Chapitre 1

Fonctions gamma et bêta, fonctions hypergéométriques

On commence ce chapitre par présenter la fonction gamma (notée par Γ), qui prolonge la fonction factorielle $n!$ à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Elle est considérée également comme une solution de l'équation fonctionnelle $f(z+1) = zf(z)$.

1.1 La fonction gamma

1.1.1 La fonction gamma sur $\mathbb{R}$

Définition 1.1. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction gamma, notée Γ, par l'intégrale généralisée suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Exemple 1.1. *1)* $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$

2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt.$

On pose $y = \sqrt{t}$, *on aura* $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}.$

Exercice 1.1. *Démonter que :* $\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Théorème 1.1. *La fonction Γ est classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, ses dérivées successives sont* *données par la formule*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt.$$

De plus, la fonction Γ *satisfait à l'équation fonctionnelle* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Théorème 1.2 (Formule de Stirlig). *Quand* $x \to +\infty$, *on a l'équivalence*

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x.$$

Théorème 1.3 (Formule de Gauss). *Soit* $x \in]0, +\infty[$, *on a*

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!n^x}.$$

Preuve. D'après l'équation fonctionnelle, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n+1) &= (x+n)\Gamma(x+n) = (x+n)(x+n-1)\Gamma(x+n-1) = \\ \cdots &= (x+n)(x+n-1)\cdots x\Gamma(x) = \Gamma(x)\prod_{k=0}^{n}(x+k). \end{aligned}$$

Donc pour démontrer la formule de Gauss il suffit de démonter que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(x+n+1)}{n!n^x} = 1.$$

Quand $n \to +\infty$, en applique la formule de Stirling sur $\Gamma(x+n+1)$ et $n! = \Gamma(n+1)$, on aura

$$\Gamma(x+n+1) \sim \sqrt{2\pi(x+n)} e^{-x-n} (x+n)^{x+n} \text{ et } n! = \Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n.$$

Alors

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{n!n^x} \sim \sqrt{1+\frac{x}{n}} e^{-x} (1+\frac{x}{n})^x (1+\frac{x}{n})^n.$$

Comme on a

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^x = 1, \ \lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{x}{n}} = 1, \ \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$$

alors on a le résultat. ■

Théorème 1.4 (Formule de Weierstrass). *Soit* $x \in]0, +\infty[$, *on a*

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} ((\frac{x}{k}+1) e^{-\frac{x}{k}}),$$

avec $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}))$, *s'appelle la constante d'Euler.*

Preuve. On a $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, alors d'après la formule de Gauss, on a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}{n!n^x} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x\prod_{k=1}^{n}(\frac{x}{k}+1)}{n^x}.$$

Alors, il suffit de démontrer quand $n \to +\infty$, l'équivalence $(\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}})n^x e^{\gamma x} \sim 1$. En effet, a partir de la définition de γ, on a

$$\frac{1}{e^{\gamma x}} = \exp(\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{n} + \ln(1+\frac{1}{n}))x) = \lim_{n\to+\infty} e^{\sum_{k=1}^{n}(-\frac{x}{k})+x\ln n} = \lim_{n\to+\infty}(\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}})n^x.$$

Alors $\lim_{n\to+\infty}(\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{x}{k}})n^x e^{\gamma x} = 1.$ ■

1.1.2 La fonction gamma sur $\mathbb{C}$

Définition 1.2. *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}e(z) > 0$, on définit la fonction gamma par l'intégrale :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Théorème 1.5. *L'intégrale $\Gamma(z)$ et absolument convergente pour $\mathcal{R}e(z) > 0$. Elle définit une fonction holomorphe sur ce demi-plan. Pour $\mathcal{R}e(z) > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Preuve. Devoir ■

Lemme 1.1. *La fonction gamma satisfait l'équation fonctionnelle $f(z+1) = zf(z)$, ainsi que l'équation*

$$\Gamma(z) = \Gamma(z+n)\prod_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{z+k}).$$

Exercice 1.2. *Démontrer le Lemme.*

Théorème 1.6. *La fonction Γ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$. Elle est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$ et admet un pôle simple au point $-n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que le résidu est égale $\frac{(-1)^n}{n!}$.*

Preuve. Voir [2] ■

Théorème 1.7. *La fonction Γ ne s'annule nulle pas, et la fonction entière $\frac{1}{\Gamma}$ est donnée par les formules de Gauss et de Weierstrass, pour $z \in \mathbb{C}$*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}{n!n^z} = ze^{\gamma z} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}((\frac{z}{k}+1)e^{-\dfrac{z}{k}}).$$

Corollaire 1.1. *La fonction $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$ elle est donnée par*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}).$$

Exercice 1.3. *Démontrer le Théorème.*

Théorème 1.8 ((Formule des compléments))**.** *Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$, on a*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Exercice 1.4. *1- Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.*

2- Monter que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Théorème 1.9 ((Formule de multiplication de Legendre-Gauss))**.** *Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma(\frac{z+k}{n}) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-z}\Gamma(z).$$

Cas particulier : *Pour $n = 2$, on a*

$$\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{2}) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^z}\Gamma(z).$$

1.1.3 La fonction bêta

Définition 1.3. *Soient $p, q \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}e(p) > 0$ et $\mathcal{R}e(q) > 0$. La fonction bêta est défini par*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

Remarque 1.1. *1- Par le changement de variable $u = 1-t$, on trouve :$\beta(p,q) = \beta(q,p)$.*

2- Par le changement de variable $t = (\cos\psi)^2$, on trouve

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\psi)^{2p-1}(\sin\psi)^{2q-1}d\psi.$$

Théorème 1.10. *Soient $p, q \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}e(p) > 0$ et $\mathcal{R}e(q) > 0$. On a la relation entre la fonction bêta et la fonction gamma*

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(P+q)}.$$

Preuve. D'après le Théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= (\int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}du)\left(\int_0^{+\infty} v^{q-1}e^{-v}dv\right)\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} u^{p-1}v^{q-1}e^{-u-v}dudv.\end{aligned}$$

On effectue le changement $u + v = v'$, alors $0 < u \leq v'$. D'où

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{v'} u^{p-1}(v'-u)^{q-1}e^{-v'}dudv'\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-v'}(\int_0^{v'} u^{p-1}(v'-u)^{q-1}du)dv'\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-v'}(\int_0^{v'} u^{p-1}(v')^{q-1}(1-\frac{u}{v'})^{q-1}du)dv'.\end{aligned}$$

Posons $u' = \dfrac{u}{v'} \Rightarrow du' = \dfrac{1}{v'}du \Rightarrow du = v'du'$. Donc

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} e^{-v'}(\int_0^1 (u'v')^{p-1}(v')^{q-1}(1-u')^{q-1}v'du')dv'\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-v'}(\int_0^1 (u')^{p-1}(v')^{p+q-1}(1-u')^{q-1}du')dv'\\ &= (\int_0^{+\infty} e^{-v'}(v')^{p+q-1}dv')(\int_0^1 u^{p-1}(1-u')^{q-1}du').\end{aligned}$$

D'où

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\beta(p,q).$$

Sachant que Γ ne s'annule jamais donc

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

∎

Exercice 1.5. *I- Soient les deux intégrales suivantes*

$$I = \int_0^{\infty} t^{\frac{-3}{2}}(1-e^{-t})dt,\ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\theta}d\theta$$

a) Réécrire I par la fonction gamma et J par la fonction bêta, puis par la fonction gamma.

b) Montrer que $I = 2\sqrt{\pi}$ et $J = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

II- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer la formule

$$\beta(x,x) = 2^{-2x+1}\beta(\frac{1}{2}, x).$$

Indication : *Utiliser deux changement de variables : $t = \frac{1}{2}(1+s)$, puis $u = s^2$.*

– Déduire la formule dupliquée de Legendre :

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}).$$

1.1.4 Fonctions hypergéométriques

Définition 1.4. ***(Symbole de Pochhammer)*** *Soient $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_-$. On définit le symbole de Pochhammer par*

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Le symbole de Pochhammer vérifie les propriétés suivantes

1- $(a)_0 = 1$.

2- $(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$.

3- $(a)_{n+1} = a(a+1)_n$.

4- $(a)_n = a(a+1)...(a+n-1)$.

En effet,

1– *On a ;* $(a)_0 = \frac{\Gamma(a+0)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = 1$.

2– *On a ;* $(a)_{n+1} = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)} = \frac{(a+n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = (a+n)(a)_n$.

3– *On a ;* $(a)_{n+1} = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)} = \frac{a\Gamma((a+1)+n)}{a\Gamma(a)} = \frac{a\Gamma((a+1)+n)}{\Gamma(a+1)} = a(a+1)_n$.

4– *On a ;*

$$\begin{aligned}
(a)_n &= \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma((a+n-1)+1)}{\Gamma(a)} \\
&= (a+n-1)\frac{\Gamma(a+n-1)}{\Gamma(a)} = (a+n-1)\frac{\Gamma((a+n-2)+1)}{\Gamma(a)} \\
&= (a+n-1)(a+n-2)\frac{\Gamma(a+n-2)}{\Gamma(a)} = ... = (a+n-1)(a+n-2)...(a+1).a.\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} \\
&= (a+n-1)(a+n-2)...(a+1)a.
\end{aligned}$$

Comme exemple $(1)_n = 1.2...n = n!$

D'après la propriété 4, on peut calculer le symbole de Pochhammer pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Définition 1.5. ***La fonction hypergéométrique*** *notée* ${}_2F_1(.,.;.;.)$ *est définie par la série entière*

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n. \tag{1.1}$$

Où $a,b,c,z \in \mathbb{C}$. ***La fonction hypergéométrique généralisée*** *notée* ${}_pF_q(.;.;.)$ *est définie par la série entière*

$$ {}_pF_q(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_1)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n...(b_q)_n n!} z^n. \tag{1.2}$$

Remarque 1.2. *Le rayon de convergence* ρ *de la série hypergéométrique est donné par*

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}| = \begin{cases} \infty \ si \ p < q+1; \\ 1 \ si \ p = q+1; \\ 0 \ si \ p > q+1 \end{cases}$$

où $c_n = \dfrac{(a_1)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n...(b_q)_n n!}$, *car*

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{(a_1)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n...(b_q)_n n!} \times \frac{(b_1)_{n+1}...(b_q)_{n+1}(n+1)!}{(a_1)_{n+1}...(a_p)_{n+1}} = \frac{(b_1+n)...((b_q+n)(n+1))}{(a_1+n)...(a_p+n)}.$$

Donc la série (1.1) *converge si* $|z| < 1$, *diverge si* $|z| > 1$ *et pour* $|z| = 1$ *la série converge si* $\mathcal{R}e(c-a-b) > 0$ *i.e* $\mathcal{R}e(c) > \mathcal{R}e(a) + \mathcal{R}e(b)$.

Exemple 1.2. *1)* $e^z = {}_1F_1(a;a;z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

2) ${}_2F_1(1,a;a;z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} z^n$, $|z| < 1$.

3) $(1-z)^{-\alpha} = {}_2F_1(\alpha,1;1;z)$, $|z| < 1$.

4) $z \times {}_2F_1(1,1;2;-z) = \ln(1+z)$, $|z| < 1$.

5) $z \times {}_2F_1(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2) = \arctan(z), |z| < 1$.

Proposition 1.1. *On a les limites suivantes*

1- $\lim_{b\to+\infty} {}_2F_1(a,b;c;\frac{z}{b}) = {}_1F_1(a;c;z)$.

2- $\lim_{c\to+\infty} {}_2F_1(a,b;c;cz) = {}_2F_0(a,b;.;z)$.

Preuve. 1. D'après la définition de ${}_2F_1$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{b\to+\infty} {}_2F_1(a,b;c;\tfrac{z}{b}) &= \lim_{b\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} (\frac{z}{b})^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!} \lim_{b\to+\infty} \frac{(b)_n}{b^n}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{b\to+\infty} \frac{(b)_n}{b^n} = \lim_{b\to+\infty} \frac{b(b+1)...(b+n-1)}{b^n} = 1$, alors on a

$$\lim_{b\to+\infty} {}_2F_1(a,b;c;\frac{z}{b}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!} = {}_1F_1(a;c;z).$$

2. On a

$$\begin{aligned} \lim_{c\to+\infty} {}_2F_1(a,b;c;cz) &= \lim_{c\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}(cz)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n(b)_n z^n}{n!} \lim_{c\to+\infty} \frac{c^n}{(c)_n} \\ &= {}_2F_0(a,b;.;z). \end{aligned}$$

■

Théorème 1.11 (Représentation intégrale d'Euler). *Pour $|z| < 1$ et $\mathcal{R}e(c) > \mathcal{R}e(b)$, on a*

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt.$$

Preuve. (Devoir 1) ■

Corollaire 1.2 (Formule de Gauss). *Pour $\mathcal{R}e(c) > \mathcal{R}e(a) + \mathcal{R}e(b)$, on a*

$${}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Exercice 1.6. *Montrer le Corollaire* 1.2.

Corollaire 1.3. *Pour $c \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_-$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

$${}_2F_1(-n,b;c;1) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}.$$

Preuve. D'après la formule de Gauss, nous avons

$${}_2F_1(-n,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c+n-b)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c-b)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \frac{\Gamma(c-b+n)}{\Gamma(c-b)} = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}.$$

■

Théorème 1.12. *Pour $|z| < 1$, on a*

$${}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\, {}_2F_1(a,c-b;c;\frac{z}{z-1})$$

Preuve. (Devoir 1) ■

Théorème 1.13. *Les dérivées de la fonction hypergéométrique sont données par :*

1- $\dfrac{d}{dz}\ {}_2F_1(a,b;c;z) = \dfrac{ab}{c}\,{}_2F_1(a+1,b+1;c+1;z)$.

2- $\dfrac{d^n}{d^n z}\ {}_2F_1(a,b;c;z) = \dfrac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\,{}_2F_1(a+n,b+n;c+n;z)$.

3- $\dfrac{d^n}{d^n z}\,{}_2F_1(a,b;c;z)|_{z=0} = \dfrac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}$.

Exercice 1.7. *Prouver ce théorème.*

Théorème 1.14. *La fonction hypergéométrique est solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :*

$$z(1-z)y'' + (c-(a+b+1)z)y' - aby = 0.$$

Preuve. On met $\alpha_n = \dfrac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}$, alors on peut vérifier facilement que

$$(c+n)(n+1)\alpha_{n+1} = (a+n)(b+n)\alpha_n.$$

Donc on aura

$${}_2F_1'(a,b;c;z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}z^n,$$

$$z.\,{}_2F_1'(a,b;c;z) = z\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha_n z^n,\ \textit{et}$$

$$\begin{aligned} z.\,{}_2F_1''(a,b;c;z) &= z\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha_n z^{n-2} = z\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\alpha_{n+1}z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\alpha_{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)\alpha_{n+1}z^n. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} z^2.\,{}_2F_1''(a,b;c;z) &= z^2\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\alpha_{n+1}z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\alpha_{n+1}z^{n+1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\alpha_n z^n. \end{aligned}$$

Après, si on remplace les séries dans l'équation différentielle, on trouve que les coefficients β_n de z^n sont tous nulles. Car

$$\begin{aligned} \beta_n &= n(n+1)\alpha_{n+1} - n(n-1)\alpha_n + c(n+1)\alpha_{n+1} - (a+b+1)n\alpha_n - ab\alpha_n \\ &= (n+c)(n+1)\alpha_{n+1} - (n(n-1) + (a+b+1)n + ab)\alpha_n \\ &= (n+c)(n+1)\alpha_{n+1} - (n^2 - \cancel{n} + an + bn + \cancel{n} + ab)\alpha_n \\ &= (n+c)(n+1)\alpha_{n+1} - (a+n)(b+n)\alpha_n = 0 \end{aligned}$$

■

Références

1. *W. W. Bell : Special functions for scientists and engineers. Van Nostrad Company LTD. 1968*
2. *F. Aliouane : Fonctions spéciales pour les équations différentielles. Cours de Master. univ-jijel.dz*