Université de Jijel
Faculté S.E.I
Département de Mathématiques

Master1 « Analyse fonctionnelle »
Module : Fonctions spéciales
Décembre 2024

Série de TD N°2

Exercice 1:

1) Calculer $P_n(0)$, puis trouver la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 P_n(x)\mathrm{d}x$$

2) Trouver le développement en série de polynômes de Legendre de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad \text{pour} \quad -1 \leq x \leq \alpha \\ \\ 1 \quad , \quad \text{pour} \quad \alpha < x \leq 1 \end{cases}$$

3) Est-ce que la somme de la série est égale à $f(x)$, en tous point?

Exercice 2 :

Montrer que : $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

La fonction génératrice des polynômes de Hermite est donnée par

$$w(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n\geq 0} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

1) Démontrer que la fonction w vérifie l'équation différentielle : $\frac{\partial w}{\partial t} - (2x - 2t)w = 0$
2) Déduire la relation de précurrence suivante, pour tout $n \geq 1$:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

3) Démontrer que la fonction w vérifie l'équation différentielle : $\frac{\partial w}{\partial x} - 2tw = 0$
4) Déduire la relation de récurrence suivante, pour tout $n \geq 1$: $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$

Exercice 4:

Dans cet exercice on va étudier les propriétés des polynômes de Tchebychev de deuxième espace, qui sont définies par:

$$U_n(x) = \sin(n \arccos x),$$

1. Calculer $U_n(0)$, $U_n(1)$, $U_n(-1)$.
2. En posant $x = \cos\theta$, calculer les intégrales suivantes pour $n \neq m$ et pour $n = m$:

$$, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{U_n(x)U_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x$$

3. a) Démontrer la relation de récurrence suivante :

$$U_n(x) - 2xU_{n-1}(x) + U_{n-2}(x) = 0.$$

b) utiliser cette relation pour obtenir la fonction génératrice ordinaire

$w(x,t) = \sum_{n\geq 0} U_n(x)t^n$.

Exercice 5:

Soit la suite des polynômes de Laguerre $(L_n^\alpha)_n$, donné par le terme générale:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \quad {}_1F_1(-n; \alpha+1; x) ;$$

1) On note par $L^0{}_n = L_n$. Vérifier que :

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!\,(r!)^2} x^r$$

2) Ecrire les 4 premier termes de la suite $(L_n)_n$.

3) On sait que la fonction génératrice des polynômes de Laguerre est donnée par :

$$G(x,t) = \sum_{n\geq 0} L_n(x)t^n = \frac{1}{1-t} e^{\frac{-xt}{1-t}}$$

- Calculer $L_n(0)$ et $L'_n(0)$.

4) Soient les intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{1-t}\right)\left(\frac{e^{\frac{-xs}{1-s}}}{1-s}\right) \mathrm{d}x \qquad , \qquad I_{n,m} = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, \mathrm{d}x$$

1. Démontrer que : $I = \frac{1}{1-st}$. Déduire le développement de I.

2. En multipliant les séries génératrices, Confirmer que l'intégrale $I_{n,m}$ est le coefficient de $t^n s^m$ dans le développement de I. Démontrer que $I_{n,m} = \delta_{n,m}$.