Chapitre 2

Polynômes orthogonaux

Rappelons d'abord que nous travaillons dans l'espace de Hilbert $L_2([a;b])$.

Définition 2.1. *On dit qu'une suite de polynômes* $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, *où* $p_n(x)$ *est de degré* n, *est orthogonale par rapport à la distribution* $d\mu(x)$ *s'il existe une suite de nombres positifs* $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ *telle que*

$$< p_n, p_m >= \int_a^b p_n(x)p_m(x)d\mu(x) = h_n\delta_{n,m}$$

où $b_{n,m}$ *est le symbole de* ***Kronecker*** *i.e* $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 \ si \ n = m; \\ 0 \ si \ n \neq m. \end{cases}$

Exercice 2.1. *Montrer que :* $\{1, \cos(\theta), ..., \cos(n\theta), ...\}$ *est une suite orthogonale sur* $[0, \pi]$.

Théorème 2.1. *Soit* $k_n > 0$ *le coefficient directeur du* $p_n(x)$. *Alors la suite de polynômes orthogonaux* $\mathbb{O} := \{p_n : n \geq 0\}$ *satisfait pour tout* $n \geq 1$

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)p_n(x) - C_n p_{n-1}(x) \tag{2.1}$$

où $A_n = \dfrac{k_{n+1}}{k_n}$, $C_n = \dfrac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \dfrac{h_n}{h_{n-1}}$ *et* $B_n = A_n \cdot (\dfrac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \dfrac{k'_n}{k_n})$ *avec* k_n *et* k'_n *désignent les deux premier coefficients de* P_n.

Exemple 2.1. *1-* ***Tchebychev*** *: Les polynômes de Tchebychev (de première espèce), sont ceux satisfaisant l'équation*

$$(1 - x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0. \tag{2.2}$$

Ils satisfont la relation de récurrence

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

En choisissant $A_n = 2$, nous avons obtenu $B_n = 0$ et $C_n = 1$.

2- ***Legendre*** *: Les polynômes de Legendre sont ceux satisfaisant l'équation*

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xT'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \tag{2.3}$$

Ils satisfont la relation de récurrence

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

En choisissant $A_n = \frac{2n+1}{n+1}$, nous avons obtenu $B_n = 0$ et $C_n = \frac{n}{n+1}$.

Corollaire 2.1. *Pour $n \geq 1$, on a*

$$h_n = \frac{A_0}{A_n}C_1C_2...C_nh_0.$$

Ceci ce déduit par itération de la formule $h_n = \frac{A_{n-1}C_n}{A_n}h_{n-1}$.

Théorème 2.2 (Théorème de Christoffel Darboux)**.** *Supposons que les polynômes $p_n(x)$ sont normalisée tels que*

$$h_n = \int_a^b p_n^2(x)d\mu(x) = 1.$$

Alors

$$\sum_{m=0}^{n} p_m(y)p_m(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{x-y} \tag{2.4}$$

où k_n est le coefficient directeur de $p_n(x)$.

Preuve. D'après le Théorème 2.1, on a

$$\begin{cases} p_n(y)p_{n+1}(x) = (A_nx + B_n)p_n(y)p_n(x) - C_np_n(y)p_{n-1}(x) \\ et \\ p_n(x)p_{n+1}(y) = (A_ny + B_n)p_n(x)p_n(y) - C_np_n(x)p_{n-1}(y). \end{cases}$$

$\blacksquare$

Donc si on note $K = \frac{k_n}{k_{n+1}} \cdot \frac{p_n(y)p_{n+1}(x) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}$, *alors*

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{A_n} \cdot \frac{p_n(y)p_{n+1}(x) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y} \\
&= p_n(x)p_n(y) + \frac{C_n}{A_n} \cdot \frac{p_{n-1}(y)p_n(x) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{x-y} \\
&= p_n(x)p_n(y) + \frac{1}{A_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}(y)p_n(x) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{x-y} \quad \text{"}C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \text{ car } h_n = 1, \forall n \geq 0\text{"} \\
&= p_n(x)p_n(y) + p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + \frac{1}{A_{n-2}} \cdot \frac{p_{n-2}(y)p_{n-1}(x) - p_{n-2}(x)p_{n-1}(y)}{x-y} \\
&\vdots \\
&= p_n(x)p_n(y) + p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + ... + p_1(x)p_1(y) + \frac{1}{A_0} \cdot \frac{p_0(y)p_1(x) - p_0(x)p_1(y)}{x-y}.
\end{aligned}$$

Comme $A_0 = k_1$ *et* $p_0(x) = p_0(y) = 1$ *alors*

$$\begin{aligned}
K &= p_n(x)p_n(y) + p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + ... + p_1(x)p_1(y) + \frac{1}{k_1}\frac{k_1x - k_1y}{x-y} \\
&= p_n(x)p_n(y) + p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + ... + p_1(x)p_1(y) + 1 \\
&= p_n(x)p_n(y) + p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + ... + p_1(x)p_1(y) + p_0(x)p_0(y) \\
&= \sum_{m=0}^{n} p_m(y)p_m(x).
\end{aligned}$$

2.1 Polynômes orthogonaux classiques

Les polynômes orthogonaux associés aux noms de "Jacobi, Chebychev, Legendre, Hermite, Laguerre" sont connus par "polynômes orthogonaux classiques" (P.O.C. en abrégé). On va discuter leurs propriétés en détail dans la suite de cette section. Ces familles séparées partagent de nombreuses fonctionnalités. Les points suivants sont les caractéristiques des P.O.C.

1- La famille $\{p'_n\}$ *est aussi un système orthogonal.*

2- p_n *satisfait l' E.D.O. du second ordre suivante*

$$A(x)u''(x) + B(x)u'(x) + \lambda_n u(x) = 0.$$

où A *et* B *(resp.* λ_n*) ne dépendent pas de* n *(resp. de* x*).*

3- Il existe une formule dite de Rodrigues de la forme

$$p_n(x) = \frac{1}{k_n y(x)}(\frac{d}{dx})^n[y(x)X^n(x)], \tag{2.5}$$

où X *est un polynôme de* x *avec des coefficients qui ne dépendent pas de* n *et* k_n *ne dépend pas de* x.

Ces trois propriétés sont si caractéristiques que tout système de polynômes orthogonaux les possédant peut être réduit à un système de P.O.C.

2.1.1 Séries Génératrices

i- Ordinaire : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n$.

Par exemple $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2}$.

ii- Exponentielle : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$.

Par exemple $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(x)\dfrac{t^n}{n!} = \dfrac{1}{2}e^x \cosh(t\sqrt{x^2-1})$.

iii- Dirichlet : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n(x)\dfrac{t^n}{n}$.

Par exemple $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(x)\dfrac{t^n}{n!} = -\dfrac{1}{2}\ln(1-2tx+t^2)$.

En général, il n'y a pas de manière simple de trouver une série génératrice à partir d'une suite donnée de polynômes. Cependant, étant donné le résultat, certaines démonstration sont simples, comme dans l'exemple des polynômes de Tchebychev :

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).
\end{aligned}$$

Multiplions par t^n et sommons sur les n. On obtiens

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^n &= 2x\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=2}^{\infty} T_{n-2}(x)t^n\\
&= 2xt\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-1}(x)t^{n-1} - t^2\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-2}(x)t^{n-2}\\
&= 2xt\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n - t^2\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n
\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n - xt - 1 = 2xt\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n - 2xt - t^2\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n$$

donc

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = 1 + xt - 2xt,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2}.$$

La série génératrice ordinaire donnée précédemment a donc été facilement retrouvée. Voyons maintenant un cas un peut plus complexe. Partons de la relation de récurrence décrivant les polynômes de Legendre, à savoir

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x).$$

Multiplions par t^{n-1} *et sommons sur les* n. *On obtiens*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)xP_{n-1}(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-2}(x)t^{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(x)t^{n+1}.\end{aligned}$$

Posons

$$h(t) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \Rightarrow h'(t) := \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1},$$

d'où

$$\begin{aligned}h'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(x)t^{n+1}\\ &= 2xt\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1}\\ &= 2xt.h'(t) + x.h(t) - t^2.h'(t) - t.h(t).\end{aligned}$$

Alors

$$(x-t)h(t) = (1-2xt+t^2)h'(t)$$

donc

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{x-t}{1-2xt+t^2}.$$

D'où

$$\ln(h(t)) = \frac{1}{2}\ln(1-2xt+t^2),$$

c-à-d

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = h(t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

2.1.2 Utilisation des séries génératrices

Outre le fait qu'elles contiennent de manière concise beaucoup d'information et elles ad-viennent telles quelles dans des applications, une autre raison d'utiliser des séries génératrices est d'obtenir des représentations dites "explicites" de polynômes orthogonaux. En voici deux exemples.

Dans le cas des polynômes de Hermite, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} &= e^{2xt-t^2} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2xt)^k}{k!}\cdot\frac{(-t^2)^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(2x)^k(t)^{2j+k}}{j!k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{2j+k=n}^{\infty} \frac{(-1)^j(2x)^k(t)^n}{j!k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \frac{(-1)^j(2x)^{n-2j}}{j!(n-2j)!})t^n.
\end{aligned}$$

Nous avons trouver

$$H_n(x) = n!\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \frac{(-1)^j(2x)^{n-2j}}{j!(n-2j)!}.$$

Pour ceux de Laguerre (généralisés), nous avons de même

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^n &= \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\cdot exp(-\frac{xt}{1-t}),\quad \alpha\in\mathbb{N} \\
&= \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-\frac{xt}{1-t})^k. \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{(-xt)^k}{(1-t)^{k+\alpha+1}}). \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-xt)^k}{k!}(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(k+\alpha+1)_n}{j!}t^j) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-xt)^k}{k!}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\begin{pmatrix}k+j+\alpha\\ j\end{pmatrix}t^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\begin{pmatrix}k+j+\alpha\\ j\end{pmatrix}t^{k+j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j+k=n}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\begin{pmatrix}n+\alpha\\ j\end{pmatrix}\right)t^n \quad \text{"}n=k+j\text{"} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{k!}\begin{pmatrix}n+\alpha\\ n-k\end{pmatrix}\right)t^n. \quad \text{"}j=n-k\text{"}
\end{aligned}$$

Nous avons trouver

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{k!}\begin{pmatrix}n+\alpha\\ n-k\end{pmatrix}.$$

2.1.3 Polynôme de Legendre P_n

Définition 2.2. *Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ noté par P_n et défini*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \tag{2.6}$$

est connu par le "polynôme de Legendre".

Exercice 2.2. *1) Calculer $P_n(0)$, puis trouver la valeur de l'intégrale*

$$I = \int_0^1 P_n(x)dx.$$

2) Trouver le développement en série de polynômes de Legendre de la fonction suivante

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ si \ -1 \leq x \leq \alpha \\ 1 \ \ si \ \alpha \leq x \leq 1. \end{cases}$$

3) Est ce que la somme de la série est égale à $f(x)$, en tous point ?

Remarque 2.1. *1) On peut également exprimer les polynômes de Legendre via la fonction hypergéométrique comme suit*

$$P_n(x) =_2 F_1(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}). \tag{2.7}$$

2) La formule de Rodrigues est

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n. \tag{2.8}$$

De plus, elle donne le sans difficulté les premiers polynômes de Legendre

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), ...$$

3) Par quelques manipulations supplémentaires on a également

$$i)\ P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n-2k \\ n \end{pmatrix} x^{n-2k};$$

$$ii)\ P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k;$$

$$iii)\ P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n-1 \\ k \end{pmatrix} (\frac{1-x}{2})^k.$$

Théorème 2.3 (Fonction génératrice). *Il est commode de représenter la suite des P_n au moyen de la série*

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \ \ avec\ |x| \leq 1\ rt\ |t| < 1, \tag{2.9}$$

où w est appeler "fonction génératrice" associée au polynôme de Legendre P_n et est défini par

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}.$$

Proposition 2.1. *Les polynômes de Legendre satisfont les relations de récurrences suivantes*

1. $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,\ n = 1, 2, ...$
2. $P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) - P_n(x) = 0,\ n = 1, 2, ...$
3. $[(1-x^2)p'_n(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0,\ n = 0, 1, 2, ...$

Cette dernière formule est appelée "équation différentielle de Legendre."

Théorème 2.4 (Représentation intégrale de Laplace). ***(Devoir)***

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n d\theta.$$

Théorème 2.5. *Soient $n, m\mathbb{N}$, alors les polynômes de Legendre sont Orthogonaux par rapport à la mesure*

$$d\mu(x) = \begin{cases} dx\ \ si\ \ -1 < x < 1 \\ 0\ \ sinon. \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}.$$

L'intervalle $[-1, 1]$ est appelée "intervalle d'orthogonalité"

Exercice 2.3. *Prouver ce théorème*

Théorème 2.6. $\{\sqrt{\frac{2}{2n+1}}P_n\}_{n=0}^{\infty}$ *Forme une base Orthonormale de $L^2[-1, 1]$.* ***(Devoir)***

Développement en série de polynôme de Legendre

Exemple 2.2. *Exprimons le polynôme $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$ en fonction des polynômes de Legendre. On a*

$$x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x),$$

donc

$$f(x) = \frac{8}{3}P_2(x) - 3P_1(x) + \frac{10}{3}P_0(x).$$

Notre Objectif maintenant est d'arriver à exprimer une fonction f défini sur $]-1,1[$ sous la forme $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nP_n(x)$. On utilise la projection orthogonale sur chaque P_n par

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx = \int_{-1}^{1}(\sum_{m=0}^{\infty} c_mP_m(x))P_n(x)dx = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}c_n,$$

d'où

$$c_n = (n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

Évidemment, on ne peut pas s'attendre à ce que ça marche à tous les corps. Il faut par exemple pouvoir intervertir sommation et intégrale, ce qui n'est pas évident. De même supposer que f peut s'écrire $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nP_n(x)$ n'est pas clair.

Proposition 2.2. *Si la fonction f est continue et dérivable par morceaux sur $]-1,1[$ et si $\int_{-1}^{1} f^2(x)dx<\infty$, alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nP_n(x)$ avec $c_n=(n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$ converge vers f en tout point où f est continue.*

Si la fonction continue a droit et a gauche au point x_0, donc la série converge vers

- ▲ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(f(x_0+\varepsilon)+f(x_0-\varepsilon))$.
- ▲ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(f(\pm 1\mp\varepsilon)$, *si* $x_0=\pm 1$.

Références

1. *W. W. Bell : Special functions for scientists and engineers. Van Nostrad Company LTD. 1968*
2. *F. Aliouane : Fonctions spéciales pour les équations différentielles. Cours de Master. univ-jijel.dz*