc $-a+b = -1$ et $-\frac{a}{2} + b = 1$. On en déduit que $a=4$ et $b=3$.

Il est facile de vérifier que $v(x) = u(4x+3)$ convient. En effet

$$\text{si } x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 4x+3 \geq 1 \Rightarrow u(4x+3) = 1 = v(x)$$

$$\text{si } x \leq -1 \Rightarrow 4x+3 \leq -1 \Rightarrow u(4x+3) = 0 = v(x)$$

Ensuite, on pose $w(x) = v(-x)$

3) On pose $\psi(x) = v(x)w(x) \in C^\infty$

$$\text{Si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow v(x) = w(x) = 1 \Rightarrow \psi(x) = 1$$

$$\text{Si } x \leq -1 \wedge x \geq 1 \Rightarrow v(x) = w(x) = 0 \Rightarrow \psi(x) = 0$$

Exercice 33 Une sorte de développement de Taylor en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soient $e, \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq. $\theta(0) = 1$. Démontrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e(x) = e(0)\theta(x) + x\psi(x)$$

Solution.

$$\text{Posons } \gamma(x) = e(x) - e(0)\theta(x).$$

Alors $\delta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\delta(0) = 0$. Appliquons la formule fondamentale du calcul intégral à δ entre 0 et $x \in \mathbb{R}$.
Alors, on a $\delta(x) = \int_0^x \delta'(t) dt$.

Faisons le changement $t = ux$. Alors, on a
$$\delta(x) = x \int_0^1 \delta'(ux) du.$$

D'après le thm de régularité des intégrales à paramètres, la fct. $x \mapsto \int_0^1 \delta'(ux) du$ est de classe C^∞ .

Posons alors $\psi(x) = \int_0^1 \delta'(ux) dx$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\delta(x) = x \psi(x).$$

Reste à montrer que ψ a un supp cpt. Puis δ est à supp cpt, et donc il existe $A > 0$ tq $\delta(x) = 0$ si $x \notin [-A, A]$.
Puis alors, puisque $x \neq 0$, on a nécessairement $\psi(x) = 0$ si $x \notin [-A, A]$ et donc la fct ψ est à supp cpt.

Exercice 48 Soit $\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ non identiquement nulle. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\epsilon_n(x) = \frac{1}{n} \epsilon(nx)$.
Étudier la convergence de la suite $(\epsilon_n)_n$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Corrigé :

Remarquons d'abord que clairement la suite $(\epsilon_n)_n$ converge simplement vers 0. Si on prouve que la suite $(\epsilon_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, ce ne peut être que vers la fct nulle. On remarque que si ϵ a son support dans $[-A, A]$, alors ϵ_n a son support dans $[-\frac{A}{n}, \frac{A}{n}] \subset [-A, A]$.
Toutes les fcts ϵ_n ont leur support contenu dans même cpt $[-A, A]$.

Reste à voir si les suites $(\epsilon_n^{(k)})$ convergent uniformément vers 0 sur $[-A, A]$. Il y a un problème dès la première dérivée. En effet, $\epsilon'_n(x) = \epsilon'(nx) \Rightarrow \|\epsilon'_n\|_\infty = \|\epsilon'\|_\infty$ et ceci ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et soit T_f la forme définie par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Montrer que $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exo 2: Montrer que :

- 1) Toute distribution régulière est d'ordre 0
- 2) la distribution de Dirac est d'ordre 0
- 3) la δ $\quad \quad \quad V_p(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1

Exo 3:

Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \phi(\sin x) dx.$$

Montrer que T est une distribution et écrire son support.

Corrigé:

T est bien définie et linéaire. Montrons que T est continue.

Soit $(\phi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq. $\phi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a

$$|\langle T, \phi_n \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |\phi_n(\sin x)| dx$$

$$\leq \sqrt{\pi} \|\phi_n\|_{C(K)}$$

K cpt de $\mathbb{R}$ tq. $\text{supp } \phi_n \subset K$.

$$\Rightarrow T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Par (cc), on trouve $m=0$ et $C=\sqrt{\pi}$

Donc T est une distribution d'ordre 0

Exo 4:

1) Montrer que si ϕ ne fct de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(x)$ converge.

2) On pose $\langle T, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(x)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Montrer que T est une distribution. Quel est son ordre??

Corollaire: Soit e est à support est K , il existe un entier naturel $m_K \in \mathbb{N}$ tq $e(x) = 0$ pour tout x tq $|x| > m_K$.
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{(n)}(x) = 0$ pour tout x tq $|x| > m_K$,
 et alors $e^{(n)}(x) = 0$, $\forall n \geq m_K + 1$.

Par conséquent, $\langle T, e \rangle = \sum_{n=0}^{m_K} e^{(n)}(x) < +\infty$.

2) Il est facile de vérifier que T est linéaire. De plus, on a que $|\langle T, e \rangle| \leq \sum_{n=0}^{m_K} |e^{(n)}(x)| \leq \sum_{n=0}^{m_K} \|e^{(n)}\|_{C(K)} = \textcircled{*}$

Par (cc), T est cent et alors $T \in \mathcal{B}'(\mathbb{R})$. De plus, on qu'il n'existe aucun m tq $\textcircled{*}$ soit satisfait
 indépendamment de e . K nous obligeons que T n'est pas une distribution d'ordre fini.

Exercice :

1) La fct. $f(x) = |x|$ est continue mais pas dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit T_f la distribution associée à f . Calculer la dérivée au sens des distributions de f .

2) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution définie par $T = \frac{1}{2} \delta_0^{(2)} + c_1 \delta_0' + c_2 \delta_0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Montrer que $x^2 T = \delta_0$.

Corrigé:

1) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle T_f', \phi \rangle &= - \langle T_f, \phi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 f(x) \phi'(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) \phi'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 x \phi'(x) dx - \int_0^{+\infty} x \phi'(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[x \phi(x) \right]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx - \left[x \phi(x) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \phi(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(x) dx - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \text{sgn}(x) \phi(x) dx = \langle \text{sgn}, \phi \rangle \end{aligned}$$

2) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \langle x^2 T, \phi \rangle &= \langle T, x^2 \phi \rangle \\ &= \langle T, \psi \rangle \quad \text{où} \quad \psi(x) = x^2 \phi(x) \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \delta_0^{(2)} + c_1 \delta_0' + c_2 \delta_0, \psi \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \delta_0^{(2)}, \psi \rangle + c_1 \langle \delta_0', \psi \rangle + c_2 \langle \delta_0, \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} (-1)^2 \langle \delta_0, \psi'' \rangle - c_1 \langle \delta_0, \psi' \rangle + c_2 \langle \delta_0, \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \psi''(0) - c_1 \psi'(0) + c_2 \psi(0) \end{aligned}$$

$$\psi''(x) = x^2 \phi''(x) + 4x \phi'(x) + 2\phi(x) \Rightarrow \psi''(0) = 2\phi(0)$$

$$\psi'(x) = 2x \phi(x) + x^2 \phi'(x) \Rightarrow \psi'(0) = 0, \quad \psi(0) = 0$$

$$\text{donc : } \langle x^2 T, \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle$$