Rappel sur l'analyse complexe

Ce chapitre aborde quelques outils d'analyse complexe fréquemment utilisés.

L'ensemble des nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est actuellement défini comme une extension de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, contenant en particulier un nombre imaginaire noté i tel que $i^2 = -1$. Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels, i.e :

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy;\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- x est la partie réelle de z, i.e $\mathcal{R}e(z) = x$.
- y est la partie imaginaire de z, i.e $\mathcal{I}m(z) = y$.
- On définit le module de z par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- On peut aussi repérer z par des coordonnées polaires, en posant $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$.

Fonction d'une variable complexe

Définition 0.1. *On appelle fonction d'une variable complexe toute fonction* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *définie par*

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

où u *et* v *sont deux fonctions réelles de deux variables réelles.*

Exemple 0.1. *1)*

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^2. \end{aligned}$$

On a $f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2-y^2)+i(2xy)$, *donc* $u(x,y) = x^2-y^2$ *et* $v(x,y) = 2xy$.

2)

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^z. \end{aligned}$$

On a $f(z) = f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$, *donc* $u(x,y) = e^x\cos(y)$ *et* $v(x,y) = e^x\sin(y)$.

La limite

Soit f *une fonction d'une variable complexe on a*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall z : (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon)$$

Remarque 0.1. *f a une limite si elle tend vers la même valeur suivant toutes les directions du plan. Pour prouver que f n'admet pas de limite en un point, il suffit de trouver deux directions de ce point telles que la fonction ne tende pas vers la même valeur suivant l'une ou l'autre.*

Exemple 0.2. *La fonction complexe définie sur* $\mathbb{C} - \{0\}$ *par*

$$f(z) = f(x+iy) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i(2xy),$$

n'a pas de limite en 0 car

- *Sur l'axe* (xx') *on a* $y = 0$, *alors* $f(z) = 1$ *et* $(z \to 0 \Leftrightarrow x \to 0)$, *donc* $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
- *Sur l'axe* (yy') *on a* $x = 0$, *alors* $f(z) = -1$ *et* $(z \to 0 \Leftrightarrow y \to 0)$, *donc* $\lim_{y\to 0} f(iy) = -1$.

La Continuité

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, *et* f *définie sur un voisinage de* z_0. *On dit que* f *est continue en* z_0 *si* $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Remarque 0.2. *f est continue si et seulement si les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ définies précédemment sont continues.*

Exemple 0.3. *La fonction complexe définie par $f(z) = f(x+iy) = \mathcal{R}e(z) = x$ est continue, car $u(x,y) = x$ et $v(x,y) = 0$ sont continues.*

La Dérivée

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, et f définie sur un voisinage de z_0. On dit que f est dérivable en z_0 si $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe.
On note alors cette limite $f'(z_0)$.

Remarque 0.3. *Si $z = z_0 + h$; $h \in \mathbb{C}$, alors*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

donc f est dérivable en z_0 ssi $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe.

Exemple 0.4. *La fonction complexe définie par $f(z) = f(x+iy) = \mathcal{R}e(z) = x$ n'est pas dérivable. Car pour $z = x+iy$ et $h = h_1 + ih_2$ on a*

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\mathcal{R}e(z+h)-\mathcal{R}e(z)}{h} = \frac{x+h_1-x}{h} = \frac{h_1}{h}.$$

De plus

- *Si $h \to 0$, sur l'axe des réelles on a $h = h_1$, alors $\dfrac{h_1}{h} = 1$ et donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h_1}{h} = 1$.*
- *Si $h \to 0$, sur l'axe des imaginaires on a $h_1 = 0$, alors $\dfrac{h_1}{h} = 0$ et donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h_1}{h} = 0$.*

Alors quand $h \to 0$, $\dfrac{h_1}{h}$ n'admet pas une limite.

Intégration complexe

Définition 0.2. *Un chemin est une application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$*

Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est un chemin fermé ou bien un lacet.
Un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est dit continument différentiable, ou de classe C^1, si $\gamma(t)$ admet une dérivée $\gamma'(t)$ qui est continue en chaque point $t \in [a,b]$. Si en plus $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$ on dit que γ est régulière.

Définition 0.3. *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe C^1, et soit f une fonction complexe définie sur l'image de γ. On appelle intégrale de f le long du chemin γ la quantité*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemple 0.5. *Soient $\gamma(t) = 2e^{it}$ et $0 \leq t \leq \pi$ on a*

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^\pi \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt = \int_0^\pi \frac{2ie^{it}}{2e^{it}}dt = \int_0^\pi idt = it]_0^\pi = i\pi.$$

Références

1. *M. Audin : Un cours sur les fonctions spéciales. irma.math.unistra.fr/ maudin*
2. *F. Aliouane : Fonctions spéciales pour les équations différentielles. Cours de Master. univ-jijel.dz*