Mr. D. Chaker
Niveau : M1
Dpt. Génie Civil et Hydraulique.
Module : DDS1

Dynamique des structures

1. Introduction

Un des mouvements les plus importants observés dans la nature est le mouvement oscillatoire, en particulier le mouvement harmonique: oscillations d'un pendule, d'une masse attachée à un ressort, d'un gratte-ciel , etc. Dans le cas des oscillations de systèmes mécaniques conservatifs isolés, on parle d'oscillations libres; en présence de frottement, l'amplitude des oscillations décroît et on observe des oscillations amorties. Si les oscillations sont entretenues par une action extérieure, on parle d'oscillations forcées. Dans ce dernier cas, on verra apparaître de nouveaux phénomènes tels que la résonance, qui peut avoir des conséquences catastrophiques. Cependant, la plupart des problèmes observés (mis à part les tremblements de terre) sont liés à des critères d'aptitude au service. Ceux-ci demandent une connaissance précise du comportement linéaire des structures

2.1 **Notions de base**

Mouvements

Une structure sollicitée par une charge subit un certain mouvement; dans le cas d'une sollicitation uniquement en traction, le mouvement sera translationnel et, dans le cas d'une flexion, celle-ci imprimera à la structure un mouvement translationnel et rotationnel. Le mouvement oscillatoire d'une structure, dont le lieu géométrique est connu (dans un système de coordonnées déterminé) est caractérisé par un régime oscillatoire dépendant de la rigidité, de la masse et de l'amortissement de la structure. Les différents types de régime d'un mouvement oscillatoire sont le régime harmonique, le régime périodique et le régime transitoire.

Régime harmonique: décrit un mouvement oscillatoire au voisinage d'une

Position d'équilibre (ex : machineries)

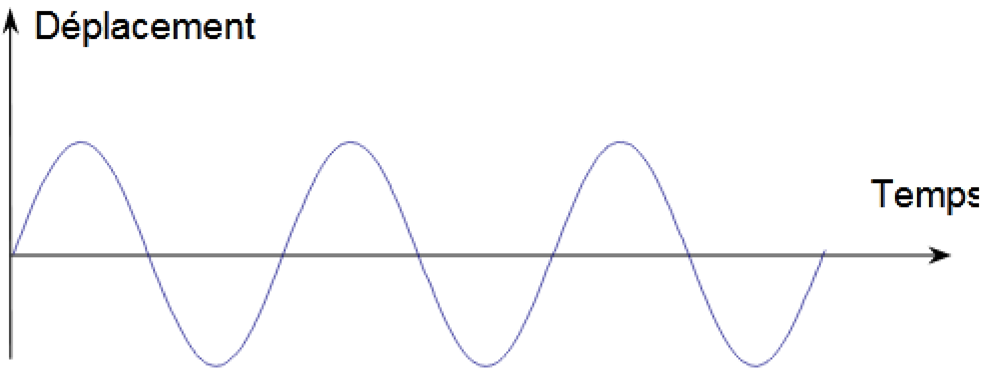


Figure (2.1.a) – Charge harmonique

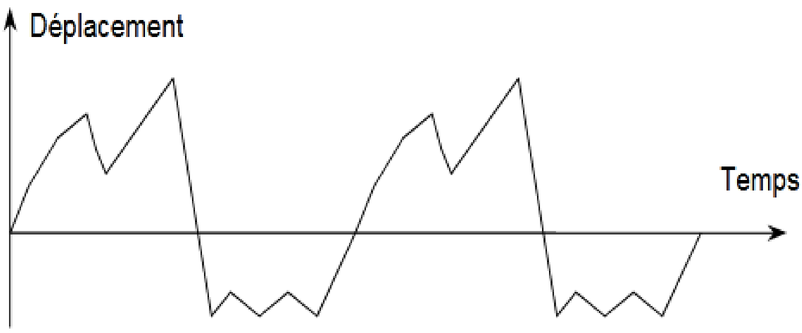


Figure (2.1.b) – Charge périodique quelconque

2.2 Evolution dans l'espace

Comme pour l'analyse statique, l'analyse dynamique des structures peut être effectuée dans le plan ou en trois dimensions. Ce cours se limitera à l'analyse des mouvements dans le plan, (Exemples: flexion plane, traction plane, etc.).

Mouvement dans le plan⇒3 degrés de liberté:

-translations selon x et y

-rotation autour de z (dans le plan xy)

Mouvement dans trois dimensions⇒6 degrés de liberté:

-translations selon x, y et z

-rotations autour de x, y et z

2.3 Définition de quelques grandeurs dynamiques

Pulsation propre: $\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ **[rad/s]**

Où, k: rigidité de l'élément [N/m] et m: masse de l'élément [kg],

Période propre: $\boldsymbol{T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}}$ **[s],**

Fréquence ou fréquence propre: $\boldsymbol{f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}}$ **[s $^{-1}$] ou [Hz].**

Remarque: Ces trois grandeurs (pulsation, période et fréquence) portent la dénomination «propre» car il s'agit de propriétés qui sont propres à l'oscillateur, dépendant uniquement de la masse et de la rigidité de celui-ci.

2.4 Rigidité de la structure

La rigidité d'une structure, k(en [N/m]), dépend des dimensions géométriques de celle-ci et du module d'élasticité du matériau qui la compose. La rigidité équivaut à la force qu'il faut exercer sur l'élément pour induire un déplacement unitaire. Il est à noter que ce cours se limite à l'utilisation de matériaux élastiques linéaires, la rigidité est donc constante tout au long des analyses. La rigidité vaut:

$$k = \frac{F(\delta x)}{\delta x}$$

où: δx est un déplacement (translation / rotation) unitaire
$F(\delta x)$: est la force qui permet d'induire le déplacement unitaire δx/.

2.4.1 Exemples de Rigidités d'un système à un degré de liberté.

- **Rigidité axiale**

La rigidité axiale d'un élément de structure est donné par:

$$\boldsymbol{k = \frac{EA}{L}}$$

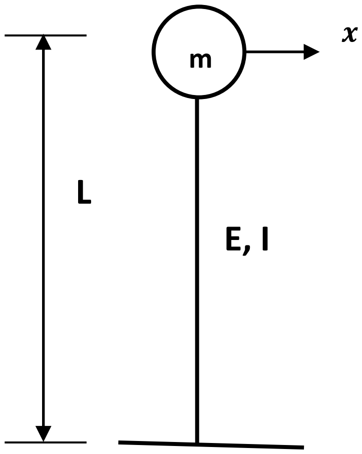
avec, A: aire de la section droite de l'élément (m²);
E: module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (N/m²);
L: longueur de l'élément (m).

- **Rigidité Flexionnelle**

La rigidité flexionnelle d'un élément de structure dépend des conditions de liaison à ses deux extrémités. On peut distinguer les cas suivants:

- **Elément Encastré a la base**

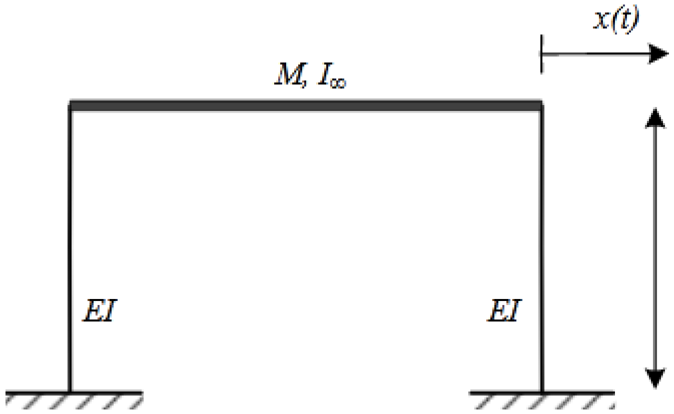
La Rigidité d'une colonne encastrée à la base dont une masse Ponctuelle est fixée à son autre extrémité (château d'eau).



La rigidité de cette structure pour un déplacement horizontal de la masse prend la valeur suivante: $\boldsymbol{k = \frac{3EI}{L^3}}\,(N/m)$
Avec, A: aire de la section droite de l'élément (m²),
E: module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (N/m²),
L**: longueur de l'élément (m).**

- **Elément bi-encastré:**

Exemple : une colonne d'un portique encastré aux deux extrémités.



La Rigidité de chaque colonne (poteau) vaut : $\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{12}\boldsymbol{EI}}{\boldsymbol{L^3}} (N/m)$

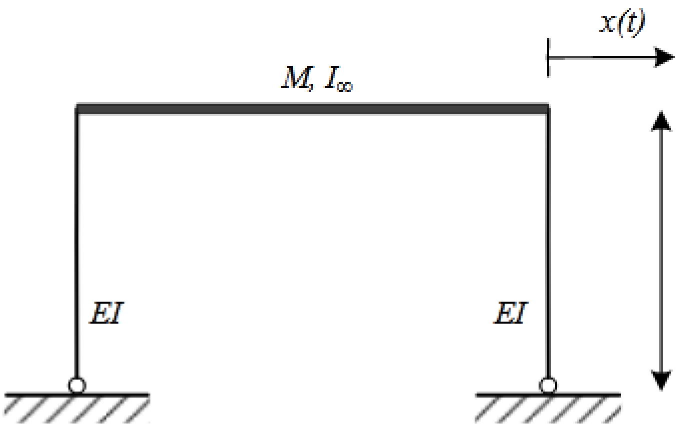
Avec, I: moment d'inertie de la section droite de l'élément (m^4).

E: module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (N/m_2).

L: longueur de l'élément (m).

- **Elément articulé-encastré:**

Exemple : poteau d'un portique ayant une liaison de type rotule dans l'une de ses deux extrémités.

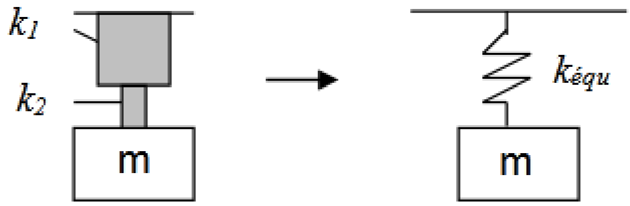


$$\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{EI}}{\boldsymbol{L^3}} (\boldsymbol{N}/\boldsymbol{m})$$

2.5 Rigidité équivalente d'un système

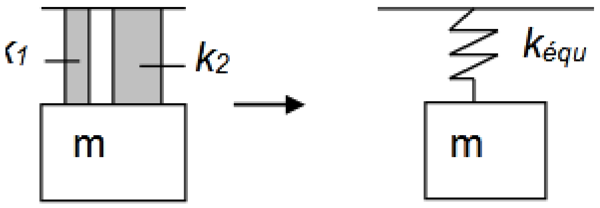
Dans le cas d'un système, une rigidité équivalente est :.

a) **Ressorts en séries** :



$$1/K\acute{e}qu = 1/K_1 + 1/K_2$$

b) **Ressorts en parallèles :**



$$K\acute{e}qu = K_1 + K_2$$

Figure (2.3)-Systèmes de ressorts en série et en parallèles

L'analogie avec l'électricité est un réseau avec des condensateurs à la place des ressorts.

3. Systèmes à un degré de liberté

3.1 Oscillations non amorties

On parle d'oscillations non amorties quand l'amortissement est nul, c'est-à-dire c=0.

avec, c: constante d'amortissement [Ns/m] ou [kg/s]

- **Modèle du système:**

Un système non amorti peut être modélisé, à sa position d'équilibre et à sa position déformée, comme présenté à la figure (3.1).

Les hypothèses de base du modèle sont:

-le ressort a un comportement force/déformation qui est linéaire;
-le ressort est sans masse;
-il n'y a aucun frottement provenant des rotules;
-la masse est concentré, et :
-la résistance de l'air est négligée.

Remarque: En réalité, dans les applications du génie civil, ces hypothèses ne sont jamais satisfaites. Toutefois, l'utilisation d'un tel modèle est très utile car elle permet de saisir les interrelations entre les différentes grandeurs du système ainsi que les tendances associées.

Dans un système linéaire, la gravité n'a aucun effet sur le mouvement oscillatoire, même pour des oscillations verticales.

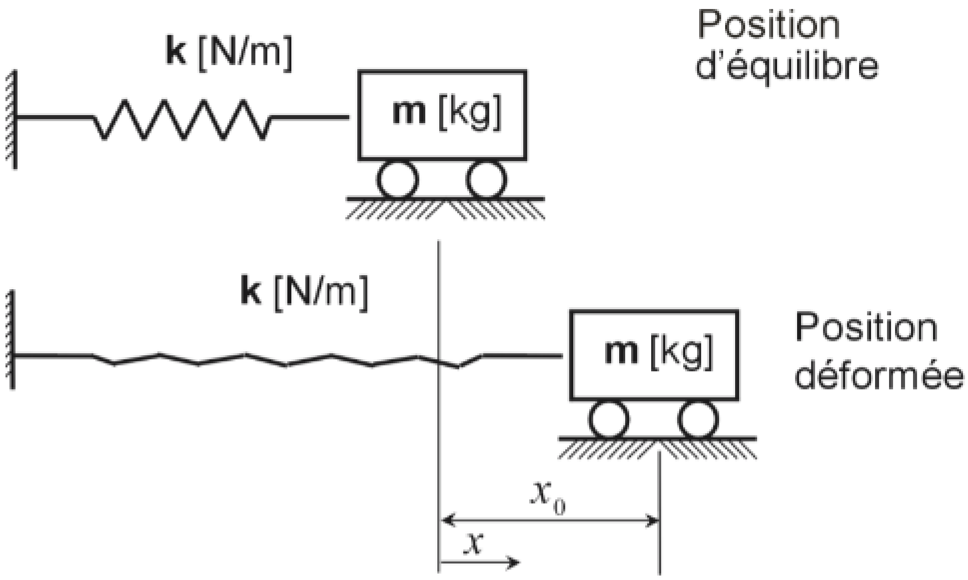
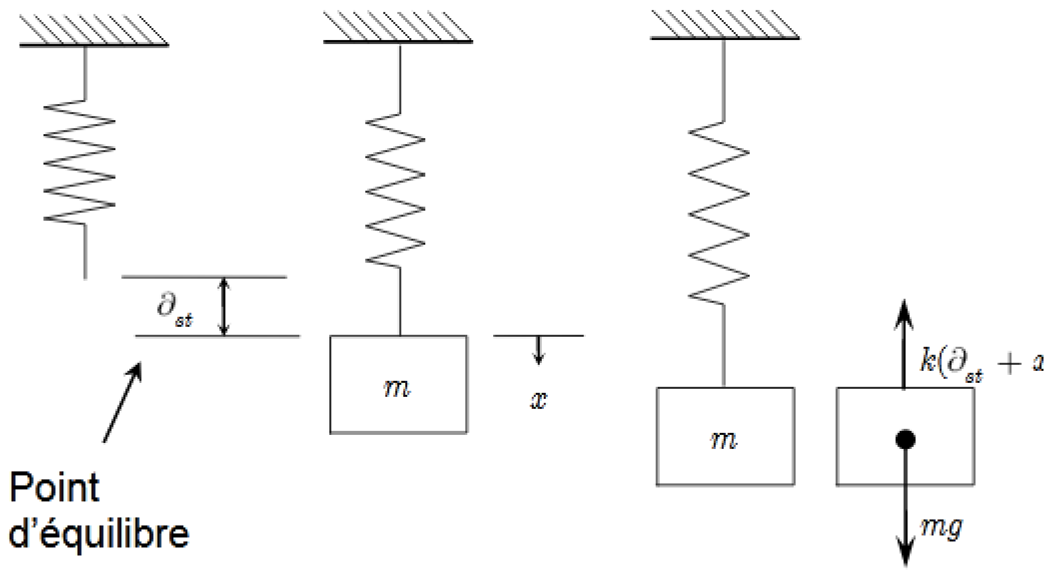


Figure (3.1) - Système non amorti

<u>Allongement sous L'effet du poids</u>



$$-k(x + \delta x) + mg = m\ddot{x}$$

$$k\partial x = mg \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

On constante ainsi qu'il n'y a pas d'effet. Cet argument n'est cependant valable que pour des systèmes linéaires.

<u>Forces agissant sur le système :</u>

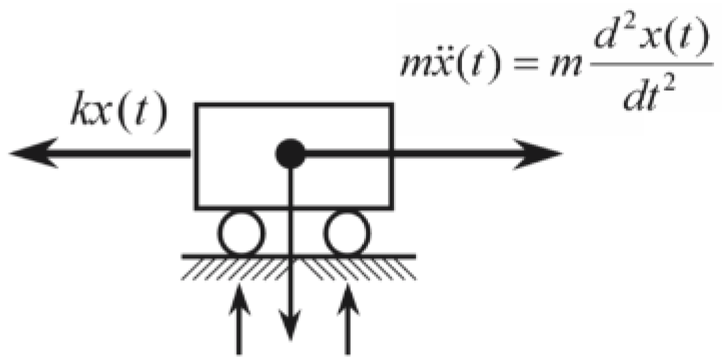


Figure (3.2) – Forces présentes dans un système non amorti

<u>Formulation de l' équation différentielle de mouvement(EDM)</u>

1°) **Selon la 2ème Loi de Newton**

$$\sum \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{m\ddot{x}(t)} \qquad (4a)$$

$$-\boldsymbol{k\ x(t)} = \boldsymbol{m\ddot{x}(t)} \qquad (4b)$$

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad (4c)$$

2°) Selon le principe de D'Alembert :

La somme de toutes les forces agissant sur le système y compris celle d'inertie est égale à Zéro.

$$\sum F/x = 0 \Leftrightarrow mx + k\ddot{x} = 0 \qquad \textbf{(4d)}$$

3°) Selon le principe du travail virtuel

La somme des travaux virtuels de toutes les forces agissant sur le système pour un déplacement virtuel ∂x doit être nulle.

$$\sum \delta w = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x}\delta x + kx\delta x = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \textbf{(4e)}$$

- **Solution de l'équation de mouvement :**

$$x(t) = A\, sin(\omega_n\, t) \qquad \textbf{(5a)}$$

par substitution de la solution dans l'équation différentielle de mouvement ; (5a) dans (4c).

$$(k - m\omega_n{}^2)Asin(\omega_n\, t) = 0 \Leftrightarrow (k - m\omega_n{}^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ **rad /s pulsation propre du système**

Solution générale :

$$x(t) = A\, sin(\omega_n(t) + B\, cos(\omega_n(t) \qquad \textbf{(5b)}$$

Ou bien: $x(t) = C\, sin(\omega_n t + \alpha)$ **(5c)**

et, ou bien: $x(t) = C\, cos(\omega_n t - \beta)$ **(5c')**

avec, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ **Amplitude de mouvement**

et $tan \propto = B/A,$ **ou** $tan\beta = B/A$

N.B A , B et α sont des constantes qui dépendent des conditions initiales du mouvement au temps t=0.

Au temps t=0, les conditions initiales sont : $x(0) = x_0 \; et \; \dot{x}(0) = v_0$

Après substitution de (5b) ou(5c) dans (4c), on obtient :

$$A = x_0 \;\; et \;\; B= \frac{v_0}{\omega_n}$$

La solution générale ou la réponse du mouvement libre non amorti est :

$$x(t) = x_0 sin(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} cos(\omega_n t) \qquad \text{(6a)}$$

Ou $x(t) = C \, sin(\omega_n t + \alpha)$ **(6b)**

avec, $C = \sqrt{{x_0}^2 + (\frac{v_0}{\omega_n})^2}$ **et** $tan \; \alpha = \frac{v_0}{\omega_n}$ **,** α: *angle de phase*

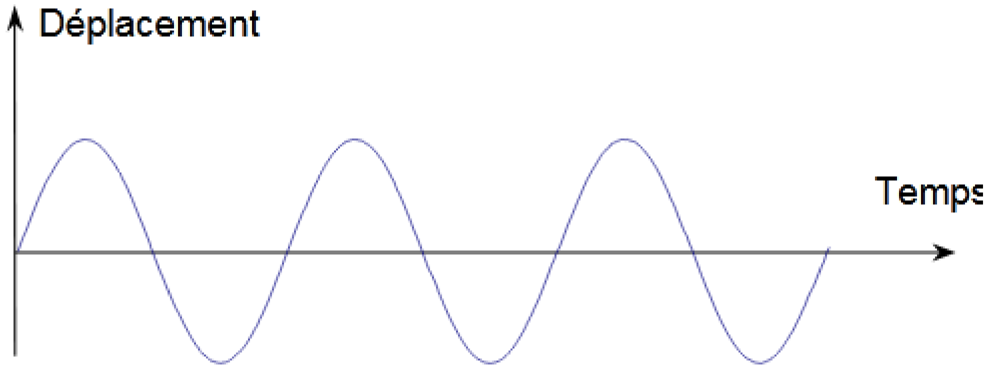


Figure (2.1.a) – Charge harmonique

Valeurs dynamiques pour des structures de génie civil:

Voici une liste de quelques considérations quant aux valeurs dynamiques (période et fréquence propre) de diverses structures de génie civil:

Bâtiments: plus la hauteur du bâtiment est élevée, plus sa rigidité diminue, et plus sa fréquence propre est petite car la fréquence propre est fonction de la rigidité. Ainsi, un bâtiment d'une trentaine d'étages a une fréquence propre plus faible qu'un bâtiment plus petit.

Barrages: les barrages ont généralement une fréquence propre élevée (dépendante de la hauteur d'eau); un phénomène d'oscillation pourrait être induit par des turbulences créées par le fluide sortant à la prise d'eau si celle-ci a un dysfonctionnement soudain.

Ponts: l'élancement étant en rapport direct avec le type de section, plus un pont est élancé (dans le sens longitudinal de la travée),plus sa fréquence propre diminue, celle-ci variant de 5 à 11 Hz pour un pont à section ouverte long de 20 m jusqu'à 0.6 Hz pour un pont haubané avec une portée de 140 m.

Cadres: plus le rapport entre les rigidités des traverses et des montants est grand, plus la fréquence propre est élevée.